تشریح مسائل

مکانیک کوانتومی

(نورالدین زتیلی)

(ویرایش دوم)

Quark

مؤلف:

محمد بهتاج

عادل سپهری

انتشارات نیاز دانش

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

فصل اول / اصول فیزیک کوانتومی ۵
فصل دوم / ابزارهای ریاضی مکانیک کوانتومی ۴۷
فصل سوم / اصول فیزیک کوانتومی ۱۱۱
فصل چهارم / مسأله‌های یک بعدی ۱۴۷
فصل پنجم / اندازه‌حرکت زاویه‌ای ۲۰۷
فصل ششم / مسأله‌های سه بعدی ۲۵۷
فصل هفتم / چرخش‌ها و جمع اندازه حرکت‌های زاویه‌ای ۲۸۹
فصل هشتم / ذرات یکسان ۳۲۹
فصل نهم / روش‌های تقریبی برای حالت‌های مانا ۳۵۳
فصل دهم / نظریه‌ی اختلال وابسته به زمان ۴۴۱
فصل یازدهم / نظریه‌ی پراکندگی ۴۷۵

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

فصل اول

اصول فیزیک کوانتومی

Quark

تمرین ۱-۱

فلزی را در حال جوش‌کاری درنظر بگیرید.

(آ) هنگامی که فلز با بیشترین توان در ۴۹۰nm تابش می‌کند، دمای آن چه‌قدر است؟

(ب) با فرض این‌که مانند یک جسم سیاه تابش کند، شدت تابش آن را محاسبه کنید.

حل:

(آ)

از رابطه‌ی (۱-۱۴) متن کتاب داریم:

$$\lambda_{max} = \frac{۲۸۹۸/۹\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{m.K}}{T}$$

پس:

$$T = \frac{۲۸۹۸/۹\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{m.K}}{\lambda_{max}} = \frac{۲۸۹۸/۹\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{m.K}}{۴۹۰\times۱۰^{-۹}} \simeq ۵۹۱۶\,\mathrm{K}$$

(ب)

$$E = \sigma T^{۴} = ۵\times۶۷\times۱۰^{-۸}\times(۵۹۱۶)^{۴} \simeq ۶/۹\times۱۰^{۷}\,\mathrm{W.m^{-۲}}$$

تمرین ۱-۲

یک ستاره، یک لامپ روشن و یک تکه‌ی یخ را درنظر بگیرید. دماهای ترتیبی آن‌ها، ۸۵۰۰K،

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

۸۵۰K و ۲۷۳/۱۵K است.

(آ) طول موجی را که در آن انرژی‌های تابیده، قله دارند تخمین بزنید.

(ب) شدت‌های تابش آن‌ها را تخمین بزنید.

حل:

(آ)

$$\lambda_{max}=\frac{۲۸۹۸/۹\times۱۰^{-۶}\,m.K}{T}$$

$$\lambda_{max}\left(T=۸۵۰۰K\right)=\frac{۲۸۹۸/۹\times۱۰^{-۶}\,m.K}{۸۵۰۰K}\simeq ۰/۳۴\mu m$$

$$\lambda_{max}=\left(T=۸۵۰K\right)=\frac{۲۸۹۸/۹\times۱۰^{-۶}\,m.K}{۸۵۰K}\simeq ۳/۴\mu m$$

$$\lambda_{max}=\left(T=۲۷۳/۱۵K\right)=\frac{۲۸۹۸/۹\times۱۰^{-۶}\,m.K}{۲۷۳/۱۵K}\simeq ۱۰/۶\mu m$$

(ب)

$$E=\sigma T^{۴}$$

$$E\left(T=۸۵۰۰K\right)=۵/۶۷\times۱۰^{-۸}\times\left(۸۵۰۰\right)^{۴}\simeq ۳\times۱۰^{۸}\,W.m^{-۲}$$

$$E\left(T=۸۵۰\right)=۳\times۱۰^{۴}\,W.m^{-۲}$$

$$E\left(T=۲۷۳/۱۵\right)\simeq ۳۲۰\,W.m^{-۲}$$

تمرین ۱-۳

یک لامپ روشن ۷۵W و یک اجاق میکروویو ۸۵۰W را درنظر بگیرید. اگر طول موج‌های تابشی که این دو می‌تابانند، به ترتیب ۵۰۰nm و ۱۵۰nm باشد، شمار فوتون‌هایی را که در هر ثانیه گسیل می‌کنند تخمین بزنید. آیا آثار کوانتومی در آن‌ها مهم هستند؟

حل:

انرژی فوتون با طول موج λ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta E=h\frac{c}{\lambda}$$

اگر تعداد فوتون‌های گسیل شده توسط لامپ و اجاق در واحد زمان به‌ترتیب $n_۱$ و $n_۲$ باشند؛ در این‌صورت داریم:

$$n_۱=\frac{E_۱}{\Delta E_۱}=\frac{۷۵}{۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}\times\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۵۰۰\times۱۰^{-۹}}}=۱۸۸۵\times۱۰^{۱۷}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$n_۲=\frac{E_۲}{\Delta E_۲}=\frac{۸۵۰}{۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}\times\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۱۵۰\times۱۰^{-۹}}}=۶۴۱۷\times۱۰^{۱۷}$$

با توجه به اینکه انرژی یک کوانتا در مقایسه با انرژی کل کاملاً قابل اغماض است، بنابراین سطوح انرژی را می‌توان پیوسته در نظر گرفت. اگرچه اثرات کوانتومی همواره وجود دارند اما در اینجا چندان قابل ملاحظه نیستند.

تمرین ۱-۴

با فرض این‌که یک ستاره‌ی معلوم، مانند یک جسم سیاه تابش کند

(آ) دما در سطح آن و

(ب) طول موج پُرتوان‌ترین تابش

هنگامی که شدت کل $۵۷۵\,MW.m^{-۲}$ را گسیل می‌کند، تخمین بزنید.

حل:

(آ)

شدت انرژی تابش شده توسط یک جسم سیاه از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$E=\sigma T^{۴}$$

پس با دانستن E می‌توان T را به‌دست آورد؛ بنابراین داریم:

$$T=\left(\frac{E}{\sigma}\right)^{\frac{۱}{۴}}=\left(\frac{۵۷۵\times۱۰^{۶}}{۵/۶۷\times۱۰^{-۸}}\right)^{\frac{۱}{۴}}\simeq۱۰^{۴}\,K$$

(ب)

$$\lambda_{max}=\frac{۲۸۹۸/۹\times۱۰^{-۶}\,m.K}{T}=۲۸۹۸/۹\text{Å}$$

تمرین ۱-۵

شدت وارد شونده بر سطح زمین از طرف خورشید در حدود $۱/۳۶K\,W.m^{-۲}$ است. با فرض این‌که خورشید کره‌ای (به شعاع $۶/۹۶\times۱۰^{۸}\,m$) باشد که مانند جسم سیاه تابش می‌کند

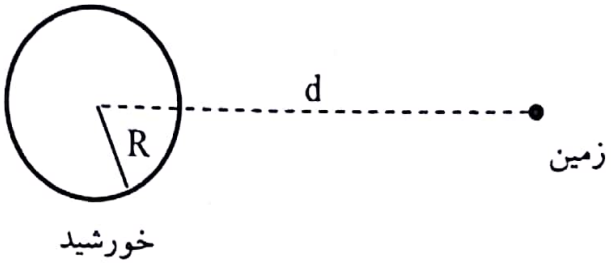
(آ) دما در سطح آن و طول موج قوی‌ترین تابش آن، و

(ب) توان کل تابش شده به‌وسیله‌ی خورشید (فاصله‌ی زمین – خورشید $۱/۵\times۱۰^{۱۱}\,m$ است)

را تخمین بزنید.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK



(آ)

$$\text{شدت انرژی دریافتی توسط زمین} \times 4\pi d^2 = E \times 4\pi R^2$$

$$E = \text{شدت انرژی دریافتی توسط زمین} \times \left(\frac{d}{R}\right)^2$$

پس:

$$E = 1/36\times10^{3} \times \left(\frac{1/5\times10^{11}}{6/96\times10^{8}}\right)^2 \simeq 6/32\times10^{7}\ \mathrm{W.m^{-2}}$$

از طرفی طبق قانون استفان – بولتزمن داریم:

$$E = \sigma T^4$$

و بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$T = \left(\frac{E}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{6/32\times10^{7}}{5/67\times10^{-8}}\right)^{\frac{1}{4}} = 0/58\times10^{4} = 5800\,\mathrm{K}$$

(ب)

$$\text{توان کل تابش شده توسط خورشید} = E \times 4\pi R^2 = 6/32\times10^{7} \times 4 \times 3/14 \times \left(6/96\times10^{8}\right)^2$$

$$= 3845\times10^{22}\ \mathrm{W}$$

تمرین ۱-۶

(آ) (۱) اختلاف انرژی ΔE میان حالت پایه و اولین حالت برانگیخته‌ی اتم هیدروژن؛ و (۲) نسبت $\Delta E/E_1$ میان اختلاف انرژی و انرژی حالت پایه را حساب کند.

(ب) اکنون یک سیستم ماکروسکوپی را در نظر بگیرید: یک آونگ ساده که از یک جرم ۵ گرمی متصل به یک ریسمان بدون جرم و غیرکششی به طول ۲m تشکیل شده است. (۱) انرژی کل E_1 آونگ را زمانی که ریسمان با حالت قائم زاویه‌ی 60° می‌سازد؛ (۲) بسامد نوسان‌های کوچک آونگ و انرژی ΔE یک کوانتا و (۳) نسبت $\Delta E/E_1$ را محاسبه کنید.

(پ) اندازه‌های نسبت $\Delta E/E_1$ محاسبه شده در بخش‌های (آ) و (ب) را امتحان کنید و درباره‌ی اهمیت آثار کوانتومی برای اتم هیدروژن و آونگ بحث کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

حل:

(آ)

انرژی تراز nام اتم هیدروژن بر حسب الکترون - ولت عبارت است از:

$$E_n = \frac{-۱۳/۶}{n^۲}$$

پس اگر $E_۱$ و $E_۲$ به‌ترتیب انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته اتم هیدروژن باشند، داریم:

$$E_۱ = \frac{-۱۳/۶}{(۱)^۲} = -۱۳/۶\text{eV}$$

$$E_۲ = \frac{-۱۳/۶}{۲^۲} = -۳/۴\text{eV}$$

$$\Delta E = E_۲ - E_۱ = -۳/۴ + ۱۳/۶ = ۱۰/۲\text{eV}$$

$$\frac{\Delta E}{E_۱} = \frac{۱۰/۲\text{eV}}{-۱۳/۶\text{eV}} = -۰/۷۵$$

(ب)

اگر زمانیکه نخ پاندول با راستای قائم زاویه‌ی ۰° می‌سازد انرژی پتانسیل گلوله را صفر درنظر بگیریم، با فرض اینکه سرعت گلوله هنگامی که با راستای قائم زاویه‌ی ۶۰° می‌سازد برابر صفر است، داریم:

$$E_۱ = mg\frac{l}{۲} = ۵\times۱۰^{-۲}\times۱۰\times\frac{۲}{۲} = ۰/۰۵\text{J}$$

$$\nu = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۱۰}{۲}} = ۰/۳۵\text{Hz}$$

$$\Delta E = h\nu = ۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}\times۰/۳۵ = ۲/۳۲\times۱۰^{-۳۴}\text{J}$$

$$\frac{\Delta E}{E_۱} = \frac{۲/۳۲\times۱۰^{-۳۴}}{۰/۰۵} \simeq ۴/۶\times۱۰^{-۳۳}$$

(پ)

از بررسی نسبت‌های به‌دست آمده در قسمت‌های (آ) و (ب) نتیجه می‌شود که درنظر گرفتن اثرات کوانتومی در مورد این سیستم ماکروسکوپیکی چندان اهمیت ندارد زیرا انرژی یک کوانتا در مقایسه با انرژی کل بسیار ناچیز و قابل اغماض است.

تمرین ۱-۷

باریکه‌ای از پرتوهای X از یک چشمه‌ی گوگرد $(\lambda = ۵۳/۷\text{nm})$ و یک باریکه‌ی پرتو γ از یک نمونه $C_s^{۱۳۷}$ $(\lambda = ۰/۱۹\text{nm})$ به یک هدف گرافیتی برخورد می‌کنند. دو آشکارساز در زوایای ۳۰° و ۱۲۰° از راستای پرتوهای فرودی قرار دارند.

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

(آ) جابه‌جایی طول موج پرتوهای X و پرتوهای γ ثبت شده در هر دو آشکارساز را تخمین بزنید.

(ب) انرژی جنبشی پس‌زنی الکترون در هر چهار حالت را بیابید.

(پ) چند درصد از انرژی فوتون فرودی در برخورد، در هر چهار حالت تلف می‌شود؟

حل:

(آ)

در اثر کامپتون جابه‌جایی طول موج از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\left(1-\cos\theta\right) = 4\pi\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

λ_c طول موج کامپتون است که مقداری برابر $3/86\times10^{-13}\,\mathrm{m}$ دارد و θ زاویه‌ی پراکندگی فوتون می‌باشد.

پس طبق این توضیحات در مورد هر دو پرتو X و γ داریم:

۱) $\theta = 30^\circ$

$$\Delta\lambda = 4\pi\times3/86\times10^{-13}\sin^2 15^\circ = 3/63612\times10^{-13}\,\mathrm{m}$$

۲) $\theta = 120^\circ$

$$\Delta\lambda = 4\pi\times3/86\times10^{-13}\sin^2 60^\circ = 26/9412\times10^{-13}\,\mathrm{m}$$

(ب)

انرژی جنبشی الکترون از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$K = E_e - E_\circ = h\left(\nu-\nu'\right) = -h\Delta\nu$$

طبق رابطه‌ی $\nu = \frac{c}{\lambda}$ نیز نتیجه می‌شود که:

$$\Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

بنابراین:

$$K = \frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

پس داریم:

نوع پرتو	زاویه‌ی پراکندگی	K
X	30°	$0/0250647\times10^{-21}\,\mathrm{J}$
X	120°	$0/1857125\times10^{-21}\,\mathrm{J}$
γ	30°	$2002/1835\times10^{-21}\,\mathrm{J}$
γ	120°	$14[illegible]\times10^{-21}\,\mathrm{J}$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

(ب)

انرژی فوتون از رابطه‌ی $E=h\nu$ به‌دست می‌آید پس برای $\frac{\Delta E}{E}$، داریم:

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{h\Delta\nu}{h\nu}=\frac{\Delta\nu}{\nu}$$

بین فرکانس و طول موج فوتون نیز رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$c=\lambda\nu$$

$$\ln c=\ln\lambda+\ln\nu$$

حال از رابطه‌ی اخیر دیفرانسیل می‌گیریم:

$$0=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}+\frac{\Delta\nu}{\nu}$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=-\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

پس:

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{\Delta\nu}{\nu}=-\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

بنابراین جدول زیر را خواهیم داشت:

پرتو	زاویه‌ی پراکندگی	$\left\|\frac{\Delta E}{E}\right\|$٪
X	۳۰°	۰/۰۶۷۷۱۱۷×۱۰$^{-۲}$
X	۱۲۰°	۰/۰۵۰۱۶۹۸۱×۱۰$^{-۲}$
γ	۳۰°	۲۸۲/۶۳۱۵۸×۱۰$^{-۲}$
γ	۱۲۰°	۱۶/۸۳۸۲۳۹×۱۰$^{-۲}$

تمرین ۱-۸

به‌نظر می‌رسد که فوتون‌های پُرانرژی، ممکن است درنتیجه‌ی اثر کامپتون معکوس، در تابش کیهانی یافت شوند، یعنی یک فوتون نور مرئی توسط پراکندگی از پروتون پُرانرژی، انرژی می‌گیرد. اگر پروتون اندازه حرکتی برابر ۱۰^{۱۰}eV/c داشته باشد، بیشینه‌ی انرژی نهایی یک فوتونِ در ابتدا زردرنگِ گسیل شده توسط یک اتم سدیم $(\lambda_{\text{.}}=۲/۱\text{eV})$ را پیدا کنید.

حل:

اگر انرژی پروتون را قبل و بعد از برخورد EوE' و فرکانس فوتون را قبل و بعد از برخورد νوν' فرض کنیم، طبق قانون بقای انرژی می‌توان گفت:

$$E+h\nu=E'+h\nu'$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

برای اینکه انرژی فوتون پس از برخورد ماکزیمم باشد و یا به‌عبارتی ν' ماکزیمم شود چون سمت چپ رابطه‌ی فوق مقداری ثابت است، این اتفاق وقتی می‌افتد که E' کمترین مقدار خود را داشته باشد و چون کمترین مقدار E'، m_pc^2 است لذا داریم:

$$E+h\nu = m_pc^2 + h\nu'_{max}$$

$$h\nu'_{max} = E+h\nu-m_pc^2 = \sqrt{m^2{}_pc^4+p^2c^2}+\frac{hc}{\lambda_0}-m_pc^2$$

در رابطه‌ی اخیر p تکانه‌ی پروتون قبل از برخورد می‌باشد. با جایگذاری مقادیر عددی معلوم، مقدار بیشینه‌ی انرژی فوتون پراکنده شده به‌دست می‌آید.

تمرین ۱-۹

شمار فوتون‌های گسیل‌شده در هر ثانیه از یک لامپ روشن ۷۵mW را تخمین بزنید؛ ۵۷۵nm را به‌عنوان طول موج میانگین نور (مرئی) گسیل شده به‌کار ببرید. آیا طبیعت کوانتومی این تابش مهم است؟

حل:

اگر توان لامپ P و تعداد فوتون‌های گسیل شده توسط آن در واحد زمان n باشد از آنجا که انرژی یک فوتون با طول موج λ از رابطه‌ی $E=\frac{hc}{\lambda}$ به دست می‌آید؛ پس می‌توان گفت:

$$P=nE=n\frac{hc}{\lambda}$$

$$n=\frac{P\lambda}{hc}=\frac{۷۵\times۵۷۵\times۱۰^{-۹}}{۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}}=۱۴۴/۶۳۲۲۶\times۱۰^{۱۷}$$

چون در اینجا، کوانتای انرژی در مقابل انرژی کل، کاملاً قابل صرف‌نظر کردن است و چون تعداد کوانتاهای انرژی بسیار زیاد است؛ پس سطوح انرژی را می‌توان پیوسته درنظر گرفت. چون اندازه‌گرفتن اختلاف انرژی بین دو سطح متوالی انرژی ازنظر کلاسیکی غیرممکن است. لذا، در این مسئله اثرات کوانتومی هرچند که همواره وجود دارند اما چندان قابل اهمیت نیستند.

تمرین ۱-۱۰

یک فوتون ۰/۷MeV از یک الکترون که ابتدا ساکن است پراکنده می‌شود. اگر فوتون در زاویه‌ی ۳۵° پراکنده شود

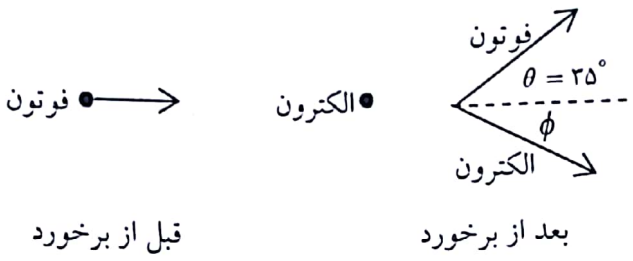
(آ) انرژی و طول موج فوتون پراکنده شده

(ب) انرژی جنبشی پس‌زنی الکترون و

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

(پ) زاویه‌ای که در آن الکترون پس زده می‌شود را حساب کنید.

حل:



(آ)

در اثر کامپتون طول موج فوتون پراکنده شده (λ') و فوتون فرودی (λ) طبق رابطه‌ی زیر به هم مربوط هستند:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) = ۴\pi\lambda_c \sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

در رابطه‌ی فوق λ_c طول موج کامپتون است که مقدار آن $۳/۸۶\times۱۰^{-۱۳}\,\mathrm{m}$ می‌باشد بنابراین:

$$E = h\frac{c}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}}{۰/۷\times۱۰^{۶}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۱۷/۷۴۸۲۱۴\times۱۰^{-۱۳}\,\mathrm{m}$$

$$\lambda' = \lambda + ۲\pi\lambda_c(1-\cos\theta) = ۱۷/۷۴۸۲۱۴\times۱۰^{-۱۳} + ۲\times۳/۱۴\times۳/۸۶\times۱۰^{-۱۳}\left(1-\cos۳۵^\circ\right)$$

$$\lambda' = ۲۱/۳۸۴۳۳۴\times۱۰^{-۱۳}\,\mathrm{m}$$

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}}{۲۱/۳۸۴۳۳۴\times۱۰^{-۱۳}} = ۰/۹۲۹۵۵۹\times۱۰^{-۱۳}\,\mathrm{J} = ۰/۵۸۰۹۷۴۴\,\mathrm{MeV}$$

(ب)

انرژی الکترون K پس از برخورد از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$E + m_e c^۲ = K + m_e c^۲ + E'$$

$$K = E - E' = ۰/۱۱۹۰۲۵۶\,\mathrm{MeV}$$

(پ)

برای به‌دست آوردن زاویه‌ای که الکترون پس از برخورد با راستای حرکت فوتون فرودی می‌سازد، از قانون بقای تکانه‌ی خطی استفاده می‌کنیم. طبق شکل واضح است که:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos۳۵^\circ + P\cos\phi$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$\frac{h\nu'}{c}\sin ۳۵^\circ = P\sin\phi$$

در این روابط P اندازه حرکت الکترون بعد از برخورد است. با حذف P از روابط بالا داریم:

$$tg\phi = \frac{h\nu'\sin ۳۵^\circ}{h\nu - h\nu'\cos ۳۵^\circ} = \frac{E'\sin ۳۵^\circ}{E - E'\cos ۳۵^\circ} \simeq \frac{۰/۵۸۰۹۷۴۴\times ۰/۵}{۰/۷ - ۰/۵۸۰۹۷۴۴\times ۰/۸۵} = ۱/۴۰۸۹۵۷$$

$$\phi = tg^{-۱}(۱/۴۰۸۹۵۷)$$

تمرین ۱-۱۱

نوری با طول‌موج ۳۵۰nm روی یک سطح فلزی با تابع کار ۱/۹eV فرود می‌آید.

(آ) انرژی جنبشی الکترون‌های پرتاب شده را محاسبه کنید.

(ب) بسامد قطع فلز را حساب کنید.

حل:

(آ)

$$K = h\nu - W = \frac{hc}{\lambda} - W = \frac{۲\pi\hbar c}{\lambda} - W$$

$$\hbar c = ۱۹۷/۳۲۷\text{eV.nm}$$

$$K = \frac{۲\times ۳/۱۴\times ۱۹۷/۳۲۷}{۳۵۰} - ۳/۹ = ۱۱۵۹۵/۷۸\text{eV}$$

(ب)

$$\nu_. = \frac{W}{h} = \frac{۳/۹\times ۱/۶۰۲\times ۱۰^{-۱۹}}{۶/۶۲۶\times ۱۰^{-۳۴}} \simeq ۰/۹۴۳\times ۱۰^{۱۵}\,\text{Hz}$$

تمرین ۱-۱۲

طول موج تابشی که بتواند الکترون‌ها را از سطح یک ورقه‌ی روی و با انرژی جنبشی ۷۵eV به بیرون پرتاب کند بیابید. تابع کار فلز روی ۳/۷۴eV است. هم‌چنین طول موج قطع فلز را پیدا کنید.

حل:

طبق اثر فوتوالکتریک داریم:

$$h\nu = W + K$$

$$h\frac{c}{\lambda} = W + K$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$\lambda=\frac{hc}{W+K}=\frac{2\pi\hbar c}{W+K}=\frac{2\times3/14\times197/327\text{eVnm}}{(3/74+75)\text{eV}}=5137/8\text{nm}$$

تمرین ۱-۱۳

اگر پتانسیل توقف فلز وقتی که در برابر تابشی با طول موج ۴۸۰nm قرار می‌گیرد، ۱/۲V باشد،

(آ) تابع کار فلز

(ب) طول موج قطع فلز و

(پ) بیشینه‌ی انرژی الکترون‌های پرتاب شده

را بیابید.

حل:

(آ)

از رابطه‌ی ۱-۲۲ متن کتاب استفاده می‌کنیم:

$$h\nu-W=eV_s$$

$$W=h\nu-eV_s=\frac{hc}{\lambda}-eV_s=\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}-eV_s=\frac{2\times3/14\times197\times327}{480}-12\text{eV}$$

$$W=830/8\text{eV}$$

(ب)

$$\nu_0=\frac{W}{h}=\frac{830/8\times1/602\times10^{-19}}{6/626\times10^{-34}}=200/87\times10^{15}\,\text{Hz}$$

(پ)

$$K=h\nu-W=eV_s=12\text{eV}$$

تمرین ۱-۱۴

تغییر طول موج کامپتون بیشینه‌ی متناظر با برخورد میان یک فوتون و یک پروتون در حال سکون را بیابید.

حل:

$$\Delta\lambda=\frac{h}{m_pc}(1-\cos\theta)=\frac{2h}{m_pc}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$(\Delta\lambda)_{\max}=\begin{cases}\dfrac{2h}{m_pc}\\[2ex]\dfrac{2\pi\hbar c}{m_pc^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{2\times3/14\times197/327\text{eVnm}}{938/272\text{MeV}}=431/6636\times10^{-15}\,\text{m}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$(\Delta\lambda)_{max} = ۴۳۱/۶۶۳۶\,fm$

تمرین ۱-۱۵

اگر پتانسیل توقف یک فلز هنگامی که در برابر تابشی با طول موج ۱۵۰nm قرار می‌گیرد، ۷/۵V باشد، پتانسیل توقف آن را زمانی که در معرض تابشی با طول موج ۲۷۵nm قرار می‌گیرد محاسبه کنید.

حل:

از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$W = h\nu - eV_s = h\nu' - eV_s'$$

$$eV_s' = h(\nu' - \nu) + eV_s$$

$$V_s' = V_s + \frac{hc}{e}\left(\frac{۱}{\lambda'} - \frac{۱}{\lambda}\right) = V_s + \frac{۲\pi\hbar c}{e}\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda\lambda'} = ۷/۵ + ۲\times ۳/۱۴ \times ۱۹۷/۳۲۷ \times \frac{۱۵۰ - ۲۷۵}{۱۵۰\times ۲۷۵} = ۳/۷۴۵V$$

تمرین ۱-۱۶

یک چشمه‌ی نور با بسامد $۹/۵\times ۱۰^{۱۴}Hz$ به سطح فلزی با تابع کار ۲/۸eV می‌تابد و الکترون‌ها را به بیرون پرتاب می‌کند.

(آ) پتانسیل توقف

(ب) بسامد قطع و

(پ) انرژی جنبشی الکترون‌های پرتاب شده

را محاسبه کنید.

حل:

(آ)

از رابطه‌ی $W = h\nu - eV_s$ نتیجه می‌شود:

$$V_s = \frac{h\nu - W}{e} = \frac{۳/۹۳eV - ۲/۸eV}{e} = ۱/۱۳V$$

(ب)

$$\nu_. = \frac{W}{h} = \frac{۲/۸\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}{۶/۶۲۶\times ۱۰^{-۳۴}} = ۶/۶۶۱۲۴۳۲\times ۱۰^{۱۴}\,Hz$$

(پ)

از رابطه:

$$h\nu = W + K$$

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

نتیجه می‌شود که:

$$K = h\nu - W = ۱/۱۳\text{eV}$$

تمرین ۱-۱۷

فلزی با بسامد قطع $۱/۲\times۱۰^{۱۴}\text{Hz}$ را در نظر بگیرید:

(آ) تابع کار فلز را بیابید.

(ب) انرژی جنبشی الکترون‌های پرتاب شده را، زمانی که فلز در برابر یک تابش با بسامد $۷\times۱۰^{۱۴}\text{Hz}$ قرار می‌گیرد پیدا کنید.

حل:

(آ)

$$W = h\nu_{\circ} = ۶/۶۲\times۱۰^{-۳۴}\times۱/۲\times۱۰^{۱۴} = ۷/۹۵۱۲\times۱۰^{-۲۰}\,\text{J} = ۰/۴۹۶۳۲۹۶\text{eV}$$

(ب)

$$K = h\nu - W = ۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\times۷\times۱۰^{۱۴} - ۷/۹۵۱۲\times۱۰^{-۲۰} = ۳۸/۴۳۰۸\times۱۰^{-۲۰}\,\text{J} \simeq ۲/۴\text{eV}$$

تمرین ۱-۱۸

نوری با بسامد $۷/۲\times۱۰^{۱۴}\text{Hz}$ روی چهار سطح فلزی گوناگون سزیم، آلومینیم، کبالت و پلاتین که تابع کار آن‌ها به ترتیب $۲/۴\text{eV}$، $۴/۰۸\text{eV}$، $۳/۹\text{eV}$ و $۶/۳۵\text{eV}$ است فرود می‌آید.

(آ) از میان این فلزات کدام یک اثر فوتوالکتریک را نشان خواهد داد؟

(ب) برای هریک از فلزات تولیدکننده‌ی فوتوالکترون‌ها، بیشینه‌ی انرژی جنبشی الکترون‌های پرتاب‌شده را حساب کنید.

حل:

(آ)

ابتدا انرژی فوتون فرودی را محاسبه می‌کنیم:

$$h\nu = ۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\times۷/۲\times۱۰^{۱۴} = ۲/۹۷۷۹۷۷۶\text{eV}$$

چون این مقدار تنها از تابع کار فلز سدیم بیشتر است؛ پس اثر فوتوالکتریک فقط برای این فلز اتفاق می‌افتد.

(ب)

$$K = h\nu - W = ۲/۹۷۷۹۷۷۶ - ۲/۱۴ = ۰/۸۳۷۹۷۷۶\text{eV}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

تمرین ۱-۱۹

یک فلز با پتانسیل‌های توقف $9V$ و $4V$ را هنگامی‌که در برابر تابش دو چشمه با بسامدهای $17\times10^{14}Hz$ و $8\times10^{14}Hz$ قرار می‌گیرد، درنظر بگیرید:

(آ) از این داده‌ها برای یافتن مقداری عددی برای ثابت پلانک استفاده کنید.

(ب) تابع کار و بسامد قطع فلز را پیدا کنید.

(پ) بیشینه‌ی انرژی جنبشی الکترون‌های پرتاب شده را زمانی که فلز در معرض تابشی با بسامد $12\times10^{14}Hz$ قرار می‌گیرد، بیابید.

حل:

(آ)

$$eV_s = h\nu - W$$

$$e\Delta V_s = h\Delta\nu$$

(ب)

$$h = \frac{e\Delta V_s}{\Delta\nu} = \frac{1/6002\times10^{-19}\times(9-4)}{17\times10^{14}-8\times10^{14}} = 0/89\times10^{-33}\ J.s$$

$$W = h\nu - eV_s = 8/9\times10^{-34}\times17\times10^{14} - 1/6002\times10^{-19}\times9 = 0/9772\times10^{-19}\ J = 0/6075eV$$

$$\nu_0 = \frac{W}{h} = 1/092135\times10^{14}\ Hz$$

(پ)

$$K = h\nu - W = 8/9\times10^{-34}\times12\times10^{14} - 0/9772\times10^{-19} = 9/7082\times10^{-19}\ J = 6/0599251eV$$

تمرین ۱-۲۰

با به‌کارگیری الزامات پایستگی انرژی و اندازه حرکت، نشان‌دهید که یک الکترون آزاد نمی‌تواند همه‌ی انرژی یک فوتون را جذب کند.

قبل از برخورد — بعد از برخورد

حل:

(آ)

پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که تکانه‌های فوتون فرودی و الکترون پس‌زده شده هم‌جهت باشند؛ پس:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$\frac{h\nu}{c}=p$$

$$pc=h\nu$$

$$h\nu+m_e c^2=\sqrt{m_e^2c^4+p^2c^2}$$

پس نتیجه می‌شود که:

$$h\nu+m_e c^2=\sqrt{m_e^2c^4+h^2\nu^2}$$

$$h^2\nu^2+m_e^2c^4+2h\nu m_e c^2=m_e^2c^4+h^2\nu^2$$

$$2h\nu m_e c^2=0$$

نتیجه‌ی اخیر غیرممکن است و لذا امکان برقراری همزمان بقای انرژی و بقای تکانه‌ی خطی وجود ندارد و الکترون نمی‌تواند تمام انرژی فوتون را جذب کند.

تمرین ۱-۲۱

فوتون‌هایی با طول موج $5nm$ از الکترون‌هایی که در حال سکون هستند، پراکنده می‌شوند. اگر فوتون‌ها تحت زاویه 60° نسبت به فوتون‌های فرودی پراکنده شوند مطلوبست:

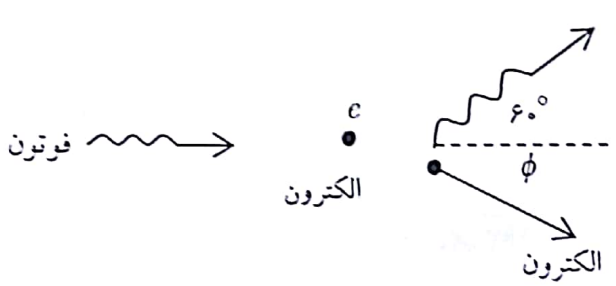
(آ) جابه‌جایی طول موج کامپتون

(ب) انرژی جنبشی منتقل‌شده به الکترون‌های پس‌زده، و

(پ) زاویه‌ای که تحت آن الکترون پس‌زده می‌شود.

حل:

(آ)



$$\Delta\lambda=4\pi\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}=4\times3/14\times3/86\times10^{-13}\sin^2 30^\circ=12/1204\times10^{-13}\,m$$

(ب)

از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم:

$$h\nu+m_e c^2=h\nu'+m_e c^2+K$$

$$K=h(\nu-\nu)=hc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)=2\pi\hbar c\frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda+\Delta\lambda)}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$K = ۲\times ۳/۱۴\times ۱۹۷/۳۲۷\text{eVnm}\times\frac{۰/۰۰۱۲۱۲۰۴}{۵(۵+۰/۰۰۱۲۱۲۰۴)}\frac{۱}{nm}=۰/۰۶۰۰۶۲۵\text{eV}$$

(پ)

$$\frac{h\nu}{c}=\frac{h\nu'}{c}\cos\theta+P_e\cos\phi$$

$$\frac{h\nu'}{c}\sin\theta=P_e\sin\phi$$

با حذف P_e از روابط فوق داریم:

$$tg\phi=\frac{\nu'\sin\theta}{\nu-\nu'\cos\theta}=\frac{\frac{c}{\lambda'}\sin\theta}{\frac{c}{\lambda}-\frac{c}{\lambda'}\cos\theta}=\frac{\lambda\sin\theta}{\lambda'-\lambda\cos\theta}$$

$$tg\phi=\frac{۵\sin ۶۰^\circ}{۵/۰۰۱۲۱۲۰۴-۵\cos ۶۰^\circ}=۱/۶۹۹۱۷۶۲$$

$$\phi=۶۰^\circ$$

تمرین ۱-۲۲

پرتوهای X با طول موج ۰/۰۰۰۸nm با الکترون‌های ساکن برخورد می‌کنند. اگر طول موج فوتون‌های پراکنده شده ۰/۰۰۱۷nm باشد، مطلوبست:

(آ) انرژی جنبشی الکترون‌های پس زده

(ب) زاویه‌ای که تحت آن فوتون‌ها پراکنده می‌شوند و

(پ) زاویه‌ای در آن الکترون‌ها پس‌زده می‌شوند.

حل:

(آ)

$$K=h\nu-h\nu'=hc\left(\frac{۱}{\lambda}-\frac{۱}{\lambda'}\right)=۲\pi\hbar\frac{۱}{\lambda}=۲\times ۳/۱۴\times ۱۹۷/۳۲۷\text{eV.nm}\left(\frac{۱۰۰۰۰}{۸}-\frac{۱۰۰۰۰}{۱۷}\right)\frac{۱}{\text{nm}}$$

$$=۷۳۸۰۶۱۰/۴\text{eV}\simeq ۷/۳۸\text{MeV}$$

(ب)

طبق رابطه‌ی (۱-۳۶) داریم:

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=۲\lambda_c\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

$$\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)=\frac{\Delta\lambda}{۲\lambda_c}=\frac{(۱۷-۸)\times ۱۰^{-۱۳}}{۲\times ۲/۴۲۶\times ۱۰^{-۱۲}}=۰/۱۸۵۴۹۰۵$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\simeq ۰/۴۳۱$$

$$\frac{\theta}{۲}=۲۵/۵^\circ$$

$$\theta=۵۱^\circ$$

(ب)

طبق رابطه‌ی (۱-۱۸۱) داریم:

$$\phi=\tan^{-۱}\left(\frac{\sin\theta}{\frac{\lambda'}{\lambda}-\cos\theta}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{\sin ۵۱^\circ}{\frac{۱۷}{۸}-\cos ۵۱^\circ}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{۰/۷۷۷۱}{\frac{۱۷}{۸}-۰/۶۲۹۳}\right)=۲۷/۵^\circ$$

تمرین ۱-۲۳

فوتون‌هایی با انرژی ۰/۷ MeV از الکترون‌های ساکن پراکنده می‌شوند. اگر انرژی فوتون‌های پراکنده شده ۰/۵ MeV باشد، پیدا کنید:

(آ) جابه‌جایی طول موج

(ب) زاویه‌ای که در آن فوتون‌ها پراکنده می‌شوند

(پ) زاویه‌ای که در آن الکترون‌ها پس‌زده می‌شوند، و

(ت) انرژی جنبشی الکترون‌های پس‌زده شده.

حل:

(آ)

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\frac{c}{\nu'}-\frac{c}{\nu}=\frac{hc}{h\nu'}-\frac{hc}{h\nu}=۲\pi\hbar c\left(\frac{۱}{E'}-\frac{۱}{E}\right)$$

$$=۲\times۳/۱۴\times۱۹۷/۳۲۷\text{eV.nm}\left(\frac{۱}{۰/۵}-\frac{۱}{۰/۷}\right)\frac{۱}{\text{MeV}}=۷۰۸\times۱۰^{-۱۵}\,\text{m}$$

(ب)

$$\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)=\frac{\Delta\lambda}{۲\lambda_c}=\frac{۷۰۸\times۱۰^{-۱۵}}{۲\times۲/۴۲۶\times۱۰^{-۱۲}}\simeq ۰/۱۴۶$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\simeq ۰/۳۸۲$$

$$\frac{\theta}{۲}=۲۲/۵^\circ$$

$$\theta=۴۵^\circ$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

(پ)

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\frac{\lambda'}{\lambda}-\cos\theta}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sin ۴۵^\circ}{\frac{۷}{۵}-\cos ۴۵^\circ}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{۰/۷۰۷۱}{\frac{۷}{۵}-۰/۷۰۷۱}\right)=۴۵/۵^\circ$$

(ت)

$$K=E-E'=۰/۷-۰/۵=۰/۲\text{MeV}$$

تمرین ۱-۲۴

دریک پراکندگی کامپتونِ فوتون‌ها از الکترون‌های ساکن، اگر فوتون‌ها تحت زاویه‌ی ۴۵° پراکنده شوند و طول موج فوتون‌های پراکنده شده، $۹\times۱۰^{-۱۲}\text{m}$ باشد،

(آ) طول موج و انرژی فوتون‌های فرودی را بیابید.

(ب) انرژی الکترون‌های پس زده و زاویه‌ای که تحت آن پس زده می‌شوند را پیداکنید.

حل:

(آ)

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=۲\pi\lambda_c(۱-\cos\theta)$$

$$\lambda=\lambda'-۲\pi\lambda_c(\cos\theta)=۹\times۱۰^{-۱۲}-۲\times۳/۱۴\times۳/۸۶\times۱۰^{-۱۲}\left(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

$$\lambda=۱/۷۲۷۷۶\times۱۰^{-۱۲}\,\text{m}$$

$$E=\frac{hc}{\lambda}=\frac{۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}}{۱/۷۲۷۷۶\times۱۰^{-۱۲}}=۱۱/۵۰۵۰۷\times۱۰^{-۱۳}\,\text{J}=۷/۱۹۱\text{MeV}$$

(ب)

$$K=h\nu-h\nu'=hc\left(\frac{۱}{\lambda}-\frac{۱}{\lambda'}\right)=\frac{hc(\lambda'-\lambda)}{\lambda\lambda'}$$

$$K=\frac{۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}\times(۹-۱/۷۲۷۷۶)\times۱۰^{-۱۲}}{۹\times۱۰^{-۱۲}\times۱/۷۲۷۷۶\times۱۰^{-۱۲}}=۱/۲۷۸۳۴۱۱\times۱۰^{-۱۲}\,\text{J}\simeq۰/۸\text{MeV}$$

$$E_e=K+m_ec^۲=۰/۸+۰/۵۱۱=۱/۳۱۱\text{MeV}$$

از مسئله‌ی (۱-۲۳) داریم:

$$tg\phi=\frac{\lambda\sin\theta}{\lambda'-\lambda\cos\theta}=\frac{\lambda}{\frac{\lambda'}{\sin\theta}-\lambda tg\theta}=\frac{۱/۷۲۷۷۶}{۹\sqrt{۲}-۱/۷۲۷۷۶}$$

$$\phi=tg^{-۱}(۰/۱۵۸۹۱۴۸)\simeq۹^\circ$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

تمرین ۱-۲۵

هنگام پراکندگی فوتون‌ها از الکترون‌های ساکن، اگر فوتون‌های پراکنده شده در زاویه ۹۰° آشکارسازی شوند و طول‌موج آن‌ها دو برابر طول موج فوتون‌های فرودی باشد، موارد زیر را پیدا کنید:

(آ) طول موج فوتون‌های فرودی

(ب) انرژی الکترون‌های پس زده و زاویه‌ای که تحت آن پراکنده می‌شوند، و

(پ) انرژی فوتون‌های فرودی و پراکنده شده.

حل:

(آ)

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(۱ - \cos\theta)$$

$$\lambda' = ۲\lambda$$

(ب)

رابطه‌ی اخیر را در رابطه‌ی ماقبل جایگذاری می‌کنیم:

$$۲\lambda - \lambda = \frac{h}{m_e c}(۱ - \cos\theta) = \lambda = ۲\pi\lambda_c(۱ - \cos\theta) = ۲\times ۳/۱۴ \times ۳/۸۶ \times ۱۰^{-۱۲} \quad (۱-۰)$$

$$\lambda = ۲۴/۲۴۰۸ \times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{m}$$

$$K = h\nu - h\nu' = hc\left(\frac{۱}{\lambda} - \frac{۱}{۲\lambda}\right) = \frac{۲\pi\hbar c}{۲\lambda} = \frac{۳/۱۴ \times ۱۹۷/۳۲۷\,\mathrm{eV\,nm}}{۰/۰۰۲۴۲۴۰۸\,\mathrm{nm}} = ۲۵۵۶۰۳\,\mathrm{eV}$$

$$E_. = K + m_e c^۲ = ۰/۵۱۱\,\mathrm{MeV} - ۰/۲۵۵۶۰۳\,\mathrm{MeV} = ۰/۲۵۵۳۹۷\,\mathrm{MeV}$$

$$tg\phi = \frac{\lambda\sin\theta}{\lambda' - \lambda\cos\theta} = \frac{\lambda\times ۱}{\lambda' - \lambda\times ۰} = \frac{\lambda}{۲\lambda} = \frac{۱}{۲}$$

$$\phi = tg^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

(پ)

$$E = \frac{hc}{\lambda} = ۲\times ۲۵۵۶۰۳\,\mathrm{eV} = ۰/۵۱۱۲۰۶\,\mathrm{MeV}$$

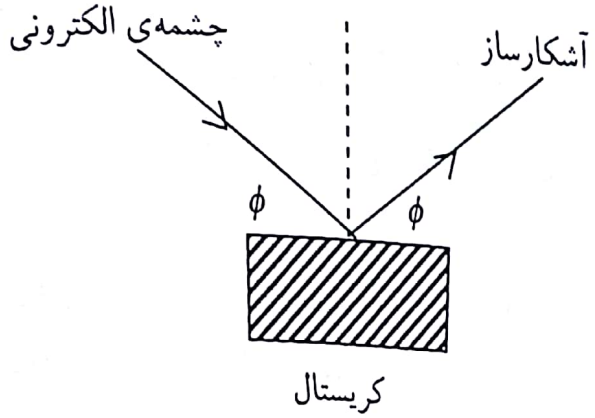
$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{۲\lambda} = \frac{۱}{۲}E = ۰/۲۵۵۶۰۳\,\mathrm{MeV}$$

تمرین ۱-۲۶

در پراکندگی الکترون‌ها از یک بلور، نخستین بیشینه در زاویه ۶۰° مشاهده شد. انرژی الکترون‌ها چقدر باید باشد تا بتوانیم در عمق ۱۹nm درون بلور کاوش کنیم؟

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

حل:



در پراکندگی امواج از ساختارهای تناوبی، بین امواجی که از صفحات پراکندگی مجاور هم می‌آیند اختلاف فازی به‌اندازه‌ی $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)2d\sin\phi$ وجود دارد. تداخل سازنده وقتی رخ می‌دهد که این اختلاف فاز برابر با $2\pi n$ باشد که در آن n عدد درستی است، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$\lambda=\frac{2d\sin\phi}{n}$$

برای اولین ماکزیمم $n=1$ می‌باشد پس:

$$\lambda=2d\sin\phi=2\times 19\times\sin 60^\circ=32/3\,\text{nm}$$

$$p=\frac{h}{\lambda}$$

$$K=\frac{p^2}{2m_e}=\frac{h^2}{2m_e\lambda^2}=\frac{\left(6/626\times10^{-34}\right)^2}{2\times9/109\times10^{-31}\times(32/3)^2\times10^{-18}}=0/00230\,99\times10^{-19}\,\text{J}$$

$$K=0/001\,4419\,\text{eV}$$

تمرین ۱-۲۷

قدرت تفکیک میکروسکوپی که با الکترون‌هایی با انرژی $175\,\text{eV}$ کار می‌کند را تخمین بزنید.

حل:

$$K_e=\frac{p^2}{2m_e}$$

$$p=\sqrt{2m_eK}$$

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2m_eK}}=\sqrt{\frac{h^2}{2m_eK}}=\sqrt{\frac{2\pi^2\hbar^2c^2}{m_ec^2K}}=\sqrt{\frac{2\times10\times\left(197/3\times10^{-15}\right)^2(\text{MeV.m})^2}{0/511\,\text{MeV}\times175\,\text{eV}}}$$

$$\simeq 93\times10^{-12}\,\text{m}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

قدرت تفکیک این میکروسکوپ مقداری برابر با طول موج دوبروی الکترون‌های آن خواهد بود.

تمرین ۱-۲۸

بلندترین و کوتاه‌ترین طول‌موج‌ها در سری‌های بالمر و پاشن برای اتم هیدروژن کدام هستند؟

حل:

$$E_n = -\frac{R}{n^2}$$

$$h\nu_B = E_n - E_2 = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad ; \quad n > 2$$

ν_B در واقع فرکانس فوتون گسیل شده توسط الکترون است وقتی از تراز nام به تراز دوم می‌رود.

$$h\frac{c}{\lambda_B} = R\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad ; \quad n > 2$$

$$\lambda_B = \frac{hc}{R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)} \quad ; \quad n > 2$$

$$\frac{hc}{R} = \frac{2\pi\hbar c}{R} = \frac{2\times 3/14\times 193/37\,\text{eV.nm}}{13/6\,\text{eV}} \simeq 89/3\,\text{nm}$$

$$\lambda_{B-\min} = \lambda_B(n\to\infty) = \frac{4hc}{R} = 357/2\,\text{nm}$$

$$\lambda_{B-\max} = \lambda_B(n=3) = \frac{36}{5}\frac{hc}{R} \simeq 643\,\text{nm}$$

$$h\nu_P = E_n - E_3 = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad ; \quad n > 3$$

ν_P فرکانس فوتون گسیل شده توسط الکترون است وقتی از تراز nام به تراز سوم می‌رود.

$$\lambda_P = \frac{hc}{R\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\lambda_{P-\max} = \lambda_P(n=4) = \frac{hc}{R\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)} = \frac{16\times 9hc}{(16-9)R} = 1837/03\,\text{nm}$$

$$\lambda_{P-\min} = \frac{3hc}{R} = 267/9\,\text{nm}$$

تمرین ۱-۲۹

(آ) انرژی حالت پایه‌ی یون لیتیم دوبار یونیزه، Li^{3+}، که با برداشتن دو الکترون از اتم هیدروژن به‌دست می‌آید را حساب کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

(ب) اگر یون لیتیوم $Li^{۲+}$ با یک فوتون بمباران شود و درنتیجه آن را جذب کند، انرژی و طول موج لازم فوتون برای برانگیختن یون $Li^{۲+}$ به سومین حالت برانگیخته را محاسبه کنید.

حل:

(آ)

$Li^{۲+}$ در واقع یک یون هیدروژن‌گونه است. انرژی تراز nام یون‌های هیدروژن‌گونه از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$E_n = -\frac{Z^۲}{۱+\frac{m_e}{M}}\frac{R}{n^۲}$$

که در این رابطه، Z تعداد پروتون‌های هسته و M جرم نوکلئون‌هاست. در اینجا می‌توان از $\frac{m_e}{M}$ صرف‌نظر کرد. پس:

$$E_n = -\frac{Z^۲R}{n^۲}$$

برای $Li^{۲+}$، $Z=۳$ می‌باشد. انرژی حالت پایه به‌ازای $n=۱$ حاصل می‌شود؛ پس:

$$\text{انرژی حالت پایه} = E_۱ = \frac{-۳^۲R}{۱^۲} = -۹R = -۹\times ۱۳/۶ = -۱۲۲/۴\text{eV}$$

(ب)

انرژی سومین حالت برانگیخته به‌ازای $n=۴$ به‌دست می‌آید. برای اینکه فوتونی بتواند یون $Li^{۲+}$ را به حالت برانگیخته‌ی سوم آن ببرد، باید انرژی آن برابر با اختلاف انرژی تراز $n=۴$ و تراز $n=۱$ باشد؛ یعنی:

$$E_{Ph} = h\nu = E_۴ - E_۱ = ۹R\left(\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{۴^۲}\right) = ۹R\left(\frac{۱۵}{۱۶}\right) = ۱۱۴/۷۵\text{eV}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\frac{E_{Ph}}{h}} = \frac{hc}{E_{Ph}} = \frac{۲\pi\hbar c}{E_{Ph}} = \frac{۲\times ۳/۱۴\times ۱۹۷/۳۲۷\text{eV.nm}}{۱۱۴/۷۵\text{eV}} \simeq ۱۰/۸\text{nm}$$

تمرین ۱-۳۰

یک یون سدیم ده بار یونیزه، $Na^{۱۰+}$، که با برداشتن ده الکترون از یک اتم Na حاصل می‌شود را در نظر بگیرید.

(آ) سرعت چرخش و اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون را (برحسب چشمه‌ی یون) هنگامی‌که یون در چهارمین حالت برانگیخته است، محاسبه کنید.

(ب) بسامد تابش گسیل‌شده [illegible] یون از چهارمین حالت برانگیخته خود به اولین حالت

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

برانگیخته برمی‌گردد، حساب کنید.

حل:

(آ)

$$L_n = n\hbar = m_e r_n v_n$$

$$r_n = \frac{a_0 n^2}{Z}$$

$$v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n} = \frac{n\hbar}{m_e}\,\frac{Z}{a_0 n^2} = \frac{\hbar Z}{m_e a_0 n}$$

در اینجا $Z = 11$ و $n = 5$ می‌باشد.

$$L_5 = 5\hbar = 5 \times 1/055 \times 10^{-34}\ \text{J.s} = 5/275 \times 10^{-34}\ \text{J.s}$$

$$v_5 = \frac{11\hbar}{5m_e a_0} = \frac{11}{5}\,\frac{1/055 \times 10^{-34}}{9/109 \times 10^{-31} \times 5/3 \times 10^{-9}} = 0/04807 \times 10^{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 48076\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(ب)

انرژی فوتون گسیل شده وقتی الکترون از تراز nاُم به تراز mاُم سقوط می‌کند از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$E = h\nu = E_n - E_m = \frac{-Z^2 R}{n^2} + \frac{Z^2 R}{m^2} = Z^2 R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\nu = \frac{Z^2 R}{h}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

در اینجا $m = 2$ و $n = 5$ می‌باشد. پس:

$$\nu = \frac{121 \times 13/6 \times 1/602 \times 10^{-19}}{6/626 \times 10^{-34}}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25}\right) = 83/55 \times 10^{15}\ \text{Hz}$$

تمرین ۱-۳۱

طول موج تابش لازم را برای برانگیختن اتم بریلیوم سه بار یونیزه، Be^{3+}، از حالت پایه به سومین حالت برانگیخته، محاسبه کنید.

حل:

$$h\frac{c}{\lambda} = E_4 - E_1 = Z^2 R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{15}{16} Z^2 R$$

$$\lambda = \frac{16hc}{15Z^2 R} = \frac{16 \times 2 \times 3/14 \times 197/327\ \text{eV.nm}}{15 \times 4^2 \times 13/6\ \text{eV}} \simeq 3/04\ \text{nm}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

تمرین ۱-۳۲

براساس مدل کلاسیک اتم هیدروژن، یک الکترون درحال حرکت در یک مدار دایره‌ای با شعاع ۰/۰۵۳nm به‌دور پروتونی ثابت در مرکز، ناپایدار است و الکترون باید سرانجام روی پروتون فروبیفتد. تخمین بزنید چه‌مدت زمانی طول می‌کشد تا الکترون بر روی پروتون فروبیفتد.

(راهنمایی: با عبارت کلاسیک برای تابش از یک‌بار شتاب‌دار آغاز کنید.)

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \quad , \quad E=\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

که در آن a شتاب الکترون و E انرژی کل است.

حل:

$$a=\frac{v^2}{r}=\frac{m^2v^2}{m^2r}=\frac{p^2}{m^2r}=\frac{p^2}{2m}\frac{2}{mr}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\frac{2}{mr}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr^2}$$

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 m^2r^4}=-\frac{2}{3}\frac{e^6}{(4\pi\varepsilon_0)^3 m^2c^3r^4} \qquad (1)$$

رابطه‌ی اخیر را با جایگذاری مقدار a از رابطه‌ی ماقبل نوشتیم.

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt} \qquad (2)$$

روابط (۱) و (۲) را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$-\frac{2}{3}\frac{e^6}{(4\pi\varepsilon_0)^3 m^2c^3r^4}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$dt=-\frac{3}{2}\frac{(4\pi\varepsilon_0)^3 m^2c^3r^4}{e^6}\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}dr=-\frac{3}{4}\frac{(4\pi\varepsilon_0)^2 m^2c^3}{e^4}r^2dr$$

$$[t]_0^t=-\frac{3}{4}\frac{(4\pi\varepsilon_0)^2 m^2c^3}{e^4}\left[\frac{r^3}{3}\right]_a^0$$

$$t=\frac{(4\pi\varepsilon_0)^2 m^2c^2a^3}{4e^2}$$

در رابطه‌ی زیر $a=5/3\text{nm}$ می‌باشد.

تمرین ۱-۳۳

طول‌موج دوبروی را در موارد زیر حساب کنید:

(آ) الکترونی با انرژی جنبشی 1eV

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

(ب) پروتونی با انرژی جنبشی $70\ MeV$

(پ) یک گلوله‌ی ۱۰۰ گرمی در حال حرکت با سرعت $1200\ ms^{-1}$

داده‌های مفید: $m_e c^2 = 0/511 MeV$ ، $m_p c^2 = 938/3 MeV$ و $hc \simeq 197/3 eV.nm$

حل:

در این مسئله داده‌ها طوری است که می‌توان از روابط کلاسیکی استفاده کرد.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{2\pi hc}{\sqrt{2mc^2 K}} = \frac{\sqrt{2}\pi hc}{\sqrt{mc^2 K}}$$

(آ)

$$\lambda = \frac{1/4 \times 3/14 \times 1973/2\ eV.nm}{10^2 \sqrt{0/511 \times 54\ eV}} = 17/1 nm$$

(ب)

$$\lambda = \frac{1/4 \times 3/14 \times 1973/2\ eV.nm}{\sqrt{70 \times 938/3\ MeV}} = 339 \times 10^{-15}\ m = 339\ fm$$

(پ)

$$\lambda = \frac{6/626 \times 10^{-34}\ J.s}{0/1 \times 1200} = 0/055 \times 10^{-34}\ m$$

تمرین ۱-۳۴

یک نوسانگر یک‌بعدی ساده، ذره‌ای است که یک نیروی خطی بازگرداننده $F(x) = -m\omega^2 x$ بر آن اعمال می‌شود. از دیدگاه کلاسیک، کمینه انرژی نوسانگر صِفر است، زیرا می‌توانیم آن را در حالی که سرعت اولیه‌اش صفر می‌باشد، به‌طور دقیق در $x = 0$ یعنی در، وضعیت تعادلش قرار دهیم. از دیدگاه کوانتوم مکانیکی، اصل عدم‌قطعیت به ما اجازه نمی‌دهد که ذره را دقیقاً جایگزیده کنیم و در همان زمان، آن را ساکن نگه داریم. با استفاده از اصل عدم‌قطعیت، کمینه انرژی نوسانگر کوانتوم مکانیکی را تخمین بزنید.

حل:

برای حل چنین مسائلی عدم قطعیت در مکان را از مرتبه‌ی مکان و عدم قطعیت در اندازه‌ی حرکت را از مرتبه‌ی اندازه‌ی حرکت در نظر می‌گیریم و رابطه‌ی عدم قطعیت هایزنبرگ را به‌صورت حالت تساوی آن به‌کار می‌بریم؛ یعنی به‌طور خلاصه:

$$\Delta x \simeq x$$

$$\Delta p \simeq p$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$\Delta x \Delta p = \hbar$$

برای یافتن انرژی حالت پایه، انرژی کل را مینیمم می‌کنیم:

$$F(x) = -mw^2 x = \frac{-dV}{dx}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} mw^2 x^2$$

$$E = K + V = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} mw^2 x^2 = \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{1}{2} mw^2 x^2$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{-2}{x^3} + \frac{1}{2} mw^2 (2x) = -\frac{\hbar^2}{mx^3} + mw^2 x$$

فرض کنیم که انرژی در $x = x_0$، مینیمم شود؛ پس باید داشته باشیم:

$$\left.\frac{dE}{dx}\right|_{x = x_0} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{mx_0^3} + mw^2 x_0 = 0$$

$$x_0^4 = \frac{\hbar^2}{m^2 w^2}$$

$$x_0 = \left(\frac{\hbar}{mw}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{\text{پایه}} = E(x = x_0) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{mw}{\hbar}\right) + \frac{1}{2} mw^2 \left(\frac{\hbar}{mw}\right) = +\frac{1}{2}\hbar w + \frac{1}{2}\hbar w = \hbar w$$

تمرین ۱-۳۵

یک آزمایش دو شکافی را در نظر بگیرید که در آن امواج گسیل شده از شکاف‌ها بر روی پرده‌ی قائم موازی با محور x بر هم نهی می‌کنند. هنگامی‌که فقط یک شکاف باز است، دامنه‌ی موجی که ایجاد می‌شود $\psi_1(y,t) = e^{-y^2/2a^2} e^{i(\omega t - ay)}$ است و زمانی که تنها، شکاف دیگر باز باشد، دامنه $\psi_2(y,t) = e^{-y^2/2a^2} e^{i(\omega t - ay - \pi y)}$ است.

(آ) الگوی تداخلی در راستای محور x با دو شکاف باز کدام است؟ شدت موج را برحسب تابعی از y رسم کنید.

(ب) اگر چشمه‌ی نوری را پشت پرده قرار دهیم تا اندازه بگیرد که نور از میان کدام شکاف گذشته است، شدت موج چه‌مقدار می‌شود؟

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

(آ)

از بهنجار کردن ψ_1 و ψ_2 نتیجه می‌شود که:

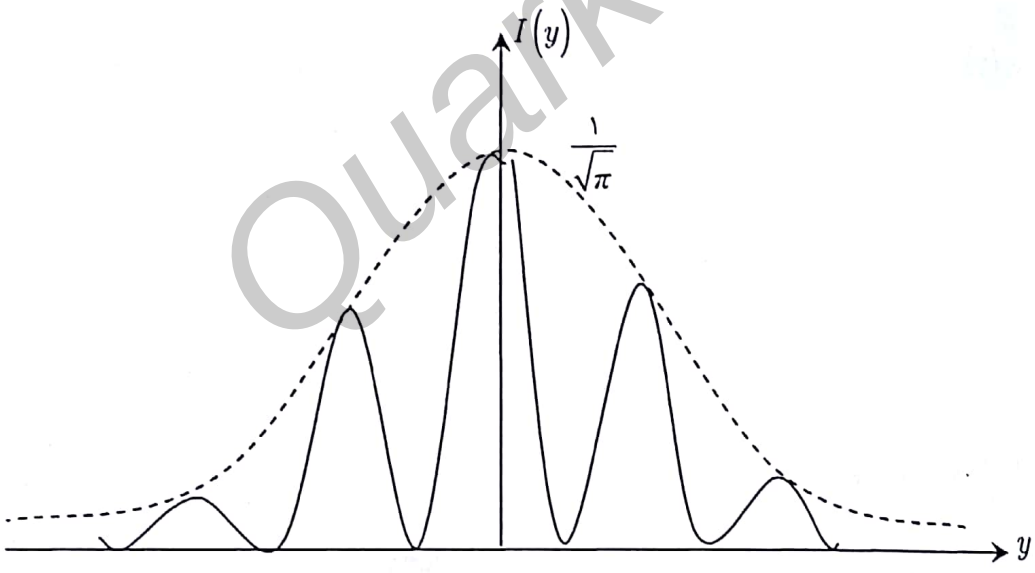
$$\psi_1(y,t)=\left(\frac{1}{16\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{y^2}{32}} e^{i(\omega t-ay)}$$

$$\psi_2(y,t)=\left(\frac{1}{16\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{y^2}{32}} e^{i(\omega t-ay-\pi y)}$$

و لذا:

$$I(y)=\left|\psi_1(y,t)+\psi_2(y,t)\right|^2=\frac{1}{\sqrt{16\pi}}\left|e^{-\frac{y^2}{32}}e^{i(\omega t-ay)}+e^{-\frac{y^2}{32}}e^{-i(\omega t-ay-\pi y)}\right|^2=\frac{1}{\sqrt{16\pi}}e^{-\frac{y^2}{16}}\left|1+e^{-i\pi y}\right|^2$$

$$=\frac{4e^{-\frac{y^2}{16}}\cos^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{4\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{16}}\cos^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

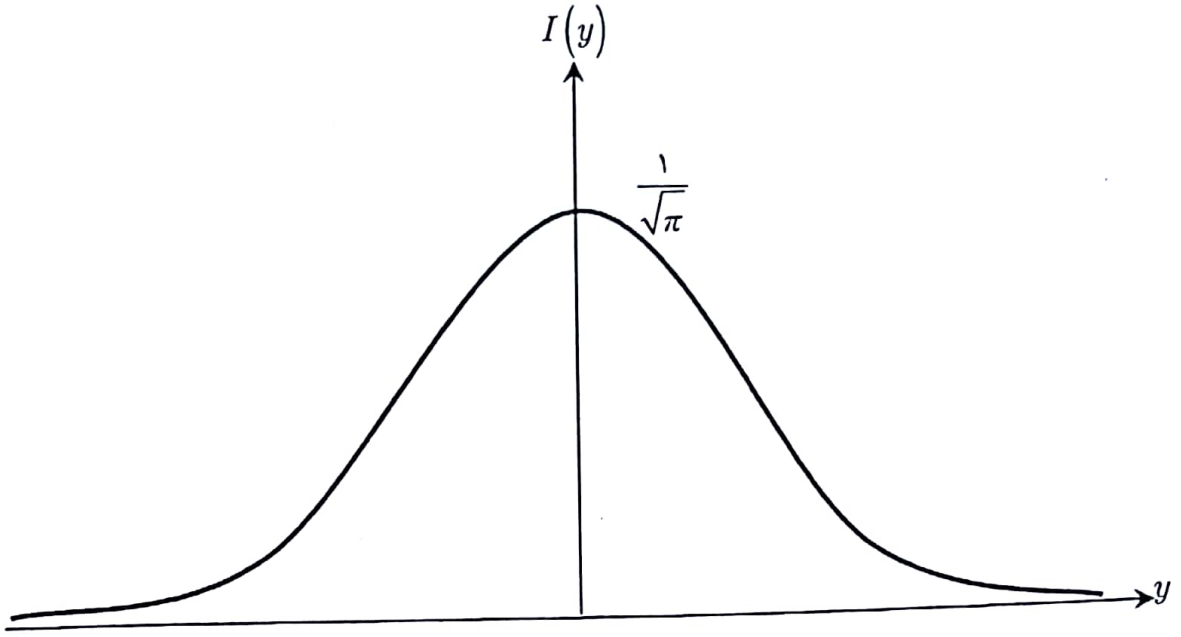


(ب)

در این‌حالت شدت از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$I(y)=\left|\psi_1(y,t)\right|^2+\left|\psi_2(y,t)\right|^2=\frac{e^{\frac{-y^2}{16}}}{\sqrt{16\pi}}+\frac{e^{-\frac{y^2}{16}}}{\sqrt{16\pi}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{\frac{-y^2}{16}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK



تمرین ۱-۳۶

سه تابع موج زیر را درنظر بگیرید:

$$\psi_1(y)=A_1e^{-y^2} \quad \text{و} \quad \psi_2(y)=A_2e^{-y^2/2} \quad \text{و} \quad \psi_3(y)=A_3\left(e^{-y^2}+ye^{-y^2/2}\right)$$

که در آن A_1، A_2 و A_3 ثابت‌های بهنجارش هستند.

(آ) A_1، A_2 و A_3 را طوری بیابید که ψ_1، ψ_2 و ψ_3 بهنجار باشند.

(ب) احتمال آن‌که هرکدام از حالت‌ها در بازه $-1<y<1$ باشند را پیدا کنید.

حل:

(آ)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_1|^2\,dy=|A_1|^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2y^2}dy=|A_1|^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

شرط بهنجارش آن است که: $\int|\psi|^2\,dy=1$؛ پس:

$$A_1=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$A_2=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\int|\psi_2|^2\,dy=|A_2|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-2y^2}+2ye^{-\frac{2}{2}y^2}+y^2e^{-y^2}\right)dy$$

قبل از محاسبه‌ی انتگرال فوق ذکر نکات زیر مفید است:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق نسبت به α مشتق می‌گیریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2} dy = -\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

پس با توجه به اینکه $\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{3}{2}y^2} dy = 0$، داریم:

$$\int |\psi_2|^2 dy = |A_2|^2 \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{(1)^3}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)|A_2|^2 = 1$$

پس:

$$A_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(ب)

$$P_1 = \int_{-1}^{+1} |\psi_1|^2 dy = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} e^{-2y^2} dy = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{1} e^{-2y^2} dy = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \times 0/5801 = 0/926$$

$$P_2 = \int_{-1}^{+1} |\psi_2|^2 dy = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} e^{-y^2} dy = 2\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{1} e^{-y^2} dy = 2\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \times 0/6978 = 0/787$$

$$P_3 = \int_{-1}^{+1} |\psi_2|^2 dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \left(e^{-2y^2} + y^2 e^{-y^2} + 2y e^{-\frac{3}{2}y^2}\right) dy$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)}\left[\int_{0}^{1} y^2 e^{-2y^2} dy + \int_{0}^{1} y^2 e^{-y^2} dy\right] = \frac{4}{\sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)}\left(0/1098 + 0/1857\right) = 0/276$$

تمرین ۱-۳۷

تبدیل فوریه $\phi(p)$ تابع زیر را پیدا کرده و آن‌را رسم کنید:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x|<1 \\ 0 & |x|\geq 1 \end{cases}$$

حل:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-i\frac{px}{\hbar}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-1}^{+1} \left(1-|x|\right) e^{-i\frac{px}{\hbar}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left[\int_{0}^{1} \cos\frac{px}{\hbar} dx - \int_{0}^{1} x\cos\frac{px}{\hbar} dx\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$= \frac{۲}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\left\{\frac{\hbar}{p}\left[\sin\frac{px}{\hbar}\right]_{۰}^{۱} - \frac{\hbar}{p}\left[x\sin\frac{px}{\hbar}\right]_{۰}^{۱} - \frac{\hbar^{۲}}{p^{۲}}\left[\cos\frac{px}{\hbar}\right]_{۰}^{۱}\right\}$$

$$= \frac{۲}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\frac{\hbar^{۲}}{p^{۲}}\left(۱-\cos\frac{p}{\hbar}\right) = \frac{۴\hbar^{۲}}{\sqrt{۲\pi\hbar}\,p^{۲}}\sin^{۲}\left(\frac{p}{۲\hbar}\right)$$

تمرین ۱-۳۸

(آ) تبدیل فوریه‌ی $\phi(k) = Ae^{-a|k|-ibk}$ را بیابید که در آن a و b اعداد حقیقی‌اند و a مثبت است.

(ب) A را طوری بیابید که $\psi(x)$ بهنجار باشد.

(پ) عدم قطعیت‌های x و k را محاسبه کنید و حاصل‌ضرب عدم قطعیت $\Delta x\Delta p$ را به دست آورید. آیا اصل عدم قطعیت هایزنبرگ برقرار است؟

حل:

(آ)

$$\phi(p) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)e^{-i\frac{px}{\hbar}}dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\int_{-۱}^{+۱}\left(۱-|x|\right)e^{-i\frac{px}{\hbar}}dx$$

$$\psi(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(k)e^{ikx}dk = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-a|k|-ibk}e^{ikx}dk$$

$$= \frac{A}{\sqrt{۲\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|k|}\left(\cos kx + i\sin kx\right)dk + \int_{-\infty}^{+\infty}e^{ik(x-b)}dk\right]$$

$$= \frac{A}{\sqrt{۲\pi}}\left[۲\int_{۰}^{+\infty}e^{-ak}\cos kx\,dk + ۲\pi\delta(x-b)\right]$$

$$= \frac{۲A}{\sqrt{۲\pi}}\left[\frac{۱}{۱+\frac{x^{۲}}{a^{۲}}}\right]\left\{-\frac{۱}{a}\left[\cos(kx)e^{-ak}\right]_{۰}^{+\infty} + \frac{x}{a^{۲}}\left[e^{-ak}\sin kx\right]_{۰}^{+\infty}\right\} + \pi\delta(x-b)$$

$$= \frac{۲A}{\sqrt{۲\pi}}\left[\frac{a}{x^{۲}+a^{۲}} + \pi\delta(x-b)\right]$$

(ب)

اگر $\psi(x)$ بهنجار باشد $\phi(k)$ نیز بهنجار خواهد بود و بالعکس. پس برای یافتن A کافیست که $\phi(k)$ را بهنجار کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(k)^{۲}dk = |A|^{۲}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-۲a|k|dk} = ۲|A|^{۲}\int_{۰}^{+\infty}e^{-۲ak}dk = \frac{-۲|A|^{۲}}{۲a}\left[e^{-۲ak}\right]_{۰}^{+\infty}$$

$$\int|\phi(k)|^{۲}dk = \frac{|A|^{۲}}{a} = ۱$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$A=\sqrt{a}$$

(پ)

برای محاسبه‌ی Δk، kهایی را که به‌ازای آنها، $|\phi(k)|^2$، $\frac{1}{e}$ مقدار ماکزیمم خود را دارد، می‌یابیم (این نقاط مطلوب را k_0 می‌نامیم):

$$|\phi(k_0)|^2=|A|^2e^{-2a|k_0|}=|A|^2e^{-1}$$

$$|k_0|=\frac{1}{2a}$$

$$k_0=\pm\frac{1}{2a}$$

$$\Delta k=k_0-k_0'=\frac{1}{a}$$

برای به‌دست آوردن Δx، از تعریف زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x=\sqrt{\left|\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2\right|}$$

$$\langle x^2\rangle=\int x^2|\psi(x)|^2dx$$

$$\langle x\rangle=\int x|\psi(x)|^2dx$$

$$\langle x^2\rangle=\frac{2a}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2a\pi\delta(x-b)x^2dx}{x^2+a^2}+\int_{-\infty}^{+\infty}\pi^2\delta^2(x-b)x^2dx\right]$$

$$=\frac{2a}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}+\frac{2a\pi b^2}{b^2+a^2}+\pi^2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2(x-b)x^2dx\right]$$

$$\langle x\rangle=\frac{2a}{\pi}\left(\frac{2a\pi b}{a^2+b^2}+\pi^2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2(x-b)x^2dx\right)$$

برای محاسبه‌ی انتگرال‌های $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2(x-b)x^2dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2(x-b)xdx$، تابع دلتای دیراک را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta(x-b)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon}, & b-\varepsilon<x<b+\varepsilon\\ 0, & \text{بقیه جاها}\end{cases}$$

که در اینجا ε مقدار مثبت بسیار کوچکی است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2(x-b)xdx=\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}\frac{xdx}{4\varepsilon^2}=\left(\frac{x^2}{8\varepsilon^2}\right)_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}=\frac{4b\varepsilon}{8\varepsilon^2}=\frac{b}{2\varepsilon}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{۲}(x-b)x^{۲}dx=\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}\frac{x^{۲}dx}{۲\varepsilon^{۲}}=\left(\frac{x^{۳}}{۶\varepsilon^{۲}}\right)_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}=\frac{۲\varepsilon^{۳}+۶\varepsilon b^{۲}}{۶\varepsilon^{۲}}=\frac{\varepsilon^{۲}+۳b^{۲}}{۳\varepsilon}$$

حال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{۲}dx}{\left(x^{۲}+a^{۲}\right)^{۲}}$ را حساب می‌کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{۲}dx}{\left(x^{۲}+a^{۲}\right)^{۲}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left[\left(x^{۲}+a^{۲}\right)-a^{۲}\right]dx}{\left(x^{۲}+a^{۲}\right)^{۲}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}+a^{۲}}-a^{۲}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^{۲}+a^{۲}\right)^{۲}}$$

$$=\frac{۱}{a}tg^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg]_{-\infty}^{+\infty}-a^{۲}I$$

که در آن

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx.}{\left(x^{۲}+a^{۲}\right)^{۲}}$$

برای یافتن این انتگرال از تغییر متغیر $x=a\,tg\theta$ استفاده می‌کنیم.

$$dx=a\left(۱+tg^{۲}\theta\right)d\theta$$

$$I=\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\frac{a\left(۱+tg^{۲}\theta\right)d\theta}{a^{۴}\left(۱+tg^{۲}\theta\right)^{۲}}=\int_{-\infty}^{+\infty}a^{-۳}\cos^{۲}\theta\,d\theta=\frac{a^{-۳}}{۲}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(۱+\cos۲\theta\right)d\theta=$$

$$=\frac{a^{-۳}}{۲}\left(\theta+\frac{۱}{۲}\sin^{۲}\theta\right)_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

$$I=\frac{a^{-۳}}{۲}\left(tg^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{۱}{۲}\frac{\frac{۲x}{a}}{۱+\frac{x^{۲}}{a^{۲}}}\right)_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{۲}dx}{\left(x^{۲}+a^{۲}\right)^{۲}}=\left[\frac{۱}{۲a}tg^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{x}{x^{۲}+a^{۲}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{۲a}$$

$$\left\langle x^{۲}\right\rangle-\left\langle x\right\rangle^{۲}=\frac{۲a}{\pi}\left[\frac{a^{۲}\pi}{۲a}+\frac{۲a\pi b^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}}+\frac{\pi^{۲}\left(\varepsilon^{۲}+۳b^{۲}\right)}{۳\varepsilon}\right]-\frac{۴a^{۲}}{\pi^{۲}}\left(\frac{۲a\pi b}{a^{۲}+b^{۲}}+\frac{\pi^{۲}b}{۲\varepsilon}\right)^{۲}$$

$$=\frac{۲a}{\pi}\left(\frac{a^{۲}\pi}{۲a}+\frac{۲a\pi b^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}}+\frac{\pi\left(\varepsilon^{۲}+۳b^{۲}\right)}{۳\varepsilon}\right)-\frac{۴a^{۲}}{\pi^{۲}}\left[\frac{۴a^{۲}\pi^{۲}b^{۲}}{\left(a^{۲}+b^{۲}\right)^{۲}}+\frac{\pi^{۴}b^{۲}}{۴\varepsilon^{۲}}+\frac{۴\pi^{۳}ab^{۲}}{\varepsilon\left(a^{۲}+b^{۲}\right)}\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$= a^2 + \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} + \frac{2a\pi\varepsilon^2 + 6\pi ab^2}{3\varepsilon} - \frac{16a^4b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2} - \frac{\pi^2a^2b^2}{\varepsilon^2} - \frac{16\pi^2a^2b^2}{\varepsilon\left(a^2+b^2\right)}$$

$$= \frac{3a^2\left(a^2+b^2\right)^2\varepsilon^2 + 12a^2b^2\left(a^2+b^2\right)\varepsilon^2 + \varepsilon\left(a^2+b^2\right)^2\left(2a\pi\varepsilon^2 + 6\pi ab^2\right)}{3\varepsilon^2\left(a^2+b^2\right)^2}$$

$$+ \frac{-48a^4b^2\varepsilon^2 - 3\left(a^2+b^2\right)^2a^2b^2\pi^2 - 48\pi^2a^2b^2\left(a^2+b^2\right)\varepsilon}{3\varepsilon^2\left(a^2+b^2\right)^2}$$

بنابراین $(\Delta x)^2 \to -\infty$؛ یعنی امکان تعریف Δx وجود ندارد و این به‌دلیل آنست که اصولاً $\psi(x)$ شرایط یک تابع موج فیزیکی را ندارد و در نقاط $x=b$، مقدار آن به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند. در ضمن باید تأکید کرد که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ تنها برای توابع موج واقعی صادق است.

تمرین ۱-۳۹

(آ) تبدیل فوریه‌ی $\psi(x)$ تابع

$$\phi(p) = \begin{cases} 0 & , \quad p < -p_0 \\ A & , \quad -p_0 < p < p_0 \\ 0 & , \quad p_0 < p \end{cases}$$

را بیابید که در آن A یک ثابت حقیقی است.

(ب) A را طوری بیابید که $\psi(x)$ بهنجار باشد و $\phi(p)$ و $\psi(x)$ را بیابید. (راهنمایی: انتگرال زیر ممکن است لازم باشد:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\left(\sin^2(ax)\right)\right)\Big/x^2 = \pi a$$

(پ) عدم قطعیت‌های Δx و Δp را تخمین بزنید و آنگاه ثابت کنید که $\Delta x\Delta p$ رابطه‌ی عدم قطعیت هایزنبرگ را برآورده می‌کند.

حل:

(آ)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ipx}{\hbar}}\phi(p)dp$$

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-p_0}^{p_0} e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp = \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\hbar}{ix}\left(e^{\frac{ip_0x}{\hbar}} - e^{-\frac{ip_0x}{\hbar}}\right)$$

$$\psi(x) = \frac{2A\hbar}{x\sqrt{2\pi\hbar}}\sin\left(\frac{p_0x}{\hbar}\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

(ب)

برای به‌دست آوردن A، از شرط بهنجارش استفاده می‌کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\psi(x)^{۲}\,dx\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\phi(P)\right|^{۲}dP=۱=\int_{-P_{۰}}^{P_{۰}}|A|^{۲}\,dp=|A|^{۲}\,۲P_{۰}$$

$$A=\frac{۱}{\sqrt{۲P_{۰}}}$$

(پ)

به نظر می‌رسد تعاریف ارائه شده برای Δx و ΔP به لحاظ ابعادی دارای اشکال است. تعاریف دقیق عبارتند از:

$$\Delta x=\sqrt{\left\langle x^{۲}\right\rangle-\langle x\rangle^{۲}}$$

$$\Delta P=\sqrt{\left\langle P^{۲}\right\rangle-\langle P\rangle^{۲}}$$

که در این روابط:

$$\left\langle x^{۲}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{۲}\left|\psi(x)\right|^{۲}dx=\frac{۴A^{۲}\hbar^{۲}}{۲\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^{۲}\frac{P_{۰}x}{\hbar}dx\to+\infty$$

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left|\psi(x)\right|^{۲}dx=۰$$

$$\left\langle P^{۲}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}P^{۲}\left|\phi(P)\right|^{۲}dP=\int_{-P_{۰}}^{P_{۰}}P^{۲}A^{۲}dp=\frac{۲A^{۲}}{۳}P_{۰}^{۳}$$

$$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}P\left|\phi(P)\right|^{۲}dP=۰$$

$$\Delta x\,\Delta P\to+\infty$$

پس اصل عدم قطعیت هایزنبرگ برقرار می‌باشد.

تمرین ۱-۴۰

طول عمر حالت برانگیخته‌ی یک اتم را که پهنای طبیعی آن $۳\times۱۰^{-۴}\,\mathrm{eV}$ است تخمین بزنید. ممکن است به مقدار $\hbar=۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\ \mathrm{J.s}=۴/۱۴\times۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{eV.s}$ نیاز داشته باشید.

حل:

$$\Delta E\,\Delta t\geq\frac{\hbar}{۲}$$

$$\Delta t\geq\frac{\hbar}{۲\Delta E}=\frac{۴/۱۴\times۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{eV.s}}{۲\times۳\times۱۰^{-۴}\,\mathrm{eV}}=۰/۶۹\times۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{s}$$

بنابراین طول عمر حالت برانگیخته‌ی اتم از مرتبه‌ای است که در بالا به‌دست آمده است.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

تمرین ۱-۴۱

پهنای طبیعی بسته‌ی موج متناظر با یک گلوله‌ی ۸۰ گرمی را پس از ۲۰s محاسبه کنید. اندازه‌ی گلوله ۲cm است.

حل:

$\Delta x(t)$ یعنی پهنای بسته موج در لحظه‌ی t از طریق رابطه‌ی زیر به پهنای بسته موج در لحظه‌ی صفر یعنی Δx_0 مربوط می‌شود:

$$\Delta x(t)=\Delta x_0\sqrt{1+\left(\frac{\delta x}{\Delta x_0}\right)^2}$$

در رابطه‌ی فوق داریم:

$$\frac{\delta x}{\Delta x_0}=\frac{2\hbar t}{ma^2}=\frac{\hbar t}{2m\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\hbar t}{2m(\Delta x_0)^2}$$

$$\Delta x(t=20\text{s})=2\text{cm}\sqrt{1+\left(\frac{6/626\times10^{-34}\times20}{2\times80\times10^{-3}\times\left(2\times10^{-2}\right)^2}\right)^2}\simeq2\text{cm}$$

تمرین ۱-۴۲

یک پیکان ۱۰۰ گرمی با سرعت 30ms^{-1} مسافت 50m را می‌پیماید. اگر اندازه‌ی اولیه‌ی بسته‌ی موج 5cm باشد، اندازه‌ی نهایی آن چه مقدار خواهد بود؟

حل:

$$t=\frac{l}{v}$$

$$\Delta x(t)=\Delta x_0\sqrt{1+\left(\frac{\hbar l}{2mv(\Delta x_0)^2}\right)^2}=5\text{cm}\sqrt{1+\left(\frac{6/626\times10^{-34}\times50}{2\times10^{-1}\times30\times\left(5\times10^{-2}\right)^2}\right)^2}\simeq5\text{cm}$$

تمرین ۱-۴۳

یک باریکه‌ی 50MeV از پروتون‌ها به فاصله‌ی ۱۰ کیلومتری شلیک می‌شود. اگر اندازه اولیه‌ی بسته‌ی موج $1/5\times10^{-6}\text{m}$ باشد، اندازه‌ی نهایی هنگام رسیدن چقدر خواهد بود؟

حل:

با توجه به مقدار انرژی جنبشی پروتون از روابط غیرنسبیتی استفاده می‌کنیم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

$$K=\frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

$$v=\left(\frac{۲K}{m}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$t=\frac{l}{v}=l\left(\frac{m}{۲K}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\left(\frac{\delta x}{\Delta x_{۰}}\right)^{۲}=\frac{\hbar^{۲}}{۴m^{۲}\left(\Delta x_{۰}\right)^{۴}}\frac{l^{۲}m}{۲K}=\frac{\hbar^{۲}l^{۲}}{۸mK\left(\Delta x_{۰}\right)^{۴}}=\frac{\left[\frac{۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}\times۱۰\times۱۰^{۳}}{\left(۱/۵\times۱۰^{-۶}\right)^{۲}}\right]\times\frac{۱}{۴\pi^{۲}}}{۸\times۱/۶۷۳\times۱۰^{-۲۷}\times۵۰\times۱۰^{۶}\times۱/۶۰۲\times۱۰^{-۱۹}}$$

$$\left(\frac{\delta x}{\Delta x_{۰}}\right)^{۲}=۰/۰۲۰۲۲۳۷$$

$$\Delta x=۱/۵\times۱۰^{-۶}\sqrt{۱/۰۲۰۲۲۳۷}\simeq۱/۵\times۱۰^{-۶}$$

تمرین ۱-۴۴

یک باریکه‌ی ۲۵۰ GeV به فاصله‌ی ۱ کیلومتری پرتاب می‌شود. اگر اندازه‌ی اولیه‌ی بسته موج ۱mm باشد، اندازه‌ی نهایی آن را پیدا کنید.

حل:

$$K=E-E_{۰}=E_{۰}\left(\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{v^{۲}}{c^{۲}}}}-۱\right)$$

$$v=c\sqrt{۱-\frac{۱}{\left(۱+\frac{K}{E_{۰}}\right)^{۲}}}=c\sqrt{۱-\frac{۱}{\left(۱+\frac{۲۵۰\times۱۰^{۳}\,\mathrm{MeV}}{۹۳۸/۲۷\,\mathrm{MeV}}\right)^{۲}}}=\sqrt{۰/۹۹۹۹۹۳}c$$

$$\left(\frac{\delta x}{\Delta x_{۰}}\right)^{۲}=\left[\frac{\hbar l}{۲m\left(\Delta x_{۰}\right)^{۲}}\right]^{۲}\frac{۱}{v^{۲}}=\left[\frac{۱/۰۵۵\times۱۰^{-۳۴}\times۱۰^{۳}}{۲\times۱/۶۷۳\times۱۰^{-۲۷}\times\left(۱۰^{-۳}\right)^{۲}}\right]^{۲}\times\frac{۱}{۰/۹۹۹۹۹۳\times\left(۳\times۱۰^{۸}\right)^{۲}}$$

$$\left(\frac{\delta x}{\Delta x_{۰}}\right)^{۲}=۰/۰۱۱۰۴۶۲\times۱۰^{-۱۲}$$

$$\Delta x\simeq\Delta x_{۰}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

تمرین ۱-۴۵

یک ریسمان غیرکششی با چگالی خطی μ (جرم در واحد طول) را درنظر بگیرید. اگر ریسمان تحت کشش T قرار بگیرد، بسامد زاویه‌ای امواج ریسمان بر حسب عدد موج k با $\omega = k\sqrt{T/\mu}$ داده می‌شود. سرعت‌های فاز و گروه را بیابید.

حل:

$$w = k\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$v_{ph} = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$v_g = \frac{dw}{dk} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

تمرین ۱-۴۶

بسامد زاویه‌ای یک موج درحال انتشار درون یک موجبر برحسب عدد موج k و پهنای b موجبر با $\omega = kc\left[1-\pi^2/\left(b^2k^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ داده می‌شود. سرعت‌های فاز و گروه موج را بیابید.

حل:

$$v_{ph} = \frac{w}{k} = c\left[1-\frac{\pi^2}{b^2k^2}\right]^{\frac{-1}{2}}$$

$$v_g = \frac{dw}{dk} = c\left[1-\frac{\pi^2}{b^2k^2}\right]^{\frac{-1}{2}} + kc\left[1-\frac{\pi^2}{b^2k^2}\right]^{\frac{-3}{2}}\left(\frac{\pi^2}{b^2k^3}\right) = v_{ph} + v_{ph}^3\left(\frac{2\pi^2c^2}{b^2k^2}\right)$$

تمرین ۱-۴۷

نشان دهید برای آن امواجی که بسامد زاویه‌ای ω و عدد موج k آن‌ها از رابطه پاشندگی $k^2c^2 = \omega^2 + \text{constant}$ پیروی می‌کند، حاصل ضرب سرعت‌های فاز و گروه برابر با $v_g v_{ph} = c^2$ است که در آن c سرعت نور است.

حل:

$$k^2c^2 = w^2 + ctc$$

$$v_{ph}^2 = \frac{w^2}{k^2} = c^2 - \frac{ctc}{k^2}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

تمرین ۱-۴۵

یک ریسمان غیرکششی با چگالی خطی μ (جرم در واحد طول) را درنظر بگیرید. اگر ریسمان تحت کشش T قرار بگیرد، بسامد زاویه‌ای امواج ریسمان بر حسب عدد موج k با $\omega = k\sqrt{T/\mu}$ داده می‌شود. سرعت‌های فاز و گروه را بیابید.

حل:

$$w = k\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$v_{ph} = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$v_g = \frac{dw}{dk} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

تمرین ۱-۴۶

بسامد زاویه‌ای یک موج درحال انتشار درون یک موجبر برحسب عدد موج k و پهنای b موجبر با $\omega = kc\left[1-\pi^2/\left(b^2k^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ داده می‌شود. سرعت‌های فاز و گروه موج را بیابید.

حل:

$$v_{ph} = \frac{w}{k} = c\left[1-\frac{\pi^2}{b^2k^2}\right]^{\frac{-1}{2}}$$

$$v_g = \frac{dw}{dk} = c\left[1-\frac{\pi^2}{b^2k^2}\right]^{\frac{-1}{2}} + kc\left[1-\frac{\pi^2}{b^2k^2}\right]^{\frac{-3}{2}}\left(\frac{\pi^2}{b^2k^3}\right) = v_{ph} + v_{ph}^3\left(\frac{2\pi^2c^{\frac{5}{2}}}{b^2k^3}\right)$$

تمرین ۱-۴۷

نشان دهید برای آن امواجی که بسامد زاویه‌ای ω و عدد موج k آن‌ها از رابطه پاشندگی $k^2c^2 = \omega^2 + \text{constant}$ پیروی می‌کند، حاصل ضرب سرعت‌های فاز و گروه برابر با $v_g v_{ph} = c^2$ است که در آن c سرعت نور است.

حل:

$$k^2c^2 = w^2 + cte$$

$$v_{ph}^2 = \frac{w^2}{k^2} = c^2 - \frac{cte}{k^2}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$v_{ph}=\sqrt{c^{۲}-\frac{cte}{k^{۲}}}$$

$$v_g=v_{ph}+k\frac{dv_{ph}}{dk}=v_{ph}+k\frac{\frac{۲cte}{k^{۳}}}{۲\sqrt{c^{۲}-\frac{cte}{k^{۲}}}}=v_{ph}+\frac{cte}{k^{۲}v_{ph}}=\frac{k^{۲}v_{ph}+cte}{k^{۲}v_{ph}}$$

پس:

$$v_g v_{ph}=v_{ph}\times\frac{k^{۲}\left(c^{۲}-\frac{cte}{k^{۲}}\right)+cte}{k^{۲}v_{ph}}=\frac{k^{۲}c^{۲}}{k^{۲}}=c^{۲}$$

تمرین ۱-۴۸

چقدر طول می‌کشد تا اندازه‌ی بسته موج یک جسم ۱۰گرمی، که در ابتدا در بازه‌ی 1mm محدود است،چهار برابر شود؟

حل:

$$\Delta x(t)=\Delta x_{۰}\sqrt{۱+\frac{\hbar^{۲}t^{۲}}{۴m^{۲}\left(\Delta x_{۰}\right)^{۴}}}$$

$$t=\frac{۲m\Delta x_{۰}^{۲}}{\hbar}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta x_{۰}}\right)^{۲}-۱}$$

$$t=\frac{۲\times۱۰\times۱۰^{-۳}\times\left(۱۰^{-۳}\right)^{۲}}{۱/۰۵۵\times۱۰^{-۳۴}}\sqrt{۴^{۲}-۱}=۷/۱\times۱۰^{۲۶}\,s\simeq۲۲۵\times۱۰^{۱۷}\ \text{سال}$$

تمرین ۱-۴۹

چقدر طول خواهد کشید تا یک بسته موج از پروتون‌های محدود در $۱۰^{-۱۵}\,m$ به اندازه‌ای برابر با فاصله‌ی بین زمین و خورشید رشد کند؟ این فاصله برابر با $۱/۵\times۱۰^{۸}\,km$ برابر است.

حل:

$$t=\frac{۲\times۱/۶۷۳\times۱۰^{-۲۷}\left(۱۰^{-۱۵}\right)^{۲}}{۱/۰۵۵\times۱۰^{-۳۴}}\sqrt{\left(\frac{۱/۵\times۱۰^{۸}\times۱۰^{۳}}{۱۰^{-۱۵}}\right)^{۲}-۱}$$

$$t=\frac{۲\times۱/۶۷۳\times۱/۵\left(۱۰^{-۱۵}\right)^{۲}}{۱/۰۵۵}\times۱۰^{۳}\,s\simeq۴۷۵۷s$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۱-۵۰

با فرض این‌که بسته‌ی موج نشان‌دهنده‌ی ماه به $1m$ محدود شود، چه مدت طول خواهد کشید تا اندازه‌ی آن به سه برابر اندازه‌ی [بسته] خورشید برسد؟ شعاع خورشید $۶/۹۶\times۱۰^{۵}km$ است.

حل:

$$t=\frac{۲\times۷۳/۶\times۱۰^{۲۲}\times۱}{۱/۰۵۵\times۱۰^{-۳۴}}\times۶\times۶/۹۶\times۱۰^{۵}\times۱۰^{۳}=۵/۸۳\times۱۰^{۶۴}\ s$$

اندازه‌ی بسته‌ی موج خورشید درواقع برابر با قطر آن منظور شده است.

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

فصل دوم

ابزارهای ریاضی مکانیک کوانتومی

Quark

تمرین ۲-۱

دو حالت $|\psi\rangle = i|\phi_1\rangle + 3i|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle$ و $|\chi\rangle = |\phi_1\rangle - i|\phi_2\rangle + 5i|\phi_3\rangle$ را درنظر بگیرید، که در آن $\langle\phi_1|, \langle\phi_2|$ و $\langle\phi_3|$ متعامد- بهنجار هستند.

(آ) $\langle\psi|\psi\rangle, \langle\chi|\chi\rangle, \langle\psi|\chi\rangle$ و $\langle\chi|\psi\rangle$ را محاسبه کنید و $\langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle$ را نتیجه بگیرید. آیا ضرب‌های نرده‌ای $\langle\psi|\chi\rangle, \langle\chi|\psi\rangle$ با هم برابرند؟

(ب) $|\psi\rangle\langle\chi|$ و $|\chi\rangle\langle\psi|$ را حساب کنید. آیا با هم برابرند؟ رد آن‌ها را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

(پ) مزدوج‌های هرمیتی $|\psi\rangle, |\chi\rangle$ ، $|\psi\rangle\langle\chi|$ و $|\chi\rangle\langle\psi|$ را بیابید.

حل:

(آ)

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left(-i\langle\phi_1| - 3i\langle\phi_2| - \langle\phi_3|\right)\left(i|\phi_1\rangle + 3i|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle\right) = -ii - 3i(3i) - (-1) = 1+9+1 = 11$$

$$\langle\chi|\chi\rangle = 1^2 + |-i|^2 + |5i|^2 = 1+1+25 = 27$$

$$\langle\psi|\chi\rangle = \left(-i\langle\phi_1| - 3i\langle\phi_2| - \langle\phi_3|\right)\left(|\phi_1\rangle - i|\phi_2\rangle + 5i|\phi_3\rangle\right) = -i\times 1 - 3i(-i) - 5i = -3 - 6i$$

$$\langle\chi|\psi\rangle = \left(\langle\phi_1| + i\langle\phi_2| - 5i\langle\phi_3|\right)\left(i|\phi_1\rangle + 3i|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle\right) = i + i(3i) - 5i(-1) = -3 + 6i$$

$$\langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle = \left[(-i+1)\langle\phi_1| - 2i\langle\phi_2| + (-1-5i)\langle\phi_3|\right]\left[(i+1)|\phi_1\rangle + 2i|\phi_2\rangle + (-1+5i)|\phi_3\rangle\right]$$

$$= (-i+1)(i+1) - 2i(2i) + (-1-5i)(-1+5i) = 35 - 15i$$

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

ملاحظه می‌شود که:

$$\langle\psi|\chi\rangle = \langle\chi|\psi\rangle^*$$

(ب)

$$|\psi\rangle\langle\chi| = \big(i|\phi_1\rangle + 3i|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle\big)\big(\langle\phi_1| + i\langle\phi_2| - 5i\langle\phi_3|\big) = i|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_1\rangle\langle\phi_2| + 5|\phi_1\rangle\langle\phi_3| + 3i|\phi_2\rangle\langle\phi_1| - 3|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + 15|\phi_2\rangle\langle\phi_3| - |\phi_3\rangle\langle\phi_1| - i|\phi_3\rangle\langle\phi_2| + 5i|\phi_3\rangle\langle\phi_3|$$

$$|\chi\rangle\langle\psi| = \big(|\phi_1\rangle - i|\phi_2\rangle + 5i|\phi_3\rangle\big)\big(-i\langle\phi_1| - 3i\langle\phi_2| - \langle\phi_3|\big) = -i|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - 3i|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_1\rangle\langle\phi_3| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1| - 3|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + i|\phi_2\rangle\langle\phi_3| + 5|\phi_3\rangle\langle\phi_1| + 15|\phi_3\rangle\langle\phi_2| - 5i|\phi_3\rangle\langle\phi_3|$$

ملاحظه می‌شود که:

$$|\psi\rangle\langle\chi| \neq |\chi\rangle\langle\psi|$$

$$Tr\big(|\psi\rangle\langle\chi|\big) = \sum_n \langle\phi_n|\psi\rangle\langle\chi|\phi_n\rangle = \langle\phi_1|\psi\rangle\langle\chi|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\psi\rangle\langle\chi|\phi_2\rangle + \langle\phi_3|\psi\rangle\langle\chi|\phi_3\rangle$$

برای ادامه‌ی کار از خاصیت راست هنجار بودن $\langle\phi_n|$ها استفاده می‌کنیم؛ یعنی:

$$\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{mn}$$

با توجه به این رابطه داریم:

$$Tr\big(|\psi\rangle\langle\chi|\big) = i\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle - 3\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle + 5i\langle\phi_3|\phi_3\rangle\langle\phi_3|\phi_3\rangle = -3 + 6i$$

$$Tr\big(|\chi\rangle\langle\psi|\big) = \langle\phi_1|\chi\rangle\langle\psi|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\chi\rangle\langle\psi|\phi_2\rangle + \langle\phi_3|\chi\rangle\langle\psi|\phi_3\rangle = -i\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle - 3\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle - 5i\langle\phi_3|\phi_3\rangle\langle\phi_3|\phi_3\rangle = -3 - 6i$$

(پ)

برای به‌دست آوردن مزدوج هرمیتی، کت‌ها را با براها و براها را با کت‌ها جایگزین می‌کنیم:

$$|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi| = -i\langle\phi_1| - 3i\langle\phi_2| - \langle\phi_3|$$

$$|\chi\rangle^\dagger = \langle\chi| = \langle\phi_1| + i\langle\phi_2| - 5i\langle\phi_3|$$

$$\big(|\psi\rangle\langle\chi|\big)^\dagger = |\chi\rangle\langle\psi| = -i|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - 3i|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_1\rangle\langle\phi_3| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1| - 3|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + i|\phi_2\rangle\langle\phi_3| + 5|\phi_3\rangle\langle\phi_1| + 15|\phi_3\rangle\langle\phi_2| - 5i|\phi_3\rangle\langle\phi_3|$$

$$\big(|\chi\rangle\langle\psi|\big)^\dagger = |\psi\rangle\langle\chi| = i|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_1\rangle\langle\phi_2| + 5|\phi_1\rangle\langle\phi_3| + 3i|\phi_2\rangle\langle\phi_1| - 3|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + 15|\phi_2\rangle\langle\phi_3| - |\phi_3\rangle\langle\phi_1| - i|\phi_3\rangle\langle\phi_2| + 5i|\phi_3\rangle\langle\phi_3|$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۲-۲

دو حالت $|\psi_1\rangle = |\phi_1\rangle + 4i|\phi_2\rangle + 5|\phi_3\rangle$ و $|\psi_2\rangle = b|\phi_1\rangle + 4|\phi_2\rangle + 3i|\phi_3\rangle$ را در نظر بگیرید که در آن $\langle\psi_1|$ و $\langle\psi_2|$ کت‌های متعامد - بهنجار هستند و b یک ثابت است. مقدار b را تعیین کنید.

حل:

شرط متعامد بودن $\langle\psi_1|$ و $\langle\psi_2|$ آن است که:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle = 0$$

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = b(1) + 4(-4i) - 3i(5) = b - 31i = 0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$b = 31i$$

تمرین ۲-۳

اگر $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ و $|\phi_3\rangle$ متعامد بهنجار باشند، نشان دهید که حالت‌های $|\psi\rangle = i|\phi_1\rangle + 3i|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle$ و $|\chi\rangle = |\phi_1\rangle - i|\phi_2\rangle + 5i|\phi_3\rangle$ موارد زیر را برآورد می‌کنند:

(آ) نامساوی مثلثاتی

(ب) نامساوی شوارتز

حل:

(آ)

$$|\psi + \chi\rangle = (i+1)|\phi_1\rangle + 2i|\phi_2\rangle + (-1+5i)|\phi_3\rangle$$

$$\langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle = |i+1|^2 + |2i|^2 + |-1+5i|^2 = \left(1^2+1^2\right) + 2^2 + \left((-1)^2+5^2\right) = 32$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = |i|^2 + |3i|^2 + |-1|^2 = 1+9+1 = 11$$

$$\langle\chi|\chi\rangle = |i|^2 + |-i|^2 + |5i|^2 = 1+1+25 = 27$$

$$\sqrt{\langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle} = \sqrt{32} \le \sqrt{11} + \sqrt{27} = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} + \sqrt{\langle\chi|\chi\rangle}$$

پس نامساوی مثلثی برقرار است.

(ب)

$$\langle\psi|\chi\rangle = \left(-i\langle\phi_1| - 3i\langle\phi_2| - \langle\phi_3|\right)\left(|\phi_1\rangle - i|\phi_2\rangle + 5i|\phi_3\rangle\right) = -(i)(1) + (-3i)(-i) + (-1)(5i)$$

$$= -3 - 8i$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$|\langle\psi|\chi\rangle|^2 = (-3)^2 + (-8)^2 = 73 < 11\times 27 = \langle\psi|\psi\rangle\langle\chi|\chi\rangle$$

بنابراین نامساوی شوارتز نیز برقرار است.

تمرین ۲-۴

ثابت α را طوری بیابید که حالت‌های $|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ و $|x\rangle = 3\alpha|\phi_1\rangle - 4|\phi_2\rangle$ متعامد باشند.
$|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ را متعامد - بهنجار در نظر بگیرید.

حل:

شرط تعامد آن است که:

$$\langle\chi|\psi\rangle = 0$$

حال باید مقدار α را طوری بیابیم که این الزام برقرار شود. پس:

$$\langle\chi|\psi\rangle = \left(3\alpha^*\langle\phi_1| - 4\langle\phi_2|\right)\left(\alpha|\phi_1\rangle + 5|\phi_2\rangle\right) = 3\alpha^*\alpha - 4\times 5 = 3|\alpha|^2 - 20 = 0$$

$$|\alpha|^2 = \frac{20}{3}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{i\delta} = 2\sqrt{\frac{5}{3}}\,e^{i\delta}$$

در اینجا δ هر مقدار حقیقی را می‌تواند داشته باشد و بنابراین α مقدار منحصر به‌فردی ندارد.

تمرین ۲-۵

اگر $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle$ و $|\chi\rangle = |\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle$ آنگاه روابط زیر را ثابت کنید (توجه کنید که $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ متعامد - بهنجار نیستند)

(آ) $\langle\psi|\psi\rangle + \langle\chi|\chi\rangle = 2\langle\phi_1|\phi_1\rangle + 2\langle\phi_2|\phi_2\rangle$

(ب) $\langle\psi|\psi\rangle - \langle\chi|\chi\rangle = 2\langle\phi_2|\phi_1\rangle + 2\langle\phi_1|\phi_2\rangle$

حل:

(آ)

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle + \langle\chi|\chi\rangle &= \left(\langle\phi_1| + \langle\phi_2|\right)\left(|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle\right) + \left(\langle\phi_1| - \langle\phi_2|\right)\left(|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle\right)\\ &= \langle\phi_1|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|\phi_2\rangle + \langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi_2\rangle + \langle\phi_1|\phi_1\rangle - \langle\phi_1|\phi_2\rangle - \langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi_2\rangle\\ &= 2\langle\phi_1|\phi_1\rangle + 2\langle\phi_2|\phi_2\rangle\end{aligned}$$

(ب)

$$\langle\psi|\psi\rangle - \langle\chi|\chi\rangle = \left(\langle\phi_1| + \langle\phi_2|\right)\left(|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle\right) - \left(\langle\phi_1| - \langle\phi_2|\right)\left(|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \langle\phi_1|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|\phi_2\rangle + \langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\phi_2\rangle - \langle\phi_1|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|\phi_2\rangle + \langle\phi_2|\phi_1\rangle - \langle\phi_2|\phi_2\rangle$$
$$= 2\langle\phi_1|\phi_2\rangle + 2\langle\phi_2|\phi_1\rangle$$

تمرین ۲-۶

حالتی را درنظر بگیرید که برحسب سه بردار متعامد - بهنجار $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ و $|\phi_3\rangle$ به‌صورت زیر است:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle$$

و در آن $|\phi_n\rangle$ها ویژه حالت‌های عملگر $\hat{B}$ هستند به‌طوری که: $\hat{B}_n|\psi_n\rangle = (3n^2-1)|\phi_n\rangle$ و

$n = 1, 2, 3, ..$

(آ) اندازه‌ی حالت $|\psi\rangle$ را بیابید.

(ب) مقدار انتظاری $\hat{B}$ را برای حالت $|\psi\rangle$ بیابید.

(پ) مقدار انتظاری $\hat{B}^2$ را برای حالت $|\psi\rangle$ بیابید.

حل:

(آ)

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1+5+3}{15} = \frac{9}{15}$$

(ب)

برای یافتن مقدار انتظاری عملگر $\hat{B}$ با استفاده از حالت $|\psi\rangle$، ابتدا اثر $\hat{B}$ را بر $|\psi\rangle$ می‌یابیم:

$$\hat{B}|\psi\rangle = \hat{B}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{15}}\hat{B}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{B}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{B}|\phi_3\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\left(3(1)^2-1\right)|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(3(2)^2-1\right)|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(3(3)^2-1\right)|\phi_3\rangle = \frac{2}{\sqrt{15}}|\phi_1\rangle + \frac{11}{\sqrt{3}}|\phi_2\rangle + \frac{26}{\sqrt{5}}|\phi_3\rangle$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$\langle\psi|B|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}\frac{2}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{11}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{26}{\sqrt{5}} = \frac{2}{15} + \frac{11}{3} + \frac{26}{5} = \frac{2+55+78}{15} = \frac{135}{15} = 9$$

و به دلیل اینکه $|\psi\rangle$ بهنجار نیست بنابراین:

$$\langle B\rangle_\psi = \frac{\langle\psi|B|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{9}{\frac{9}{15}} = 15$$

(پ)

$$\langle\psi|\hat{B}^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{B}\hat{B}|\psi\rangle$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

با فرض اینکه $|\phi\rangle = \hat{B}|\psi\rangle$، لذا:

$$\left\langle \psi \middle| \hat{B}^{۲} \middle| \psi \right\rangle = \langle \phi | \phi \rangle = \left(\frac{۲}{\sqrt{۱۵}}\right)^{۲} + \left(\frac{۱۱}{\sqrt{۳}}\right)^{۲} + \left(\frac{۲۶}{\sqrt{۵}}\right)^{۲} = \frac{۴}{۱۵} + \frac{۱۲۱}{۳} + \frac{۶۷۶}{۵} = \frac{۲۶۳۷}{۱۵}$$

$$\left\langle B^{۲} \right\rangle_{\psi} = \frac{\left\langle \psi \middle| \hat{B}^{۲} \middle| \psi \right\rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\frac{۲۶۳۷}{۱۵}}{\frac{۹}{۱۵}} = ۲۹۳$$

تمرین ۲-۷

آیا مجموعه‌های توابع زیر مستقل خطی‌اند یا وابسته‌ی خطی؟

(آ) $۵e^{x}, e^{x}, ۴e^{x}$

(ب) $۳\sin x, e^{ix}, \cos x$

(پ) $e^{-x}, ۹x^{۲}, x^{۲}, ۷$

حل:

(آ)

$$۴e^{x} = \left(۵e^{x}\right) - \left(e^{x}\right)$$

پس $۴e^{x}$، e^{x} و $۵e^{x}$ وابسته‌ی خطی هستند.

(ب)

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x = \cos x + \frac{i}{۳}\left(۳\sin x\right)$$

یعنی e^{ix}، $\cos x$ و $۳\sin x$ وابسته‌ی خطی هستند.

(پ)

ترکیب خطی دلخواهی از مجموعه توابع داده شده را در نظر گرفته و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$a_{۱}\left(۷\right) + a_{۲}\left(x^{۲}\right) + a_{۳}\left(۹x^{۴}\right) + a_{۴}\left(e^{-x}\right) = ۰$$

برای اینکه تساوی فوق همواره برقرار باشد لازم است که:

$$a_{۱} = a_{۲} = a_{۳} = a_{۴} = ۰$$

و این یعنی اینکه مجموعه توابع داده شده مستقل خطی هستند.

تمرین ۲-۸

مجموعه توابع زیر در جهت مثبت محور x مستقل خطی‌اند یا وابسته‌ی خطی؟

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ) $x,\ x+۲,\ x+۵$

(ب) $\cos x,\ \cos ۲x,\ \cos ۳x$

(پ) $\sin ۲x,\ \cos^۲ x,\ \sin^۲ x$

(ت) $x,\ (x-۱)^۲,\ (x+۱)^۲$

(ث) $۱,\ \cosh^۲ x, \sinh^۲ x$

حل:

(آ)

$$x=\frac{۵}{۳}(x+۲)-\frac{۲}{۳}(x+۵)$$

پس مجموعه‌ی داده شده وابسته‌ی خطی هستند.

(ب)

$$a\cos x+b\cos ۲x+c\cos ۳x=۰$$

با فرض اینکه رابطه‌ی فوق همواره و به‌ازای همه‌ی مقادیر مثبت x برقرار است؛ به x مقادیر ۰، $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۲}$ را می‌دهیم:

$$a+b+c=۰$$
$$a\frac{\sqrt{۲}}{۲}+b\times ۰-c\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰$$
$$a\times ۰+b\times(-۱)+c\times ۰=۰$$

از حل معادلات فوق نتیجه می‌شود که $a=b=c=۰$ و بنابراین مجموعه‌ی داده شده مستقل خطی است.

(پ)

$$a\sin^۲ x+b\cos^۲ x+c\sin ۲x=۰$$

با فرض اینکه رابطه‌ی فوق همواره و به‌ازای همه‌ی مقادیر مثبت x برقرار است؛ به x مقادیر ۰، $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۲}$ را می‌دهیم:

$$b=۰$$
$$\frac{۱}{۲}a+\frac{۱}{۲}b+c=۰$$
$$a=۰$$

پس $a=b=c=۰$ و لذا مجموعه‌ی داده شده مستقل خطی است.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ت)

$$\frac{۱}{۴}(x+۱)^۲ - \frac{۱}{۴}(x-۱)^۲ = x$$

یعنی مجموعه‌ی داده شده وابسته‌ی خطی است. زیرا x را برحسب $(x+۱)^۲$ و $(x-۱)^۲$ می‌توان بسط داد.

(ث)

$$\cos h^۲ x - \sin h^۲ x = ۱$$

پس این مجموعه نیز وابسته‌ی خطی هستند.

تمرین ۲-۹

مجموعه بردارهای زیر در فضای مختلط به‌طور خطی، مستقل‌اند یا وابسته؟

(آ) $(۲i, i, -i)$, $(۰,۰,۱)$, $(۲,-۳,۰)$

(ب) $(۲,۰,۱),(i,-۳i,i),(۰,۴,۰)$

(پ) $(-i,۳i,۵i),(۳,i,-۱),(i,۱,۲)$

حل:

(آ)

$$a(۲,-۳,۰) + b(۰,۰,۱) + c(۲i, i, -i) = ۰$$

$$(۲a + ۲ic, -۳a + ic, b - ic) = (۰,۰,۰)$$

رابطه‌ی اخیر در صورتی برقرار است که:

$$۲a + ۲ic = ۰$$

$$-۳a + ic = ۰$$

$$b - ic = ۰$$

از حل این معادلات نتیجه می‌شود که:

$$a = b = c = ۰$$

پس مجموعه بردارهای داده شده مستقل خطی هستند.

(ب)

$$a(۰,۴,۰) + b(i,-۳i,i) + c(۲,۰,۱) = ۰$$

$$(ib + ۲c, ۴a - ۳ib, ib + c) = (۰,۰,۰)$$

رابطه‌ی اخیر در صورتی برقرار خواهد شد که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$a=b=c=۰$

پس مجموعه داده شده مستقل خطی هستند.

(پ)

$$a(i,۱,۲)+b(۲,i,-۱)+c(-i,۲i,۵i)=۰$$

$$ia+۲b-ic=۰$$

$$a+ib+۲ic=۰$$

$$۲a-b+۵ic=۰$$

چون $a=b=c=۰$ پس مجموعه بردارهای داده شده مستقل خطی هستند.

تمرین ۲-۱۰

مجموعه بردارهای زیر (درفضای اقلیدسی سه‌بعدی) مستقل خطی‌اند یا وابسته‌ی خطی؟

(آ) $((۷,۸,۹),(۱,۲,۳),(۴,۵,۶))$

(ب) $(۰,۰,\sqrt{۷}),(۰,-۵,۰),(۱,۰,۰))$

(پ) $(۰,۶,-۱),(۲,۰,-۲),(۵,۴,۱))$

حل:

(آ)

$$a(۴\vec{i}+۵\vec{j}+۶\vec{k})+b(\vec{i}+۲\vec{j}+۳\vec{k})+c(۷\vec{i}+۸\vec{j}+۹\vec{k})=۰$$

$$(۴a+b+۷c)\hat{i}+(۵a+۲b+۸c)\vec{j}+(۶a+۳b+۹c)\vec{k}=۰$$

در نتیجه:

$$۴a+b+۷c=۰$$

$$۵a+۲b+۸c=۰$$

$$۶a+۳b+۹c=۰$$

از حل این معادلات نتیجه می‌شود که:

$$\frac{-a}{۲}=b=c$$

به‌ازای همه‌ی مقادیر، c جوابی برای دستگاه معادلات اخیر می‌باشد و بنابراین مجموعه بردارهای داده شده وابسته‌ی خطی هستند. برای نمونه می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲}\left[(۱,۲,۳)+(۷,۸,۹)\right]=(۴,۵,۶)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$a\left(\vec{i}\right)+b\left(-۵\vec{j}\right)+c\left(\sqrt{۷}\vec{k}\right)=۰$$

$$a=۰$$

$$-۵b=۰$$

$$c\sqrt{۷}=۰$$

در نتیجه چون $a=b=c=۰$ لذا مجموعه بردارهای داده شده مستقل خطی هستند.

(پ)

$$a\left(۵\vec{i}+۴\vec{j}+\vec{k}\right)+b\left(۲\vec{i}-۲\vec{k}\right)+c\left(۶\vec{j}-\vec{k}\right)=۰$$

$$۵a+۲b=۰$$

$$۴a+۶c=۰$$

$$a-۲b-c=۰$$

چون $a=b=c=۰$ پس مجموعه بردارهای داده شده مستقل خطی هستند.

تمرین ۲-۱۱

نشان دهید که اگر $\hat{A}$ یک عملگر تصویری باشد، $۱-\hat{A}$ نیز یک عملگر تصویری است.

حل:

عملگر $\hat{P}$ را یک عملگر تصویر گویند هرگاه هرمیتی باشد و $\hat{P}^۲=\hat{P}$.

$$\left(۱-\hat{A}\right)^{\dagger}=۱-A^{\dagger}=۱-A$$

پس $\left(۱-\hat{A}\right)$ هرمیتی است. از طرفی:

$$\left(۱-\hat{A}\right)\left(۱-\hat{A}\right)=۱-۲\hat{A}+\hat{A}^۲$$

اما چون $\hat{A}$ خود یک عملگر تصویری است، پس:

$$\hat{A}^۲=\hat{A}$$

و بنابراین:

$$\left(۱-\hat{A}\right)\left(۱-\hat{A}\right)=۱-۲\hat{A}+\hat{A}=۱-\hat{A}$$

بنابراین $۱-\hat{A}$ یک عملگر تصویری است.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۲-۱۲

نشان دهید $|\psi\rangle\langle\psi|/\langle\psi|\psi\rangle$ بدون توجه به اینکه $|\psi\rangle$ بهنجار باشد یا نه، یک عملگر تصویری است.

حل:

$$A=\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

$$A^{\dagger}=\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}=A$$

$$A^{2}=\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}=\frac{|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi|}{\left(\langle\psi|\psi\rangle\right)^{2}}=\frac{\langle\psi|\psi\rangle}{\left(\langle\psi|\psi\rangle\right)^{2}}|\psi\rangle\langle\psi|=\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}=A$$

بنابراین A هم هرمیتی است و هم مربع آن با خودش برابر است و لذا یک عملگر تصویر می‌باشد.

تمرین ۲-۱۳

در عبارت‌های زیر که $\hat{A}$ یک عملگر است، طبیعت هر عبارت را مشخص کنید (یعنی مشخص کنید که این عملگرها برا، یا کت هستند)؛ سپس مزدوج هرمیتی آنها را بیابید.

(آ) $\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|$

(ب) $\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|$

(پ) $\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle|\psi\rangle\langle\phi|\hat{A}$

(ب) $\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle|\phi\rangle+i\hat{A}|\psi\rangle$

(ث) $\langle\phi|\langle\phi|\hat{A}-i(\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|$

حل:

(آ)

$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle$ یک اسکالر است و $|\psi\rangle$ یک برا است و چون حاصل‌ضرب یک اسکالر در یک برا، یک برا می‌شود پس $|\psi\rangle\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle$ یک برا است و مزدوج هرمیتی: $\langle\psi|A^{\dagger}|\phi\rangle|\psi\rangle$

(ب)

$$\hat{A}|\psi\rangle\langle\phi|=\hat{A}\hat{B}$$

در اینجا $\hat{B}=|\psi\rangle\langle\phi|$ و چون $\hat{A}\hat{B}$ یک عملگر است پس $\hat{A}|\psi\rangle\langle\phi|$ نیز یک عملگر می‌باشد و مزدوج هرمیتی آن $|\phi\rangle\langle\psi|A^{\dagger}$ است.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$\langle\phi|A|\psi\rangle|\psi\rangle\langle\phi|\hat{A} = c\hat{B}\hat{A} = c\hat{C} = \hat{D}$$

در اینجا $c = \langle\phi|A|\psi\rangle$ یک اسکالر است و $\hat{B} = |\psi\rangle\langle\phi|$ یک عملگر می‌باشد. درنتیجه $\hat{C} = \hat{B}\hat{A}$ یک عملگر است و لذا $A|\phi\rangle\langle\phi|A|\psi\rangle|\psi\rangle = \hat{D}$ نیز یک عملگر خواهد بود.

$$D^\dagger = A^\dagger\langle\phi|\langle\psi|\langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle$$

(ت)

$$\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle|\phi\rangle + i\hat{A}|\psi\rangle\langle\phi|\langle\phi|A^\dagger|\psi\rangle - i\langle\psi|A^\dagger$$

$\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle$ یک اسکالر است. پس $\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle|\phi\rangle$ یک کت است و چون $i\hat{A}|\psi\rangle$ نیز یک کت می‌باشد پس در کل، این عبارت یک کت خواهد بود.

(ث)

$$|\phi\rangle\langle\phi|\hat{A} - i\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi| = \text{عملگر} - \text{عملگر} = \text{عملگر}$$

مزدوج هرمیتی : $A^\dagger|\phi\rangle\langle\phi| + i|\psi\rangle\langle\psi|A^\dagger$

تمرین ۲-۱۴

یک فضای دوبعدی را در نظر بگیرید که در آن عملگر هرمیتی $\hat{A}$ با $\hat{A}|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle$ و $\hat{A}|\phi_2\rangle = -|\phi_2\rangle$ تعریف می‌شود، و $\langle\phi_1|$ و $\langle\phi_2|$ متعامد - بهنجارند.

(آ) آیا حالت‌های $\langle\phi_1|$ و $\langle\phi_2|$ یک پایه تشکیل می‌دهند؟

(ب) عملگر $\hat{B} = |\phi_1\rangle\langle\phi_2|$ را درنظر بگیرید. آیا $\hat{B}$ هرمیتی است؟ نشان دهید که $\hat{B}^2 = 0$ است.

(پ) نشان دهید که حاصل‌ضرب‌های $\hat{B}\hat{B}^\dagger$ و $\hat{B}^\dagger\hat{B}$ عملگرهای تصویری هستند.

(ت) نشان دهید که عملگر $\hat{B}\hat{B}^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{B}$ یکانی است.

(ث) $\hat{C} = \hat{B}\hat{B}^\dagger + \hat{B}^\dagger\hat{B}$ را درنظر بگیرید. نشان دهید که $\hat{C}|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle$ و $\hat{C}|\phi_2\rangle = |\phi_2\rangle$.

حل:

(آ)

$|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ تشکیل یک پایه می‌دهند زیرا ویژه حالت‌های یک عملگر هرمیتی هستند و طبق قضیه، ویژه حالت‌های یک عملگر هرمیتی تشکیل یک پایه را می‌دهند.

(ب)

$$\hat{B} = |\phi_1\rangle\langle\phi_2| = \begin{pmatrix} \langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_1\rangle & \langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle \\ \langle\phi_2|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_1\rangle & \langle\phi_2|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{B}^\dagger = \left(\hat{B}^T\right)^* = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ ۱ & \cdot \end{bmatrix} \neq \hat{B}$$

پس $\hat{B}$ هرمیتی نیست.

$$B^۲ = |\phi_۱\rangle\langle\phi_۲|\phi_۱\rangle\langle\phi_۲| = \cdot$$

(پ)

$$BB^\dagger = |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|\phi_۲\rangle\langle\phi_۲| = |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|$$

$$\left(BB^\dagger\right)^۲ = BB^\dagger BB^\dagger = |\phi_۱\rangle\langle\phi_۱|\phi_۱\rangle\langle\phi_۱| = |\phi_۱\rangle\langle\phi_۱| = BB^\dagger$$

پس چون $BB^\dagger$ هرمیتی است و $\left(BB^\dagger\right)^۲ = BB^\dagger$ بنابراین $BB^\dagger$ یک عملگر تصویر است.

$$B^\dagger B = |\phi_۲\rangle\langle\phi_۱|\phi_۱\rangle\langle\phi_۲| = |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|$$

پس به همین ترتیب $B^\dagger B$ نیز یک عملگر تصویر است.

(ت)

$$\hat{D} \equiv BB^\dagger - B^\dagger B = |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲| - |\phi_۱\rangle\langle\phi_۱|$$

$$D^\dagger = |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲| - |\phi_۱\rangle\langle\phi_۲|$$

$$DD^\dagger = |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|\phi_۲\rangle\langle\phi_۲| - |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|\phi_۱\rangle\langle\phi_۲| - |\phi_۱\rangle\langle\phi_۲|\phi_۲\rangle\langle\phi_۲| + |\phi_۱\rangle\langle\phi_۲|\phi_۱\rangle\langle\phi_۲|$$

$$= |\phi_۱\rangle\langle\phi_۱| + |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲| = I$$

پس: $\hat{D} = BB^\dagger - B^\dagger B$ یک عملگر یکانی است.

(ث)

$$\hat{C}|\phi_۱\rangle = \left(|\phi_۱\rangle\langle\phi_۱| + |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|\right)|\phi_۱\rangle = |\phi_۱\rangle\langle\phi_۱|\phi_۱\rangle + |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|\phi_۱\rangle = |\phi_۱\rangle$$

و به همین ترتیب برای $\phi_۲$.

تمرین ۲-۱۵

دو رابطه‌ی زیر را ثابت کنید:

(آ) $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\left[\hat{A},\hat{B}\right]/۲}$

(ب) $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{۱}{۲!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \frac{۱}{۳!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]\right] + \ldots.$

راهنمایی: برای اثبات رابطه‌ی اول، می‌توان تابع عملگری $\hat{F}(t) = e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t}$ را تعریف کرد که درآن t یک متغیر و $\hat{A}$ و $\hat{B}$ عملگرهایی مستقل از t هستند، و سپس از $\left[\hat{A},G(\hat{B})\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right]dG\left(\hat{B}\right)/d\hat{B}$ استفاده نمود که درآن $G(\hat{B})$ تابعی از عملگر $\hat{B}$ است.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

(آ)

با درنظر گرفتن $T(\varepsilon):=e^{\varepsilon A}e^{\varepsilon B}$ و با مشتق گرفتن نسبت به ε داریم:

$$\frac{dT}{d\varepsilon}=Ae^{\varepsilon A}e^{\varepsilon B}+e^{\varepsilon A}Be^{\varepsilon B}$$
$$=\left(A+e^{\varepsilon A}Be^{-\varepsilon A}\right)T(\varepsilon)$$

می‌دانیم:

$$[[A,B],A]=0 \quad , \quad [[A,B],B]=0$$

درنتیجه:

$$e^{\varepsilon A}Be^{-\varepsilon A}=B-[B,A]\varepsilon$$

بنابراین:

$$\frac{dT}{d\varepsilon}=(A+B+[A,B]\varepsilon)T(\varepsilon) \qquad (۱)$$

با توجه به شرط $T(\varepsilon=0)=1$ و به علت اینکه عملگرهای $A+B$ و جابجاگر $[A,B]$ جابجا می‌شوند، می‌توان از معادله‌ی (۱) انتگرال گرفت که نتیجه می‌دهد:

$$T(\varepsilon)=e^{\varepsilon(A+B)}e^{\frac{1}{2}\varepsilon^2[A,B]}$$

با جایگذاری $\varepsilon=1$ رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}=e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

(ب) با درنظر گرفتن:

$$f(\varepsilon)=e^{\varepsilon A}Be^{-\varepsilon A}$$

و با مشتق گرفتن نسبت به ε می‌توان نوشت:

$$\frac{df}{d\varepsilon}=Ae^{\varepsilon A}Be^{-\varepsilon A}-e^{\varepsilon A}Be^{-\varepsilon A}A$$
$$=[A,f(\varepsilon)]$$
$$\frac{d^2f}{d\varepsilon^2}=\left[A,\frac{df}{d\varepsilon}\right]=[A,[A,f(\varepsilon)]]$$

با نوشتن بسط تیلور

$$f(\varepsilon)=f(0)+\frac{1}{1!}\frac{df(0)}{d\varepsilon}+\frac{1}{2}\frac{d^2f(0)}{d\varepsilon^2}+\cdots$$

و جایگذاری روابط به‌دست آمده به‌جای مشتق‌ها می‌توان نوشت:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$e^{\hat{A}}Be^{-\hat{A}} = B+[A,B]+\frac{۱}{۲!}[A,[A,B]]+\frac{۱}{۳!}[A,[A,[A,B]]]+\cdots$$

تمرین ۲-۱۶

(آ) ثابت کنید که ماتریس زیر، یکه است

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

(ب) ویژه مقادیر و ویژه بردارهای متناظر آن را بیابید.

حل:

(آ)

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$A^{\dagger}=\left(A^{T}\right)^{*}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$AA^{\dagger}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^{۲}\theta+\sin^{۲}\theta & -\cos\theta\sin\theta+\cos\theta\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\theta+\cos\theta\sin\theta & \sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}=I$$

پس A یونیتاری (یکانی) است.

(ب)

معادله‌ی ویژه مقداری عبارتست از:

$$A|a\rangle = a|a\rangle$$
$$(A-aI)|a\rangle = ۰$$

برای اینکه $|a\rangle$ غیر صفر باشد لازم است که:

$$\det(A-aI)=۰$$

پس:

$$\begin{vmatrix}\cos\theta-a & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta-a\end{vmatrix}=(\cos\theta-a)^{۲}+\sin^{۲}\theta=\cos^{۲}\theta-۲a\cos\theta+a^{۲}+\sin^{۲}\theta$$

$$=a^{۲}-۲a\cos\theta+۱=۰$$

از حل این معادله نتیجه می‌شود که:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$a = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

برای به‌دست آوردن ویژه بردارها، هر دو مقدار به‌دست آمده‌ی a را در معادله‌ی ویژه مقداری قرار می‌دهیم.

با انتخاب: $a_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ و $a_2 = \cos\theta - i\sin\theta$، داریم:

$$A|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \big(\cos\theta + i\sin\theta\big)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$x\cos\theta + y\sin\theta = x\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$$

$$y = ix$$

از آنجا که می‌خواهیم $|a_1\rangle$ بهنجار باشد؛ پس:

$$\langle a_1|a_1\rangle = 0$$

$$|x|^2 + |y|^2 = 1$$

$$|x|^2 + |x|^2 = 1$$

$$|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

در اینجا فرض کرده‌ایم که x مقداری حقیقی و مثبت باشد پس:

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

به همین ترتیب می‌توان $|a_2\rangle$ را نیز به دست آورد. نتیجه عبارتست از:

$$|a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

تمرین ۲-۱۷

سه ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

(آ) جابه‌جاگرهای $[A,B]$, $[B,C]$ و $[C,A]$ را محاسبه کنید.

(ب) نشان دهید که $A^2 + B^2 + 2C^2 = 4I$ است که در آن $\boldsymbol{I}$ ماتریس یکه است.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ) ثابت کنید $\mathrm{Tr}(ABC)=\mathrm{Tr}(BCA)=\mathrm{Tr}(CAB)$

حل:

(آ)

با توجه به تعریف کلی:

$$\left[\hat{X},\hat{Y}\right]=\hat{X}\hat{Y}-\hat{Y}\hat{X}$$

داریم:

$$\left[A,B\right]=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0&-i\\0&0&0\\i&0&-i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}+i&0&+i\\0&0&0\\-i&0&-i\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2i&0&0\\0&0&0\\0&0&-2i\end{pmatrix}$$

$$\left[B,C\right]=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\i&0&i\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&+i&0\\0&0&0\\0&+i&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&i&0\\i&0&i\\0&i&0\end{pmatrix}$$

$$\left[C,A\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&+1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

(ب)

$$A^2+B^2+2C^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$=\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{pmatrix}=۴\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{pmatrix}=۴I$$

(پ)

$$ABC=\begin{pmatrix}i & ۰ & -i\\ ۰ & ۰ & ۰\\ i & ۰ & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & ۰ & i\\ ۰ & ۰ & ۰\\ i & ۰ & i\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(ABC)=(ABC)_{۱۱}+(ABC)_{۲۲}+(ABC)_{۳۳}=i+۰+i=۲i$$

$$BCA=\begin{pmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ i & ۰ & i\\ ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲i & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(BCA)=(CAB)_{۱۱}+(CAB)_{۲۲}+(CAB)_{۳۳}=i+۰+i=۲i$$

$$CAB=\begin{pmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰ & -i & ۰\\ i & ۰ & -i\\ ۰ & i & ۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & ۰ & -i\\ ۰ & ۰ & ۰\\ -i & ۰ & i\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(CAB)=(CAB)_{۱۱}+(CAB)_{۲۲}+(CAB)_{۳۳}=i+۰+i=۲i$$

پس:

$$\mathrm{Tr}(ABC)=\mathrm{Tr}(BCA)=\mathrm{Tr}(CAB)=۲i$$

تمرین ۲-۱۸

دو ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{pmatrix}۳ & i & ۱\\ -۱ & -i & ۲\\ ۴ & ۳i & ۱\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}۲i & ۵ & -۳\\ -i & ۳ & ۰\\ ۷i & ۱ & i\end{pmatrix}$$

روابط زیر را ثابت کنید:

(آ) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

(ب) $\det(A^T)=\det(A)$

(پ) $\det(A^\dagger)=(\det(A))^*$

(ت) $\det(A^*)=(\det(A))^*$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

با توجه به اینکه:

$$AB=\begin{pmatrix}۳ & i & ۱\\ -۱ & -i & ۲\\ ۴ & ۳i & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۲i & ۵ & -۳\\ -i & ۳ & ۰\\ ۷i & ۱ & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱۳i+۱ & ۱۶+۳i & -۹+i\\ ۱۲i-۱ & -۳-۳i & ۳+۲i\\ ۱۵i+۳ & ۲۱+۹i & -۱۲+i\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}۳ & -۱ & ۴\\ i & -i & ۳i\\ ۱ & ۲ & ۱\end{pmatrix},\ A^\dagger=\left(A^T\right)^*=\begin{pmatrix}۳ & -۱ & ۴\\ -i & i & -۳i\\ ۱ & ۲ & ۱\end{pmatrix}$$

خواننده می‌تواند به‌راحتی با محاسباتی سرراست درستی روابط خواسته شده را تحقیق کند.

تمرین ۲-۱۹

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{pmatrix}۰ & i\\ -i & ۰\end{pmatrix}$$

(آ) ویژه مقادیر و ویژه بردارهای بهنجار ماتریس A را به‌دست آورید.

(ب) آیا این ویژه مقادیر تشکیل یک پایه می‌دهند (یعنی آیا این پایه، کامل و متعامد - بهنجار است)؟

(پ) ماتریس U را در نظر بگیرید که از ویژه بردارهای بهنجار A تشکیل شده است.ثابت کنید که U یکانی است و رابطه‌ی زیر را برآورده می‌کند:

$$U^\dagger A\,U=\begin{pmatrix}\lambda_۱ & ۰\\ ۰ & \lambda_۲\end{pmatrix}$$

که درآن $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ ویژه مقادیر A هستند.

(ت) نشان دهید که $e^{xA}=\cosh x+A\sinh x$ است.

حل:

(آ)

$$a_۱+a_۲=\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\right)=۰$$

$$a_۱a_۲=\det\left(\hat{A}\right)=-۱$$

بس $a_۱=۱$ و $a_۲=-۱$

$$\left|a_۱\right\rangle=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} ۰ & i \\ -i & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x = iy$$

$$|a_۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} i \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$|a_۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ i \end{pmatrix}$$

(ب)

چون $\hat{A}$ هرمیتی است ویژه بردارهای بهنجار آن تشکیل یک پایه را می‌دهند و تحقیق این امر با توجه به حل مسائل بسیار مشابه ساده است.

(پ)

$$U = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} i & ۱ \\ ۱ & i \end{pmatrix}$$

$$UU^\dagger = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} i & ۱ \\ ۱ & i \end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} -i & ۱ \\ ۱ & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

پس U یکانی است.

$$U^\dagger AU = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} -i & ۱ \\ ۱ & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & +i \\ -i & ۰ \end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} i & ۱ \\ ۱ & i \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} -i & ۱ \\ -۱ & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & ۱ \\ ۱ & i \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

(ت)

مشابه با قسمت (ت) تمرین ۲-۳۵ ثابت می‌شود.

تمرین ۲-۳۰

با استفاده از جبر برا ـ کت نشان دهید که $\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \mathrm{Tr}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A})$ که $\hat{B}, \hat{A}$ و $\hat{C}$ عملگر هستند.

حل:

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right) = \sum_n \langle\phi_n|\hat{A}\hat{B}\hat{C}|\phi_n\rangle$$

چون $\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = I$؛ پس:

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right) = \sum_{nml}\langle\phi_n|\hat{A}|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\hat{B}|\phi_l\rangle\langle\phi_l|\hat{C}|\phi_n\rangle = \sum_{nml}\langle\phi_l|\hat{C}|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\hat{A}|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\hat{B}|\phi_l\rangle$$

$$= \sum_l \langle\phi_l|\hat{C}\hat{A}\hat{B}|\phi_l\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{C}\hat{A}\hat{B}\right) = \sum_{nml}\langle\phi_m|\hat{B}|\phi_l\rangle\langle\phi_l|\hat{C}|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\hat{A}|\phi_m\rangle$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \sum_m \langle \phi_m | \hat{B}\hat{C}\hat{A} | \phi_m \rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{B}\hat{C}\hat{A}\right)$$

تمرین ۲-۲۱

برای هر دو کت مانند $\langle\psi|$ و $\langle\phi|$ که بهنجار متناهی دارند، نشان دهید که $\mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\phi|) = \langle\phi|\psi\rangle$.

حل:

$$\mathrm{Tr}|\psi\rangle\langle\phi| = \sum_m \langle\phi_m|\psi\rangle\langle\phi|\phi_m\rangle = \sum_m \langle\phi|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$$

تمرین ۲-۲۲

ماتریس زیر را درنظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱+i \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ -۱-i & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

(آ) ویژه مقادیر و ویژه بردارهای بهنجار A را محاسبه کنید. ویژه برداری A را با $|a_۱\rangle$، $|a_۲\rangle$ و $|a_۳\rangle$ نشان دهید. آیا ویژه مقادیر تبهگن داریم؟

(ب) نشان دهید ویژه بردارهای $|a_۱\rangle$، $|a_۲\rangle$ و $|a_۳\rangle$ تشکیل پایه‌ای کامل و متعامد – بهنجار می‌دهند یعنی $\sum_{j=۱}^{۳} |a_j\rangle\langle a_j| = I$ که در آن I ماتریس واحد ۳×۳ است و $\langle a_j | a_k \rangle = \delta_{jk}$.

(پ) ماتریس متناظر با عملگر به دست آمده از ضرب کت – برا مربوط به اولین ویژه بردار یعنی $P = |a_۱\rangle\langle a_۱|$ را پیدا کنید. آیا P عملگری تصویری است؟

حل:

(آ)

معادله‌ی ویژه مقداری عبارتست از:

$$A|a\rangle = a|a\rangle$$

به‌جهت غیر صفر بودن $|a\rangle$ این معادله تبدیل می‌شود به:

$$\det\left(\hat{A} - a\hat{I}\right) = ۰$$

یعنی:

$$\begin{vmatrix} -a & ۰ & -۱+i \\ ۰ & ۳-a & ۰ \\ -۱-i & ۰ & -a \end{vmatrix} = -a(۳-a)(-a) + (-۱+i)(i+۱)(۳-a) = (۳-a)(a^۲ - ۲) = ۰$$

پس ویژه مقادیر عبارتند از:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$a_1 = ۳ \ , \ a_۲ = -\sqrt{۲} \ , \ a_۳ = +\sqrt{۲}$

ویژه بردار $|a_1\rangle$ را می‌یابیم. برای این منظور داریم:

$$A|a_1\rangle = ۳|a_1\rangle$$

با تعریف $|a_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$؛ خواهیم داشت:

$$(-۱+i)z = ۳x$$

$$۳y = ۳y$$

$$(-۱-i)x = ۳z$$

در نتیجه:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

و به‌طور مشابه:

$$|a_۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ \frac{\sqrt{۲}}{۱-i} \end{pmatrix} , \ |a_۳\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -\frac{\sqrt{۲}}{۱+i} \end{pmatrix}$$

در اینجا هیچ‌گونه تبهگنی وجود ندارد.

(ب)

به دلیل اینکه $\hat{A}$ هرمیتی است روابط مذکور در این قسمت بدیهی خواهند بود و خواننده با محاسبه سرراست می‌تواند آن‌ها را نشان دهد.

(پ)

با توجه به اینکه $\hat{P}$ هرمیتی است و $\hat{P}^۲ = \hat{P}$، لذا $\hat{P}$ عملگر تصویر است:

$$\hat{P} = |a_1\rangle\langle a_1| = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}^۲ = |a_1\rangle\langle a_1|a_1\rangle\langle a_1| = |a_1\rangle\langle a_1| = \hat{P}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۲-۲۳

در یک فضای برداری سه بعدی، عملگری را در نظر بگیرید که ماتریس آن، در یک پایه‌ی متعامد-بهنجار $\{|۱\rangle, |۲\rangle, |۳\rangle\}$ است.

$$A=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

(آ) آیا A هرمیتی است؟ ویژه مقادیر و ویژه بردارهای بهنجار متناظر آن را بیابید. بررسی کنید که ویژه بردارهای متناظر با دو ویژه مقدار غیرتبهگن، متعامد- بهنجار هستند.

(ب) نمایش ماتریسی عملگرهای تصویری را برای دو ویژه بردار غیرتبهگن بدست آمده در بند (آ) محاسبه کنید.

حل:

(آ)

$$A^{\dagger}=\left(A^{T}\right)^{*}=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}=A$$

پس A هرمیتی است.

برای به‌دست آوردن ویژه مقادیر A، معادله‌ی $\det\left(A-a\right)=۰$ را حل می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} -a & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱-a & ۰ \\ ۱ & ۰ & -a \end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix} -۱-a & ۰ \\ ۰ & -a \end{vmatrix}-۰\begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & -a \end{vmatrix}+۱\begin{vmatrix} ۰ & -۱-a \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}=-a^{۳}-a^{۲}+a+۱=۰$$

پس:

$$-a^{۲}\left(a+۱\right)+a+۱=۰$$

$$\left(a+۱\right)\left(۱-a^{۲}\right)=۰$$

$$a=-۱$$

$$a=\pm ۱$$

برای به‌دست آوردن ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار $a_{۱}=+۱$، معادله‌ی ماتریسی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

این معادله‌ی ماتریسی متناظر با سه معادله‌ی زیر است:

$$x = z$$

$$-y = y$$

$$x = z$$

پس ویژه بردار بهنجار شده متناظر با $a_1 = +1$ برابر است با:

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |3\rangle\right)$$

می‌دانیم: $|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ و $|3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

به‌ازای $a_2 = -1$ داریم:

$$z = -x$$

$$-y = -y$$

اما $|a_2\rangle$ و $\langle a_2|$ را باید طوری انتخاب کرد که بهنجار بوده و بر هم و بر $|a_1\rangle$ عمود باشند؛ پس:

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = |2\rangle$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |3\rangle\right)$$

پس مجموعه‌ی $\{a_i\}$ راست هنجار است. حال کامل بودن آن را بررسی می‌کنیم. برای این منظور باید رابطه‌ی $\sum_{i=1}^{3}|a_i\rangle\langle a_i| = I$ برقرار باشد. لذا این موضوع را بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{i}^{3}|a_i\rangle\langle a_i| = |a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2| + |a_3\rangle\langle a_3|$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I$$

پس کامل بودن $\{a_i\}$ نیز برقرار است.

(ب)

$$|a_1\rangle\langle a_1| = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\\\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$|a_2\rangle\langle a_2| = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2}\\0 & 0 & 0\\\frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Quark

تمرین ۲-۲۴

دو عملگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را در نظر بگیرید که ماتریس آنها برابر است با:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\\-2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

(آ) آیا $\hat{A}$ و $\hat{B}$ هرمیتی هستند؟

(ب) آیا $\hat{A}$ و $\hat{B}$ جابه‌جاپذیرند؟

(پ) ویژه مقادیر و ویژه بردارهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را بیابید؟

(ت) آیا ویژه بردارهای هریک از این عملگرها، متعامد بهنجارند؟

(ث) ثابت کنید $\hat{U}^{\dagger}\hat{B}\hat{U}$ قطری است، $\hat{U}$ ماتریس ویژه بردارهای بهنجار شده‌ی $\hat{B}$ است.

(ج) نشان دهید که $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{\dagger}$

حل:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

$$A^\dagger = \left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \neq A$$

$$B^\dagger = \left(B^T\right)^* = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۴ \end{pmatrix} = B$$

بنابراین B هرمیتی است ولی A هرمیتی نیست.

(ب)

$$[A,B] = AB - BA = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۴ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ -۱ & ۰ & ۲ \\ -۲ & ۰ & ۴ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -۱ & -۵ & +۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ +۲ & +۱۰ & -۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & -۵ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

پس $[A,B] \neq ۰$ یعنی A و B با هم جابه‌جا نمی‌شوند.

(پ)

برای یافتن ویژه مقادیر A، معادله‌ی $\det(A-a) = ۰$ را حل می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۱-a & ۳ & ۰ \\ ۱ & -a & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱-a \end{vmatrix} = (۱-a)\left[(-a)(۱-a)+۱\right] - ۳\left[۱(۱-a)-۰\right] = (۱-a)\left(a^۲ - a - ۲\right) = ۰$$

پس a دارای یکی از مقادیر ± ۱ یا ۲ می‌باشد.

برای به‌دست آوردن ویژه بردارهای A، به‌ازای $a_۱ = ۱$ داریم:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

یا:

$$x + ۳y = x$$
$$x + z = y$$

بنابراین:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$|a_۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ ۰\\ -۱\end{pmatrix}$$

به‌ازای $a_۲ = -۱$ داریم:

$$x + ۳y = -x$$
$$x + z = -y$$
$$-y + z = -z$$

پس:

$$|a_۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۴}}\begin{pmatrix}-۳\\ ۲\\ ۱\end{pmatrix}$$

به‌ازای $a_۳ = ۲$ داریم:

$$x + ۳y = ۲x$$
$$x + z = ۲y$$
$$-y + z = ۲z$$

پس:

$$|a_۳\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۱۱}}\begin{pmatrix}۳\\ ۱\\ -۱\end{pmatrix}$$

به همین ترتیب b ویژه مقدار عملگر B دارای مقادیر ۰ یا ۵ خواهد بود و ویژه بردارهای متناظر آن عبارتند از:

$$|b_۱ = ۰\rangle = \begin{pmatrix}۰\\ ۱\\ ۰\end{pmatrix} \quad , |b_۲ = ۰\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\begin{pmatrix}۲\\ ۰\\ ۱\end{pmatrix} \quad , |b_۳ = ۵\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\begin{pmatrix}۱\\ ۰\\ -۲\end{pmatrix}$$

(ت)

واضح است که مجموعه‌ی $\{a_i\}$ راست هنجار نیستند اما مجموعه‌ی $\{b_i\}$ به‌دست آمده در اینجا راست هنجار می‌باشند.

(ث)

$$U = \begin{pmatrix}۰ & \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}}\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{-۲}{\sqrt{۵}}\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$U^\dagger BU=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\ 0&0&0\\ -2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 1&0&0\\ 0&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ \sqrt{5}&0&-2\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 1&0&0\\ 0&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&5\end{pmatrix}$$

(پ)

$$U^\dagger U=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 1&0&0\\ 0&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}=I$$

پس:

$$U^\dagger=U^{-1}$$

Quark

تمرین ۲-۲۵

عملگر $\hat{A}$ را درنظر بگیرید به‌طوری که $\left[\hat{A},\hat{A}^\dagger\right]=1$.

(آ) جابه‌جاگرهای $\left[\hat{A}^\dagger\hat{A},\hat{A}\right]$ و $\left[\hat{A}^\dagger\hat{A},\hat{A}^\dagger\right]$ را محاسبه کنید.

(ب) اگر اثر $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ روی حالت $\{|a\rangle\}$ با $\hat{A}|a\rangle=\sqrt{a}|a-1\rangle$ و $\hat{A}^\dagger|a\rangle=\sqrt{a+1}|a+1\rangle$ داده شوند و اگر $\langle a'|a\rangle=\delta_{a'a}$ آنگاه $\langle a|\hat{A}|a+1\rangle,\langle a+1|\hat{A}^\dagger|a\rangle$ و $\langle a|\hat{A}^\dagger\hat{A}|a\rangle$ و $\langle a|\hat{A}\hat{A}^\dagger|a\rangle$ را محاسبه کنید.

(پ) $\langle a|(\hat{A}+\hat{A}^\dagger)^2|a\rangle$ و $\langle a|(\hat{A}-\hat{A}^\dagger)^2|a\rangle$ را محاسبه کنید.

حل:

(آ)

$$\left[A^\dagger A,A\right]=-\left[A,A^\dagger A\right]=-\left[A,A^\dagger\right]A-A^\dagger\left[A,A\right]=-1A-A^\dagger(0)=-A$$

$$\left[A^\dagger A,A^\dagger\right]=-\left[A^\dagger,A^\dagger A\right]=-\left[A^\dagger,A^\dagger\right]A-A^\dagger\left[A^\dagger,A\right]=A^\dagger$$

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$\langle a|A|a+1\rangle = \langle a|\sqrt{a+1}|a\rangle = \sqrt{a+1}\delta_{aa} = \sqrt{a+1}$$

$$\langle a+1|A^\dagger|a\rangle = \langle a+1|\sqrt{a+1}|a+1\rangle = \sqrt{a+1}\delta_{a+1,a+1} = \sqrt{a+1}$$

$$\langle a|A^\dagger A|a\rangle = \left(A|a\rangle\right)^\dagger A|a\rangle = \sqrt{a}\langle a-1|\sqrt{a}|a-1\rangle = a\delta_{a-1,a-1} = a$$

$$\langle a|AA^\dagger|a\rangle = \left(A^\dagger|a\rangle\right)^\dagger A^\dagger|a\rangle = \sqrt{a+1}\langle a+1|\sqrt{a+1}|a+1\rangle = a+1$$

(پ)

$$\langle a|\left(A+A^\dagger\right)^2|a\rangle = \langle a|\left(A+A^\dagger\right)\left(A+A^\dagger\right)|a\rangle = \left(\left(A+A^\dagger\right)|a\rangle\right)^\dagger + \left(A+A^\dagger\right)|a\rangle$$

$$= \left(\sqrt{a}\langle a-1| + \sqrt{a+1}\langle a+1|\right)\left(\sqrt{a}|a-1\rangle + \sqrt{a+1}|a+1\rangle\right)$$

$$= \left(\sqrt{a}\right)^2\delta_{a-1,a-1} + \sqrt{a}\sqrt{a+1}\delta_{a-1}\delta_{a+1} + \sqrt{a}\sqrt{a+1}\delta_{a+1}\delta_{a-1} + \left(\sqrt{a+1}\right)^2\delta_{a+1,a+1}$$

$$= a + a + 1 = 2a + 1$$

$$\langle a|\left(A-A^\dagger\right)^2|a\rangle = \langle a|\left(A-A^\dagger\right)\left(A-A^\dagger\right)|a\rangle = \left(\left(A^\dagger-A\right)|a\rangle\right)^\dagger\left(A-A^\dagger\right)|a\rangle$$

$$= \left(\sqrt{a+1}\langle a+1| - \sqrt{a}\langle a-1|\right)\left(\sqrt{a}|a-1\rangle - \sqrt{a+1}|a+1\rangle\right)$$

$$= -(a+1) - a = -2a - 1$$

Quark

تمرین ۲-۲۶

ماتریس ۴×۴ زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(آ) ماتریس‌های $A^\dagger$ ، $N = A^\dagger A$ ، $H = N + \frac{1}{2}I$ (که در آن I ماتریس یکه است)، $B = A + A^\dagger$ و $C = i(A - A^\dagger)$ را به‌دست آورید.

(ب) ماتریس‌های متناظر با جابه‌جاگرهای $[A^\dagger, A]$، $[B,C]$، $[N,B]$ و $[N,C]$ را بیابید.

(پ) ماتریس‌های متناظر با B^2، C^2، $[N, B^2 + C^2]$، $[H, A^\dagger]$، $[H,A]$ و $[H,N]$ را بیابید.

(ت) ثابت کنید که $\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C)$ و $\det(C^\dagger) = (\det(C))^*$.

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

(آ)

$$A^\dagger = \left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = A^\dagger A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$H = N + \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = A + A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = i\left(A - A^\dagger\right) = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{1} & 0 & 0 \\ -i\sqrt{1} & 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(ب)

$$AA^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left[A^{\dagger},A\right]=\begin{pmatrix}۰&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۲&۰\\۰&۰&۰&۳\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-۱&۰&۰&۰\\۰&-۲&۰&۰\\۰&۰&-۳&۰\\۰&۰&۰&۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-۱&۰&۰&۰\\۰&-۱&۰&۰\\۰&۰&-۱&۰\\۰&۰&۰&۳\end{pmatrix}$$

$$\left[B,C\right]=\begin{pmatrix}۰&\sqrt{۱}&۰&۰\\\sqrt{۱}&۰&\sqrt{۲}&۰\\۰&\sqrt{۲}&۰&\sqrt{۳}\\۰&۰&\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰&i\sqrt{۱}&۰&۰\\-i\sqrt{۱}&۰&i\sqrt{۲}&۰\\۰&-i\sqrt{۲}&۰&i\sqrt{۳}\\۰&۰&-i\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}۰&i\sqrt{۱}&۰&۰\\-i\sqrt{۱}&۰&i\sqrt{۲}&۰\\۰&-i\sqrt{۲}&۰&i\sqrt{۳}\\۰&۰&-i\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰&\sqrt{۱}&۰&۰\\\sqrt{۱}&۰&\sqrt{۲}&۰\\۰&\sqrt{۲}&۰&\sqrt{۳}\\۰&۰&\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-۲i&۰&۰&۰\\۰&-۲i&۰&۰\\۰&۰&-۲i&۰\\۰&۰&۰&۶i\end{pmatrix}$$

$$\left[N,B\right]=\begin{pmatrix}۰&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۲&۰\\۰&۰&۰&۳\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰&\sqrt{۱}&۰&۰\\\sqrt{۱}&۰&\sqrt{۲}&۰\\۰&\sqrt{۲}&۰&\sqrt{۳}\\۰&۰&\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۰&\sqrt{۱}&۰&۰\\\sqrt{۱}&۰&\sqrt{۲}&۰\\۰&\sqrt{۲}&۰&\sqrt{۳}\\۰&۰&\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۲&۰\\۰&۰&۰&۳\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}۰&۰&۰&۰\\۱&۰&\sqrt{۲}&۰\\۰&۲\sqrt{۲}&۰&۲\sqrt{۳}\\۰&۰&۳\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۰&-۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\\۰&-\sqrt{۲}&۰&۰\\۰&۰&-۲\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰&-۱&۰&۰\\۱&۰&\sqrt{۲}&۰\\۰&\sqrt{۲}&۰&۲\sqrt{۳}\\۰&۰&\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}$$

$$\left[N,C\right]=\begin{pmatrix}۰&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۲&۰\\۰&۰&۰&۳\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰&i\sqrt{۱}&۰&۰\\-i\sqrt{۱}&۰&i\sqrt{۲}&۰\\۰&-i\sqrt{۲}&۰&i\sqrt{۳}\\۰&۰&-i\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۰&i\sqrt{۱}&۰&۰\\-i\sqrt{۱}&۰&i\sqrt{۲}&۰\\۰&-i\sqrt{۲}&۰&i\sqrt{۳}\\۰&۰&-i\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۲&۰\\۰&۰&۰&۳\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}۰&۰&۰&۰\\-i\sqrt{۱}&۰&i\sqrt{۲}&۰\\۰&-۲i\sqrt{۲}&۰&۲i\sqrt{۳}\\۰&۰&-۳i\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۰&-i\sqrt{۱}&۰&۰\\۰&۰&-۲i\sqrt{۲}&۰\\۰&+i\sqrt{۲}&۰&-۳i\sqrt{۳}\\۰&۰&+۲i\sqrt{۲}&۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰&-i&۰&۰\\-i&۰&-i\sqrt{۲}&۰\\۰&-i\sqrt{۲}&۰&i\sqrt{۳}\\۰&۰&i\sqrt{۳}&۰\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = CC = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{1} & 0 & 0 \\ -i\sqrt{1} & 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{1} & 0 & 0 \\ -i\sqrt{1} & 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{2} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 + C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left[N, B^2 + C^2\right] = 0$$

علت جابه‌جا شدن N و $B^2 + C^2$ آن است که هر دو قطری هستند.

$$\left[H, A^\dagger\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2}\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{2}\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = A^\dagger$$

$$\left[H, A\right] = \left[A^\dagger A + \frac{1}{2}, A\right] = -\left[A, A^\dagger A\right] = -\left[A, A^\dagger\right]A - A^\dagger\left[A, A\right] = \left[A^\dagger, A\right]A$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$[H,A]=\begin{pmatrix}-۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰ & \sqrt{۱} & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & \sqrt{۳}\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰ & -۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & -\sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & -\sqrt{۳}\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}=-A$$

$$[H,N]=\left[N+\frac{۱}{۲},N\right]=۰$$

(ت)

$$ABC=\begin{pmatrix}۰ & \sqrt{۱} & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & \sqrt{۳}\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & ۰ & i\sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & -i & ۰ & i\sqrt{۶}\\ -i\sqrt{۲} & ۰ & -i & ۰\\ ۰ & -i\sqrt{۶} & ۰ & ۳i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰ & -i & ۰ & i\sqrt{۶}\\ -۲i & ۰ & -i\sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & -i۳\sqrt{۲} & ۰ & ۳i\sqrt{۳}\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}$$

$$\det(ABC)=i\begin{vmatrix}-۲i & -i\sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳i\sqrt{۳}\\ ۰ & ۰ & ۰\end{vmatrix}-i\sqrt{۶}\begin{vmatrix}-۲i & ۰ & -i\sqrt{۲}\\ ۰ & -۲i\sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{vmatrix}=۰$$

$$\det(A)=-\sqrt{۱}\begin{vmatrix}۰ & \sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳}\\ ۰ & ۰ & ۰\end{vmatrix}=۰$$

پس:

$$\det(ABC)=\det(A)\det(B)\det(C)=۰$$

$$\det(C^{\dagger})=\det(C)=-i\sqrt{۱}\begin{vmatrix}-i\sqrt{۱} & i\sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & i\sqrt{۳}\\ ۰ & -i\sqrt{۳} & ۰\end{vmatrix}=-i\sqrt{۱}\left(-i\sqrt{۱}\begin{vmatrix}۰ & i\sqrt{۳}\\ -i\sqrt{۳} & ۰\end{vmatrix}-i\sqrt{۲}\begin{vmatrix}۰ & i\sqrt{۳}\\ ۰ & ۰\end{vmatrix}\right)=۳$$

پس:

$$\det(C^{\dagger})=\det(C)=\left(\det(C)\right)^{*}$$

تمرین ۲-۲۷

اگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ جابه‌جا شوند و اگر $|\psi_۱\rangle$ و $|\psi_۲\rangle$ دو ویژه بردار از $\hat{A}$ ($\hat{A}$ هرمیتی است) با ویژه مقادیر متفاوت باشند، نشان دهید که

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ) $\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle$ برابر صفر است.

(ب) $\hat{B}|\psi_1\rangle$ نیز ویژه برداری از $\hat{A}$ با ویژه مقدار مشابه $|\psi_1\rangle$ است یعنی اگر $\hat{A}|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle$ باشد نشان دهید $\hat{A}(\hat{B}|\psi_1\rangle) = a_1\hat{B}|\psi_1\rangle$ است.

حل:

(آ)

در اثبات رابطه‌ی $\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle = 0$؛ فرض هرمیتی بودن A ضروری است.

$$\hat{A}|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle$$
$$\hat{A}|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle$$

از رابطه‌ی اول نتیجه می‌شود که:

$$\langle\psi_1|\hat{A}^\dagger = a_1^*\langle\psi_1|$$

اما اگر $\hat{A}$ هرمیتی باشد، یعنی $A = A^\dagger$، آنگاه:

$$\langle\psi_1|\hat{A} = a_1\langle\psi_1|$$

پس چون $[A,B] = 0$، آنگاه خواهیم داشت:

$$\langle\psi_1|[A,B]|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|AB - BA|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|AB|\psi_2\rangle - \langle\psi_1|BA|\psi_2\rangle = a_1\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle - a_2\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle$$
$$= (a_1 - a_2)\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$$

اما چون فرض مسئله، آن است که: $a_1 \neq a_2$، پس:

$$\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$$

(ب)

$$AB|\psi_1\rangle = BA|\psi_1\rangle = B(a|\psi_1\rangle) = aB|\psi_1\rangle$$
$$A(B|\psi_1\rangle) = a_1(B|\psi_1\rangle)$$

این رابطه بیانگر آن است که $B|\psi_1\rangle$ ویژه بردار عملگر A با ویژه مقدار a_1 می‌باشد.

تمرین ۲-۲۸

فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ هستند. با فرض وجود B^{-1} نشان دهید $[A,B^{-1}] = -B^{-1}[A,B]B^{-1}$.

حل:

$$BB^{-1} = B^{-1}B = I$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$-B^{-1}\big[A,B\big]B^{-1} = -B^{-1}\big(AB-BA\big)B^{-1} = -B^{-1}ABB^{-1} + B^{-1}BAB^{-1} = -B^{-1}AI + IAB^{-1}$$
$$= -B^{-1}A + AB^{-1} = \Big[A,B^{-1}\Big]$$

تمرین ۲-۲۹

یک سیستم فیزیکی را درنظر بگیرید که هامیلتونی H و عملگر A آن در فضای سه‌بعدی با ماتریس‌های زیر داده می‌شوند:

$$H = \hbar\omega\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(آ) آیا H و A هرمیتی هستند؟

(ب) نشان دهید که H و A جابه‌جا می‌شوند. یک پایه از ویژه بردارهای مشترک H و A را معین کنید.

حل:

$$H^{\dagger} = \Big(H^{T}\Big)^{*} = \hbar w^{*}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

تنها با این فرض که H هرمیتی است (یعنی $H = H^{\dagger}$) خواهیم داشت: $w = w^{*}$. اما چون H، هامیلتونی یک سیستم فیزیکی است، بنابراین باید هرمیتی باشد و لاجرم حقیقی بودن w محرز فرض شود. اما هرمیتی بودن A، مستلزم آن است که a حقیقی باشد؛ زیرا:

$$A^{\dagger} = \Big(A^{T}\Big)^{*} = a^{*}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(ب)

$$\big[H,A\big] = HA - AH = \hbar wa\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\right]$$
$$= \hbar wa\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\right] = 0$$

واضح است که ویژه بردارها و ویژه مقادیر راست هنجار H عبارتند از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$|h_1=\hbar w\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ |h_2=-\hbar w\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ |h_3=-\hbar w\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

حال ویژه مقادیر و ویژه بردارهای راست هنجار A را می‌یابیم. برای این منظور معادله‌ی $\det(\hat{A}-\lambda)=0$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & a\\ 0 & a & -\lambda\end{vmatrix}=(a-\lambda)(\lambda^2-a^2)=0$$

مقادیر متمایز λ عبارتند از $\pm a$. در واقع متناظر با ویژه مقدار $\lambda=+a$، تبهگنی دوگانه وجود دارد. حال ابتدا ویژه بردار بهنجار متناظر با $\lambda=-a$ را می‌یابیم.

$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\z\\y\end{pmatrix}=-a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

پس:

$$|\lambda=-a\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

اما معادلات متناظر با $\lambda=a$ عبارتند از:

$$x=x$$

$$y=z$$

پس:

$$|\lambda=+a\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad |\lambda=+a\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

در اینجا ویژه حالت‌های A را با الزام راست هنجار بودن یعنی $\langle a_i|a_j\rangle=\delta_{ij}$ به‌دست آوردیم. در اینجا این ویژه بردارها خود به خود ویژه بردارهای H نیز می‌باشند.

تمرین ۲-۳۰

(آ) با استفاده از $\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\hbar$ نشان دهید که $\left[\hat{X},\hat{P}^2\right]=2i\hbar\hat{P}$.

(ب) نشان دهید $\left[\hat{X}^2,\hat{P}^2\right]=2i\hbar\left(i\hbar+2\hat{P}\hat{X}\right)$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ) جابه‌جاگر $\left[\hat{X}^2,\hat{P}^2\right]$ را محاسبه کنید.

حل:

در حل این تمرین از اتحادهای زیر استفاده خواهیم کرد:

$$\left[A,BC\right]=\left[A,B\right]C+B\left[A,C\right]$$
$$\left[AB,C\right]=A\left[B,C\right]+\left[A,C\right]B$$

(آ)
$$\left[\hat{X},\hat{P}^2\right]=\left[\hat{X},\hat{P}\right]\hat{P}+\hat{P}\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\hbar\,\hat{P}+\hat{P}\left(i\hbar\right)=2i\hbar\,\hat{P}$$

(ب)
$$\left[\hat{X}^2,\hat{P}^2\right]=\hat{X}\left[\hat{X},\hat{P}^2\right]+\left[\hat{X},\hat{P}^2\right]\hat{X}=\hat{X}\left(2i\hbar\,\hat{P}\right)+\left(2i\hbar\,\hat{P}\right)\hat{X}=2i\hbar\left(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}\right)$$
$$=2i\hbar\left(i\hbar+\hat{P}\hat{X}+\hat{P}\hat{X}\right)=2i\hbar\left(i\hbar+2\hat{P}\hat{X}\right)$$

(پ)
$$\left[\hat{X}^2,\hat{P}^2\right]=\left[\hat{X}^2,\hat{P}^2\right]\hat{P}+\hat{P}^2\left[\hat{X}^2,\hat{P}\right]=2i\hbar\left(i\hbar+2\hat{P}\hat{X}\right)+\hat{P}^2\left[\hat{X}^2,\hat{P}\right]$$

اما:
$$\left[\hat{X}^2,\hat{P}\right]=X\left[X,P\right]+\left[X,P\right]X=X\left(i\hbar\right)+i\hbar\left(X\right)=2i\hbar\,X$$

پس:
$$\left[\hat{X}^2,\hat{P}^2\right]=2i\hbar\left(i\hbar+2\hat{P}\hat{X}\right)+\hat{P}^2\left(2i\hbar\,X\right)=2i\hbar\left(i\hbar+2\hat{P}\hat{X}+\hat{P}^2\hat{X}\right)$$

Quark

تمرین ۲-۳۱

هرمیتی بودن جابه‌جاگرهای $\left[\hat{X},\hat{P}\right]$,$\left[\hat{X}^2,\hat{P}\right]$ و $\left[\hat{X},\hat{P}^2\right]$ را مورد بحث قرار دهید.

حل:

در حالت کلی اگر A و B هرمیتی باشند، جابجاگر آنها پاد هرمیتی خواهد بود زیرا:

$$\left[A,B\right]^\dagger=\left(AB-BA\right)^\dagger=\left(AB\right)^\dagger-\left(BA\right)^\dagger=B^\dagger A^\dagger-A^\dagger B^\dagger=BA-AB=-\left[A,B\right]$$

پس واضح است که $\left[X,P\right]$، $\left[X^2,P\right]$ و نیز $\left[X,P^2\right]$ پاد هرمیتی هستند.

تمرین ۲-۳۲

(آ) جابه‌جاگر $\left[\hat{X}^2,d/dx\right]$ را با اعمال آن روی یک تابع موج به دست آورید.

(ب) با استفاده از $\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\hbar$ جابه‌جاگر $\left[\hat{X}\hat{P}^2,\hat{P}\hat{X}^2\right]$ را برحسب ترکیب خطی $\hat{X}^2\hat{P}^2$ و $\hat{X}\hat{P}$ به‌دست آورید.

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

(آ)

$$\left[\hat{X}^{۲},\frac{d}{dx}\right]\psi(x)=X^{۲}\frac{d\psi(x)}{dx}-\frac{d}{dx}\left(X^{۲}\psi(x)\right)=x^{۲}\frac{d\psi}{dx}-\frac{d}{dx}\left(x^{۲}\psi(x)\right)$$

$$=x^{۲}\frac{d\psi}{dx}-۲x\psi(x)-x^{۲}\frac{d\psi}{dx}=-۲x\psi(x)=-۲\hat{X}\psi(x)$$

پس:

$$\left[\hat{X}^{۲},\frac{d}{dx}\right]=-۲\hat{X}$$

(ب)

$$\left[XP^{۲},PX^{۲}\right]=\left[X,PX^{۲}\right]P^{۲}+X\left[P^{۲},PX^{۲}\right]$$

$$=\left\{\left[X,P\right]X^{۲}+P\left[X,X^{۲}\right]\right\}P^{۲}+X\left\{\left[P^{۲},P\right]X^{۲}+P\left[P^{۲},X^{۲}\right]\right\}$$

$$=\left(i\hbar X^{۲}+P\times۰\right)P^{۲}+X\left(X^{۲}+P\left(-۲i\hbar\left(XP+PX\right)\right)\right)$$

$$=i\hbar X^{۲}P^{۲}-۲i\hbar XPXP-۲i\hbar XP^{۲}X$$

$$=-i\hbar\left[-X^{۲}P^{۲}+۴\left(XP\right)^{۲}-۲i\hbar XP\right]$$

$$=-i\hbar\left[-X^{۲}P^{۲}+۲\left(XP\right)^{۲}+۲XP\left(XP-i\hbar\right)\right]$$

$$=-i\hbar\left(-X^{۲}P^{۲}+۴XPXP-۲i\hbar XP\right)$$

$$=-i\hbar\left(-X^{۲}P^{۲}+۴X\left(XP-i\hbar\right)P-۲i\hbar XP\right)$$

$$=-i\hbar\left(۳X^{۲}P^{۲}-۶i\hbar XP\right)$$

تمرین ۲-۳۳

نشان دهید که $\left[\hat{X},\hat{P}^{n}\right]=i\hbar\hat{X}\hat{P}^{n-۱}$ است.

حل:

اثبات این رابطه را از طریق استقراء انجام می‌دهیم.

بدیهی است که این رابطه به‌ازای $n=۱$ برقرار است، یعنی:

$$\left[\hat{X},\hat{P}^{۱}\right]=\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\hbar\left(۱\right)\hat{P}^{۱-۱}$$

از طرفی با فرض اینکه به‌ازای $n=k$ این رابطه برقرار باشد، ثابت می‌کنیم که به‌ازای $n=k+۱$ نیز

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

برقرار است.

$$\left[\hat{X},\hat{P}^{k+1}\right]=\left[\hat{X},\hat{P}^{k}\right]\hat{P}+\hat{P}^{k}\left[\hat{X},\hat{P}\right]$$

اما:

$$\left[\hat{X},\hat{P}^{k}\right]=i\hbar\,k\hat{P}^{k-1}$$

لذا:

$$\left[\hat{X},\hat{P}^{k+1}\right]=i\hbar\,k\hat{P}^{k-1}\hat{P}+\hat{P}^{k}\left(i\hbar\right)=i\hbar\left(k\hat{P}^{k}+\hat{P}^{k}\right)=i\hbar\left(k+1\right)\hat{P}^{k}$$

تمرین ۲-۳۴

جابه‌جاگرهای $\left[e^{i\hat{X}},\hat{P}\right],\left[e^{i\hat{X}^{2}},\hat{P}\right]$ و $\left[e^{i\hat{X}},\hat{P}^{2}\right]$ را به‌دست آورید.

حل:

در متن کتاب ثابت شده است که:

$$\left[X^{m},P\right]=im\hbar X^{m-1}$$

پس:

$$\left[e^{iX},\hat{P}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n}}{n!}\left[X^{n},\hat{P}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i^{n}}{n!}in\hbar X^{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}i^{2}\frac{i^{n-1}}{\left(n-1\right)!}X^{n-1}$$

$$=-\hbar\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(iX\right)^{k}}{k!}=-\hbar\,e^{iX}$$

$$\left[e^{iX^{2}},P\right]=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(iX^{2}\right)^{n}}{n!},P\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n}}{n!}\left[X^{2n},P\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n}}{n!}2n\,i\hbar\,X^{2n-1}=-2\hbar X\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{\left(n-1\right)!}X^{2\left(n-1\right)}$$

$$=-2\hbar X\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(iX^{2}\right)^{k}}{k!}=-2\hbar Xe^{iX^{2}}$$

$$\left[e^{iX},P^{2}\right]=\left[e^{iX},PP\right]=\left[e^{iX},P\right]P+P\left[e^{iX},P\right]=-\hbar e^{iX}P+P\left(-\hbar e^{iX}\right)=-\hbar\left(e^{iX}P+Pe^{iX}\right)$$

تمرین ۲-۳۵

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ) ویژه مقادیر و ویژه بردارهای بهنجار شده‌ی A را بیابید.

(ب) آیا این ویژه بردارها تشکیل یک پایه را می‌دهند (یعنی آیا این پایه، کامل و متعامد بهنجار است)؟

(پ) ماتریس U را در نظر بگیرید که از ویژه بردارهای متعامد بهنجار A تشکیل شده است. ثابت کنید U یک ماتریس یکه است و رابطه‌ی زیر را برآورد می‌کند:

$$U^{\dagger}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

که درآن λ_1,λ_2 و λ_3 ویژه مقادیر A هستند.

(ت) نشان دهید که $e^{xA}=\cosh x+A\sinh x$ است.

(راهنمایی: $\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}/(2n)!$ و $\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}/(2n+1)!$)

حل:

(آ)

برای یافتن ویژه مقادیر معادله‌ی $\det(A-a)=0$ را حل می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix}-a & 0 & -1\\ 0 & 1-a & 0\\ -1 & 0 & -a\end{vmatrix}=-a(-a)(1-a)-1(1-a)=(1-a)(a^2-1)=0$$

ویژه بردار متناظر با $a=-1$ را می‌یابیم.

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

یا:

$$z=+x$$

$$y=-y$$

بنابراین ویژه بردار بهنجار متناظر با $a=-1$ عبارتست از:

$$|a_1=-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

برای $a=1$ داریم:

$$z=-x$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$y = y$$

پس ویژه بردارهای بهنجار متناظر با $a = ۱$ که بر هم و بر $|a_۱ = -۱\rangle$ عمودند عبارتند از:

$$|a_۲ = ۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}, \quad |a_۳ = ۱\rangle = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

(ب)

از آنجا که A هرمیتی است؛ پس، ویژه بردارهای آن متعامد و پایه‌ی کاملی را تشکیل می‌دهند زیرا:

$$\sum_{i=۱}^{۳} |a_i\rangle\langle a_i| = |a_۱\rangle\langle a_۱| + |a_۲\rangle\langle a_۲| + |a_۳\rangle\langle a_۳|$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{-۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{-۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

در ضمن واضح است که:

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$$

(پ)

$$U = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$UU^\dagger = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \\ ۱ & -۱ & - \end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} = I$$

پس U یکانی است.

$$U^\dagger A U = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & - & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} -۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ت)

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{2n} = \left(A^2\right)^n = I^n = I$$

$$A^{2n+1} = AA^{2n} = AI = A$$

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ax^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos hx + A\sin hx$$

تمرین ۲-۳۶

(آ) اگر $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = c$ که درآن c یک عدد است، دو رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + c$$

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-c/2}$$

(ب) حال اگر $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = c\hat{B}$ که در آن c یک عدد است نشان دهید

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = e^{c}\hat{B}$$

حل:

(آ)

از تمرین ۲-۱۵ داریم:

$$e^{A}Be^{-A} = B + \left[A, B\right] + \frac{1}{2!}\left[A, \left[A, B\right]\right] + \frac{1}{3!}\left[A, \left[A, \left[A, B\right]\right]\right] + \cdots$$

اما اگر $\left[A, B\right] = c$ آنگاه داریم:

$$e^{\hat{A}}Be^{-\hat{A}} = \hat{B} + c + \frac{1}{2!}\left[A, c\right] + \frac{1}{3!}\left[A, \left[A, c\right]\right] + \cdots$$

اما چون $\left[\hat{A}, c\right] = 0$ پس:

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$e^{A}Be^{-A} = \hat{B} + c + \cdot + \cdot + \ldots = \hat{B} + c$$

باز از همان تمرین داریم:

$$e^{A}e^{B} = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

اما اگر $[A,B] = c$ آنگاه داریم:

$$e^{A}e^{B} = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}c}$$

$$e^{A}e^{B}e^{\frac{c}{2}} = e^{A+B}$$

(ب)

اگر $[A,B] = cB$ آنگاه:

$$e^{A}Be^{-A} = B + cB + \frac{1}{2!}[A,cB] + \frac{1}{3!}[A,[A,cB]] + \ldots$$

$$= B + cB + \frac{1}{2!}c[A,B] + \frac{1}{3!}c[A,[A,B]] + \ldots = B\left(1 + c + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \ldots\right) = \hat{B}e^{c}$$

تمرین ۲-۳۷

ماتریس زیر را درنظر بگیرید:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & -1 \\ \cdot & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(آ) ویژه مقدارهای A و ویژه بردارهای متناظر آن‌ها را بیابید.

(ب) پایه‌ای را در نظر بگیرید که از سه ویژه بردار A ساخته شده باشد. با بهره‌گیری از جبر ماتریسی، ثابت کنید که این پایه هم متعامد – بهنجار و هم کامل است.

حل:

(آ)

بردار $\vec{a}$ را ویژه بردار عملگر (ماتریس) $\hat{A}$ با ویژه مقدار a گویند هرگاه:

$$\hat{A}\vec{a} = a\vec{a}$$

نتیجه‌ی این معادله آن است که:

$$(\hat{A} - a)\vec{a} = \cdot$$

برای این که معادله‌ی اخیر دارای جوابی غیر از جواب بدیهی $\vec{a} = \cdot$ باشد لازم است که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\det\left(\hat{A}-a\right)=۰$$

پس برای یافتن ویژه مقادیر باید این معادله را حل کنیم؛ پس:

$$\begin{vmatrix} ۱-a & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۲}-a & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}-a \end{vmatrix}=(۱-a)\left[\left(\frac{۳}{۲}-a\right)\left(\frac{۳}{۲}-a\right)-\frac{۱}{۴}\right]=۰$$

ویژه مقادیر متمایز a عبارتند از ۱و ۲. در واقع $a=۱$ دارای تبهگنی است. یعنی دو ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار $a=۱$ داریم. حال ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار $a=۲$ را می‌یابیم.

$$\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=۲\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

نتیجه آن که:

$$x=۲x$$

$$\frac{۱}{۲}(۳y-z)=۲y$$

$$\frac{۱}{۲}(-y+۳z)=۲z$$

از حل این معادله نتیجه می‌شود که:

$$x=۰$$

$$y=-z$$

و در نتیجه با لحاظ کردن بهنجار بودن $|a_i\rangle$ داریم:

$$|a_۱=۲\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۰ \\ +۱ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

برای $a=۱$ نتیجه می‌شود که: $x=x$ و $y=z$ و لذا:

$$|a_۲=۱\rangle=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}\quad,\quad |a_۳=۱\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

واضح است که $\langle a_i|a_j\rangle=\delta_{ij}$ و همین‌طور $\sum_{i=۱}^{۳}|a_i\rangle\langle a_i|=I$، زیرا:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$|a_1\rangle\langle a_1|+|a_2\rangle\langle a_2|+|a_3\rangle\langle a_3|=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

بنابراین $\{a_i\}$ متعامد و کامل است.

تمرین ۲-۳۸

(آ) شرطی را تعیین کنید که باید به‌وسیله‌ی ماتریسی مانند A برآورده شود به‌طوری که هم یکانی و هم هرمیتی باشد.

(ب) سه ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$M_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\ ,\ M_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\ ,\ M_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

وارون هر ماتریس را محاسبه کنید. آیا شرط به‌دست آمده در (آ) را برآورده می‌کنند؟

حل:

(آ)

$$A\equiv\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$A^\dagger=\begin{pmatrix}a^*&c^*\\b^*&d^*\end{pmatrix}$$

A هرمیتی است اگر $A=A^\dagger$. این شرط ایجاب می‌کند که a و d حقیقی باشند و $c=b^*$. یعنی:

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\b^*&d\end{pmatrix}=A^\dagger$$

از طرفی A یونیتاری است اگر $A^{-1}=A^\dagger$. و لذا:

$$\begin{pmatrix}a&b\\b^*&d\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bb^*}\begin{pmatrix}d&-b\\-b^*&a\end{pmatrix}$$

از این تساوی نتیجه می‌شود که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$a=\frac{d}{ad-|b|^2}$$

$$b=\frac{-b}{ad-|b|^2}$$

$$d=\frac{a}{ad-|b|^2}$$

بنابراین یک ماتریس ۲×۲ با شروط زیر هرمیتی یونیتاری است:

۱. عناصر روی قطر اصلی آن حقیقی و عناصر روی قطر فرعی آن مزدوج مختلط یکدیگر باشند.

۲. رد یا Trace آن صفر شود.

۳. دترمینان آن برابر ۱- شود.

(ب)

$$M_1^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad M_2^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad M_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

هر سه ماتریس M_1، M_2 و M_3 هرمیتی یونیتاری هستند زیرا شروط قید شده در بند (آ) را ارضاء می‌کنند.

تمرین ۲-۳۹

دو ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\quad \text{و}\quad B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i & 1-i\\ 1-i & 1+i\end{pmatrix}$$

(آ) آیا این ماتریس‌ها هرمیتی هستند؟

(ب) وارون‌های این ماتریس‌ها را حساب کنید.

(پ) آیا این ماتریس‌ها یکانی هستند؟

(ت) ثابت کنید که دترمینان‌های A و B به شکل $e^{i\theta}$ هستند. مقادیر متناظر با θ را پیدا کنید.

حل:

(آ)

$$A^\dagger=\left(A^T\right)^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}\neq A$$

$$B^\dagger=\left(B^T\right)^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-i & 1+i\\ 1+i & 1-i\end{pmatrix}\neq B$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پس هیچ یک از A و B هرمیتی نیست.

(ب)

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{i}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}=A^{\dagger}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2}\\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2} & -\frac{1-i}{2}\\ -\frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2}\end{pmatrix}}{\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-i}{2}\right)^{2}}=\begin{pmatrix}\frac{1-i}{2} & +\frac{i+1}{2}\\ \frac{i+1}{2} & \frac{1-i}{2}\end{pmatrix}=B^{\dagger}$$

(پ)

طبق قسمت (ب)، A و B هر دو یکانی هستند.

(ت)

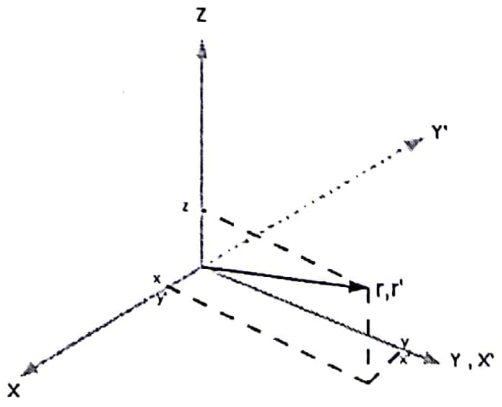
$$\det(A)=e^{i\times 0}=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$\det(B)=i=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

تمرین ۲-۴۰

نشان دهید که ماتریس تبدیل نمایشگر چرخش پادساعتگرد 90° حول محور z از بردارهای پایه‌ی $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ به صورت زیر است:

$$U=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

فرض می‌کنیم بردار مکان $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ پس از دوران به اندازه ۹۰° حول محور z به بردار $\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$ تبدیل شود. برای این عمل دوران، ماتریس U را در نظر می‌گیریم به‌طوری که:

$$\vec{r}' = U\vec{r}$$

یا:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{۱۱} & U_{۱۲} & U_{۱۳} \\ U_{۲۱} & U_{۲۲} & U_{۲۳} \\ U_{۳۱} & U_{۳۲} & U_{۳۳} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

اما از طرفی می‌دانیم که:

$$x' = -y$$
$$y' = x$$
$$z' = z$$

پس:

$$U = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

تمرین ۲-۴۱

نشان دهید که ماتریس تبدیل نمایشگر چرخش ساعت‌گرد ۹۰° حول محور y از بردارهای پایه‌ی $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ به صورت زیر است:

$$U = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}.$$

حل:

این مسئله مشابه مسئله‌ی قبل است با این تفاوت که داریم:

$$x' = -z$$
$$y' = y$$
$$z' = x$$

و در نتیجه:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$U=\begin{pmatrix}۰ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰\end{pmatrix}$$

تمرین ۲-۴۲

نشان دهید که عملگر $\left(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}\right)^{۲}$ برابر است با $\left(\hat{X}^{۲}\hat{P}^{۲}+\hat{P}^{۲}\hat{X}^{۲}\right)$ به اضافه‌ی جمله‌ای از مرتبه‌ی $\hbar^{۲}$.

حل:

$$XP-PX=\left[X,P\right]=i\hbar$$

$$PX=XP-i\hbar$$

$$\left(XP+PX\right)^{۲}=\left(XP+XP-i\hbar\right)^{۲}=\left(۲XP-i\hbar\right)^{۲}=۴XP\,XP-۴i\hbar\,XP-\hbar^{۲}$$

$$\left(XP+PX\right)^{۲}=۴X\left(XP-i\hbar\right)P-۴i\hbar\,XP-\hbar^{۲}=۴X^{۲}P^{۲}-۸i\hbar\,XP-\hbar^{۲}$$

$$X^{۲}P^{۲}-P^{۲}X^{۲}=\left[X^{۲},P^{۲}\right]=۲i\hbar\left(XP+PX\right)$$

از دو خط آخر نتیجه می‌شود که:

$$\left(XP+PX\right)^{۲}=۲X^{۲}P^{۲}+۲\left(P^{۲}X^{۲}+۲i\hbar\,XP+۲i\hbar\,PX\right)-۸i\hbar\,XP-\hbar^{۲}$$

$$=۲\left(X^{۲}P^{۲}+P^{۲}X^{۲}\right)+۴i\hbar\,PX-۴i\hbar\,XP-\hbar^{۲}$$

$$=۲\left(X^{۲}P^{۲}+P^{۲}X^{۲}\right)-۴i\hbar\left(XP-PX\right)-\hbar^{۲}$$

$$=۲\left(X^{۲}P^{۲}+P^{۲}X^{۲}\right)-۴i\hbar\left(i\hbar\right)-\hbar^{۲}=۲\left(X^{۲}P^{۲}+P^{۲}X^{۲}\right)+۳\hbar^{۲}$$

تمرین ۲-۴۳

دو ماتریس $A=\begin{pmatrix}۴ & i & ۷\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & -i\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & i & ۰\\ -i & ۰ & i\end{pmatrix}$ را درنظر بگیرید. حاصل‌ضرب‌های $B^{-۱}A$ و $AB^{-۱}$ را حساب کنید. آیا با هم برابرند؟ اهمیت این نتیجه در چیست؟

حل:

با توجه به رابطه‌ی ۲-۱۹۰ داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 6 & i\\ i & -4i & 3\\ 1 & -4 & -i\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -i & -i\\ 0 & 2i & 0\\ -1 & -i & i\end{pmatrix}$$

و لذا:

$$B^{-1}A=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -i & -i\\ 0 & 2i & 0\\ -1 & -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & i & 7\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\frac{1}{2}i & i & 4+\frac{1}{2}i\\ -i & 0 & -i\\ 2+\frac{i}{2} & 0 & 3+\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$$

$$AB^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}4 & i & 7\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -i & -i\\ 0 & 2i & 0\\ -1 & -i & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{2} & 1+\frac{11}{2}i & -\frac{3}{2}i\\ 1 & i & 0\\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-i & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ملاحظه می‌شود که $B^{-1}A$ و AB^{-1} معادل نمی‌باشند. اهمیت این در آن است که:

$$\frac{A}{B}=AB^{-1}\neq B^{-1}A$$

تمرین ۲-۴۴

رابطه‌های فهرست شده در پیوست (آ) را برای محاسبه‌ی انتگرال‌های دربرگیرنده‌ی تابع دلتای دیراک زیر به‌کار گیرید:

(آ) $\int_0^{\pi}\sin(3x)\cos^2(4x)\delta(x-\pi/2)dx$

(ب) $\int_{-2}^{2}e^{7x+2}\delta(5x)dx$

(پ) $\int_{-2\pi}^{2\pi}\sin(\theta/2)\delta''(\theta+\pi)d\theta$

(ت) $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\delta[(\theta-\pi)/4]d\theta$

حل:

(آ)

$$\int_0^{\pi}\sin(3x)\cos^2(4x)\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{4\pi}{2}\right)=-1$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$\int_{-۲}^{۲} e^{۷x+۲}\delta(۵x)\,dx = \frac{۱}{۵}\int_{-۲}^{۲} e^{۷x+۲}\delta(x)\,dx = \frac{۱}{۵}e^{۷(۰)+۲} = \frac{۱}{۵}e^{۲}$$

(پ)

$$\int_{-۲\pi}^{۲\pi} \sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\delta''(\theta+\pi)\,d\theta = \int_{-۲\pi}^{۲\pi} f(\theta)\,\delta''(\theta+\pi)\,d\theta = f''(-\pi)$$

در اینجا $f(\theta)$ را به‌صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$f(\theta) = \sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

پس:

$$f''(\theta) = -\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

و لذا:

$$\int_{-۲\pi}^{۲\pi} \sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\delta''(\theta+\pi)\,d\theta = -\frac{۱}{۴}\sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = \frac{۱}{۴}$$

(ت)

$$\int_{۰}^{۲\pi} \cos^{۲}\theta\,\delta\left(\frac{\theta-\pi}{۴}\right)d\theta = ۴\int_{۰}^{۲\pi} \cos^{۲}\theta\,\delta(\theta-\pi)\,d\theta = ۴\cos^{۲}(\pi) = ۴$$

تمرین ۲-۴۵

رابطه‌های فهرست شده در پیوست (آ) را برای محاسبه‌ی عبارت‌های زیر به‌کار بگیرید.

(آ) $\int_{۰}^{۵}\left(۳x^{۲}+۲\right)\delta(x-۱)\,dx$

(ب) $\left(۲x^{۵}-۴x^{۳}+۱\right)\delta(x+۲)$

(پ) $\int_{۰}^{\infty}\left(۵x^{۳}-۷x^{۲}-۳\right)\delta(x^{۲}-۴)\,dx$

حل:

(آ)

$$\int_{۰}^{۵}\left(۳x^{۲}+۲\right)\delta(x-۱)\,dx = ۳(۱)^{۲}+۲ = ۵$$

(ب)

$$\left(۲x^{۵}-۴x^{۳}+۱\right)\delta(x+۲) = \left[۲(-۲)^{۵}-۴(-۲)^{۳}+۱\right]\delta(x+۲) = -۳۱\delta(x+۲)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ)

$$\int_{۰}^{+\infty}\left(۵x^۳-۷x^۲-۳\right)\delta\left(x^۲-۴\right)dx=\int_{۰}^{+\infty}\left(۵x^۳-۷x^۲-۳\right)\frac{۱}{۲(۲)}\left[\delta\left(x-۲\right)+\delta\left(x+۲\right)\right]dx$$
$$=\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{+\infty}\left(۵x^۳-۷x^۲-۳\right)\delta\left(x-۲\right)dx=\frac{۱}{۴}\left[۵(۲)^۳-۷(۲)^۲-۳\right]$$
$$=\frac{۹}{۴}$$

تمرین ۲-۴۶

رابطه‌های فهرست شده در پیوست (آ) را برای محاسبه‌ی عبارت‌های زیر به‌کار بگیرید.

(آ) $\int_{۲}^{۷}e^{۶x-۲}\delta(-۴x)dx$

(ب) $\cos(۲\theta)\sin(\theta)\delta\left(\theta^۲-\pi^۲/۴\right)$

(پ) $\int_{-۱}^{۱}e^{۵x-۱}\delta'''(x)dx$

حل:

(آ)

$$\int_{۲}^{۷}e^{۶x-۲}\delta\left(-۴x\right)dx=\frac{۱}{۴}\int_{۲}^{۷}e^{۶x-۲}\delta\left(x\right)dx=۰$$

(ب)

$$\cos\left(۲\theta\right)\sin\theta\delta\left(\theta^۲-\frac{\pi^۲}{۴}\right)=\cos\left(۲\theta\right)\sin\left(\theta\right)\frac{۱}{۲\left(\frac{\pi}{۲}\right)}\left[\delta\left(\theta-\frac{\pi}{۲}\right)+\delta\left(\theta+\frac{\pi}{۲}\right)\right]$$
$$=\frac{۱}{\pi}\left[\cos\left(\frac{۲\pi}{۲}\right)\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{۲}\right)+\cos\left(\frac{-۲\pi}{۲}\right)\sin\left(\frac{-\pi}{۲}\right)\delta\left(\theta+\frac{\pi}{۲}\right)\right]$$
$$=\frac{۱}{\pi}\left[-\delta\left(\theta-\frac{\pi}{۲}\right)+\delta\left(\theta+\frac{\pi}{۲}\right)\right]$$

(پ)

$$\int_{-۱}^{+۱}e^{۵x-۱}\delta'''\left(x\right)dx=\left(-۱\right)^۳\left[e^{۵(x-۱)}\right]'''_{x=۰}=-۵^۳e^{۵(۰-۱)}=-۱۲۵\,e^{-۵}$$

تمرین ۲-۴۷

اگر عملگرهای مکان و اندازه حرکت به ترتیب با $\hat{\vec{R}}$ و $\hat{\vec{P}}$ نمایش داده شوند، نشان دهید که $\hat{\mathcal{P}}^\dagger\hat{\vec{R}}^n\hat{\mathcal{P}}=(-۱)^n\hat{\vec{R}}^n$ و $\hat{\mathcal{P}}^\dagger\hat{\vec{P}}^n\hat{\mathcal{P}}=(-۱)^n\hat{\vec{P}}^n$ که در آن $\mathcal{P}$ یک عملگر پاریته و n عدد صحیح

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

است.

حل:

برای جلوگیری از خطا، عملگر پاریته را با $\hat{\pi}$ نشان می‌دهیم.

$$\hat{\pi}^{\dagger}\hat{R}\hat{\pi}=\hat{\pi}^{\dagger}\left(-\pi\hat{R}\right)=-\left(\hat{\pi}^{\dagger}\hat{\pi}\right)\hat{R}=-\hat{R}$$

لذا:

$$\hat{\pi}^{\dagger}\hat{R}^{n}\hat{\pi}=\pi^{\dagger}\hat{R}\pi\pi^{\dagger}\hat{R}\pi\pi^{\dagger}\hat{R}\pi...\pi^{\dagger}\hat{R}\hat{\pi}=\left(\pi^{\dagger}\hat{R}\pi\right)^{n}=\left(-\hat{R}\right)^{n}=\left(-1\right)^{n}\hat{R}^{n}$$

و به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که:

$$\hat{\pi}^{\dagger}\hat{P}^{n}\hat{\pi}=\left(-1\right)^{n}\hat{P}^{n}$$

تمرین ۲-۴۸

عملگر $\hat{A}=|\phi_1\rangle\langle\phi_1|+|\phi_2\rangle\langle\phi_2|+|\phi_3\rangle\langle\phi_3|-i|\phi_1\rangle\langle\phi_2|-|\phi_1\rangle\langle\phi_3|+i|\phi_2\rangle\langle\phi_1|-|\phi_3\rangle\langle\phi_1|$ را در نظر بگیرید که در آن $|\phi_1\rangle,|\phi_2\rangle,|\phi_3\rangle$ یک پایه‌ی کامل و متعامد - بهنجار تشکیل می‌دهند.

(آ) آیا $\hat{A}$ هرمیتی است؟ $\hat{A}^2$ را محاسبه کنید. آیا $\hat{A}^2$ عملگری تصویری است؟

(ب) ماتریس ۳×۳ نمایش دهنده‌ی $\hat{A}$ در پایه‌ی $|\phi_1\rangle,|\phi_2\rangle,|\phi_3\rangle$ را بیابید.

(پ) ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس $\hat{A}$ را پیدا کنید.

حل:

(آ)

برای به‌دست آوردن $A^{\dagger}$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left(C|\phi_i\rangle\langle\phi_j|\right)^{\dagger}=C^{*}|\phi_j\rangle\langle\phi_i|$$

پس:

$$A^{\dagger}=|\phi_1\rangle\langle\phi_1|+|\phi_2\rangle\langle\phi_2|+|\phi_3\rangle\langle\phi_3|+i|\phi_2\rangle\langle\phi_1|-|\phi_3\rangle\langle\phi_1|-i|\phi_1\rangle\langle\phi_2|-|\phi_1\rangle\langle\phi_3|=\hat{A}$$

پس $\hat{A}$ هرمیتی است.

برای محاسبه A^2 از رابطه $\langle\phi_i|\phi_j\rangle=\delta_{ij}$ استفاده می‌کنیم:

$$\hat{A}^2=\left(|\phi_1\rangle\langle\phi_1|+|\phi_2\rangle\langle\phi_2|+|\phi_3\rangle\langle\phi_3|-i|\phi_1\rangle\langle\phi_2|-|\phi_1\rangle\langle\phi_3|+i|\phi_2\rangle\langle\phi_1|-|\phi_3\rangle\langle\phi_1|\right)$$

$$\times\left(|\phi_1\rangle\langle\phi_1|+|\phi_2\rangle\langle\phi_2|+|\phi_3\rangle\langle\phi_3|-i|\phi_1\rangle\langle\phi_2|-|\phi_1\rangle\langle\phi_3|+i|\phi_2\rangle\langle\phi_1|-|\phi_3\rangle\langle\phi_1|\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$
\begin{aligned}
&= |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_3\rangle\langle\phi_3| - i|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_3| \\
&\quad - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_3| + i|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_2\rangle\langle\phi_1| - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_3\rangle\langle\phi_1| + 0 + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + 0 + 0 + 0 \\
&\quad + i|\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + 0 + 0 + 0 + 0 + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + 0 + 0 + 0 + 0 - |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + 0 \\
&\quad - i|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + 0 + 0 + 0 + 0 - i^2|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + 0 + 0 + 0 + 0 - |\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + 0 + 0 \\
&\quad + 0 + |\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + i|\phi_2\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + 0 + 0 + 0 - i^2|\phi_2\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - i|\phi_2\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_2| \\
&\quad + 0 + 0 + 0 - |\phi_2\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + 0 + 0 + 0 + i|\phi_2\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_2| + |\phi_2\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_2| + 0 + 0 + 0 = |\phi_1\rangle\langle\phi_1| \\
&\quad - i|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_1\rangle\langle\phi_2| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| + i|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1| - i|\phi_1\rangle\langle\phi_2| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1| \\
&\quad - |\phi_1\rangle\langle\phi_2| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + i|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| - i|\phi_2\rangle\langle\phi_2| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1| + i|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| \\
&= 3|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - 2i|\phi_1\rangle\langle\phi_2| - 2|\phi_1\rangle\langle\phi_2| + 2|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + 2i|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + 2|\phi_2\rangle\langle\phi_2| - 2|\phi_2\rangle\langle\phi_1| \\
&\quad - i|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + i|\phi_2\rangle\langle\phi_2| \neq A
\end{aligned}
$$

پس $\hat{A}$ یک عملگر تصویری نیست.

(ب)

$$A_{ij} = \langle\phi_i|A|\phi_j\rangle$$

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|\phi_2\rangle\langle\phi_2|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|\phi_3\rangle\langle\phi_3|\phi_1\rangle - i\langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_1\rangle - \langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_3|\phi_1\rangle \\
&\quad + i\langle\phi_1|\phi_2\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle - \langle\phi_1|\phi_3\rangle\langle\phi_1|\phi_1\rangle = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1
\end{aligned}
$$

به‌همین ترتیب می‌توان مابقی A_{ij}ها را به‌دست آورد، خواهیم داشت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ i & 1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

حال روش دومی را برای بررسی اینکه $\hat{A}$ عملگر تصویری است ارائه می‌دهیم و از نمایش ماتریسی A استفاده می‌کنیم.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ i & 1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ i & 1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2i & -2 \\ 2i & 2 & -i \\ -2 & i & 2 \end{pmatrix} \neq A$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ)

$$\det(A-a)=\begin{vmatrix}۱-a & -i & -۱\\ i & ۱-a & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱-a\end{vmatrix}=(۱-a)^۳-۲(۱-a)=(۱-a)\left[(۱-a)^۲-۲\right]=۰$$

از حل این معادله، مقادیر ۱ و $۱\pm\sqrt{۲}$ برای a به‌دست می‌آیند.

برای $a=۱$ داریم:

$$\begin{pmatrix}۱ & -i & -۱\\ i & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$x-iy-z=x$$

$$ix+y=y$$

$$-x+z=z$$

یا:

$$x=۰\ ,\ z=-iy$$

پس $|a_۱=۱\rangle$ بهنجار شده عبارت خواهد بود از:

$$|a_۱=۱\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۰\\ ۱\\ -i\end{pmatrix}$$

برای $a=۱\pm\sqrt{۲}$ خواهیم داشت:

$$|a_۲=۱+\sqrt{۲}\rangle=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}\sqrt{۲}\\ i\\ -۱\end{pmatrix}\quad,\quad|a_۲=۱-\sqrt{۲}\rangle=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}\sqrt{۲}\\ -i\\ ۱\end{pmatrix}$$

تمرین ۲-۴۹

هامیلتونی یک سیستم دو حالته به صورت زیر است:

$$\hat{H}=E(|\phi_۱\rangle\langle\phi_۱|-|\phi_۱\rangle\langle\phi_۲|-i|\phi_۱\rangle\langle\phi_۲|+i|\phi_۲\rangle\langle\phi_۱|)$$

که درآن $\langle\phi_۱|$ و $\langle\phi_۲|$ یک پایه کامل و متعامد بهنجار را تشکیل می‌دهند. $\mathbf{E}$ یک ثابت حقیقی دارای بعد انرژی است.

(آ) آیا $\hat{H}$ هرمیتی است؟ رد $\hat{H}$ را محاسبه کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب) ماتریس متناظر با $\hat{H}$ را در پایه‌ی $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ بیابید و ویژه مقدارها و ویژه بردارهای آن را محاسبه کنید. رد ماتریس را حساب کنید و آن را با نتیجه به‌دست آمده در (آ) مقایسه کنید.

(پ) $\left[\hat{H},|\phi\rangle\langle\phi|\right]$، $\left[\hat{H},|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\right]$ و $\left[\hat{H},|\phi_2\rangle\langle\phi_2|\right]$ را محاسبه کنید.

حل:

(آ)

$$H^\dagger = E\left(|\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_2\rangle\langle\phi_2| + i|\phi_2\rangle\langle\phi_1| - i|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\right) = H$$

پس H هرمیتی است.

$$Tr(H) = \langle\phi_1|H|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|H|\phi_2\rangle = E - E = 0$$

(ب)

$$H_{ij} = \langle\phi_i|H|\phi_j\rangle$$

$$H = E\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

می‌بینیم که H قطری نیست؛ اما با تغییر پایه‌های فضا می‌توان آن را قطری کرد. تبدیلی که تحت آن پایه‌های فضا تغییر می‌نماید، رد و دترمینان ماتریس‌ها را تغییر نمی‌دهد. چون اگر H در پایه‌های خودش نوشته شود به شکل زیر خواهد بود:

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$$

که h_1 و h_2 ویژه مقادیر آن می‌باشند. پس می‌توان گفت:

$$Tr(H) = h_1 + h_2 = 0$$

$$\det(H) = h_1 h_2 = -2E^2$$

پس:

$$h_1 = -h_2 = E\sqrt{2}$$

حال ویژه بردارهای H، یعنی $|h_1\rangle$ و $|h_2\rangle$ را می‌یابیم:

$$H|h_1\rangle = h_1|h_1\rangle$$

$$E\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E\sqrt{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x - iy = x\sqrt{2}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$y = ix\left(\sqrt{۲}-۱\right)$$

پس چون $|x|^۲ + |y|^۲ = ۱$، لذا:

$$|h_۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}}\begin{pmatrix} -۱ \\ i\left(\sqrt{۲}-۲\right)\end{pmatrix}$$

به‌همین ترتیب داریم:

$$|h_۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}}\begin{pmatrix} ۱ \\ -i\left(۱+\sqrt{۲}\right)\end{pmatrix}$$

(پ)

$$|\phi_۱\rangle\langle\phi_۱| = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\ ,\ |\phi_۲\rangle\langle\phi_۲| = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱\end{pmatrix}\ ,\ |\phi_۱\rangle\langle\phi_۲| = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰\end{pmatrix}$$

$$[H,|\phi_۱\rangle\langle\phi_۱|] = H|\phi_۱\rangle\langle\phi_۱| - |\phi_۱\rangle\langle\phi_۱|H = E\begin{pmatrix} ۱ & -i \\ i & -۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰\end{pmatrix} - E\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & -i \\ i & -۱\end{pmatrix}$$

$$= E\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ i & ۰\end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} -۱ & +i \\ ۰ & ۰\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} ۰ & i \\ i & ۰\end{pmatrix} = iE\left(|\phi_۱\rangle\langle\phi_۲| + |\phi_۲\rangle\langle\phi_۱|\right)$$

$$[H,|\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|] = E\begin{pmatrix} ۱ & -i \\ i & -۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱\end{pmatrix} - E\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & -i \\ i & -۱\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} ۰ & -i \\ ۰ & -۱\end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ -i & +۱\end{pmatrix}$$

$$= E\begin{pmatrix} ۰ & -i \\ -i & ۰\end{pmatrix} = -iE\left(|\phi_۱\rangle\langle\phi_۲| + |\phi_۲\rangle\langle\phi_۱|\right)$$

$$[H,|\phi_۱\rangle\langle\phi_۲|] = E\begin{pmatrix} ۱ & -i \\ i & -۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰\end{pmatrix} - E\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & -i \\ i & -۱\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & i\end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} -i & +۱ \\ ۰ & ۰\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} -i & ۲ \\ ۰ & i\end{pmatrix}$$

$$= E\left(-i|\phi_۱\rangle\langle\phi_۱| + ۲|\phi_۱\rangle\langle\phi_۲| + i|\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|\right)$$

تمرین ۲-۵۰

ذره‌ای را در نظر بگیرید که محدود به حرکت در راستای مثبت محور x است و هامیلتونی آن $\hat{H} = -\varepsilon d^۲/dx^۲$ است که در آن ε یک ثابت مثبت حقیقی دارای بعد انرژی است.

(آ) تابع موج متناظر با ویژه مقدار انرژی ۹ε را بیابید. (مطمئن شوید تابعی که پیدا می کنید در همه جای راستای مثبت محور x، متناهی و انتگرال‌پذیر مجذوری است). این تابع موج را بهنجار کنید.

(ب) احتمال یافتن ذره را در ناحیه‌ی $۰ \le x \le ۱۵$ حساب کنید.

(پ) آیا تابع موج به دست آمده در (آ) ویژه تابعی از عملگر $\hat{A} = \frac{d}{dx} - ۷$ است؟

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ت) جابه‌جاگر $\left[\hat{H},\hat{A}\right]$ را محاسبه کنید.

حل:

(آ)

اگر ویژه تابع انرژی متناظر با ویژه مقدار ۹ε عملگر هامیلتونی را با $\psi_{۹\varepsilon}(x)$ نشان دهیم، داریم:

$$\hat{H}\psi_{۹\varepsilon}(x)=۹\varepsilon\psi_{۹\varepsilon}(x)$$

و:

$$\varepsilon\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}\psi_{۹\varepsilon}(x)=۹\varepsilon\psi_{۹\varepsilon}(x)$$

و یا:

$$\frac{d^{۲}\psi_{۹\varepsilon}(x)}{dx^{۲}}-۹\psi_{۹\varepsilon}(x)=۰$$

در نتیجه:

$$\psi_{۹\varepsilon}(x)=e^{\pm ۳x}$$

از آنجا که $\psi_{۹\varepsilon}(x)$ باید در $x=۰$ پیوسته و در $x\to\pm\infty$ متناهی باشد، در نتیجه:

$$\psi_{۹\varepsilon}(x)=\begin{cases}Ae^{+۳x} & ;\quad x<۰\\ Ae^{-۳x} & ;\quad x>۰\end{cases}$$

از بهنجارش $\psi_{۹\varepsilon}(x)$، A را می‌یابیم:

$$۱=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\psi_{۹\varepsilon}(x)\right|^{۲}dx=\left|A\right|^{۲}\int_{-\infty}^{۰}e^{۶x}dx+\left|A\right|^{۲}\int_{۰}^{+\infty}e^{-۶x}dx=\frac{\left|A\right|^{۲}}{۶}\left\{\left[e^{۶x}\right]_{-\infty}^{۰}-\left[e^{۶x}\right]_{۰}^{+\infty}\right\}$$

$$=\frac{\left|A\right|^{۲}}{۶}(۱+۱)=\frac{\left|A\right|^{۲}}{۳}$$

با فرض حقیقی بودن و مثبت بودن A خواهیم داشت:

$$A=\sqrt{۳}$$

(ب)

$$P=\int_{۰}^{۱۵}\left|\psi(x)\right|^{۲}dx=۳\int_{۰}^{۱۵}e^{-۶x}dx=-\frac{۳}{۶}\left[e^{-۶x}\right]_{۰}^{۱۵}=-\frac{۱}{۲}\left(e^{-۹۰}-۱\right)\simeq ۵۰\%$$

(پ)

$$\hat{A}\psi_{۹\varepsilon}(x)=\left(\frac{d}{dx}-۷\right)\psi_{۹\varepsilon}(x)=\left(\frac{d}{dx}-۷\right)A\begin{cases}e^{۳x} & ;\quad x<۰\\ e^{-۳x} & ;\quad x>۰\end{cases}=A\begin{cases}-۴e^{۳x} & ;\quad x<۰\\ -۱۰e^{-۳x} & ;\quad x>۰\end{cases}$$

پس $\psi_{۹\varepsilon}(x)$ ویژه تابع $\hat{A}$ نیست.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ت)

$$\left[\hat{H},\hat{A}\right]=\left[\varepsilon\frac{d^{۲}}{dx^{۲}},\frac{d}{dx}-۲\right]=\varepsilon\left[\frac{d^{۲}}{dx^{۲}},\frac{d}{dx}\right]+\varepsilon\left[\frac{d^{۲}}{dx^{۲}},-۲\right]=۰$$

تمرین ۲-۵۱

توابع موج زیر را در نظر بگیرید:

$$\psi(x,y)=\sin ۲x\cos ۵x\ ,\ \phi(x,y)=e^{-۲(x^{۲}+y^{۲})}\ ,\ \chi(x,y)=e^{-i(x+y)}$$

(آ) آیا این توابع موج،ویژه تابعی از $A=\hat{\partial}/\partial x+\partial/\partial y$ هستند یا نه؟

(ب) آیا این توابع موج ویژه تابعی از $\hat{B}=\partial^{۲}/\partial x^{۲}+\partial^{۲}/\partial y^{۲}+۱$ هستند یانه؟

(پ) اثر $\hat{A}\hat{B}$ و $\hat{B}\hat{A}$ را روی هریک از این توابع موج محاسبه کرده و $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ را نتیجه بگیرید.

حل:

(آ)

$$\hat{A}\psi(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(x,y)=\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}$$

$$=۲\cos ۲x\cos ۵y-۵\sin ۲x\sin ۵y$$

$$\hat{A}\phi(x,y)=\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}=-۴xe^{-۲\left(x^{۲}+y^{۲}\right)}-ie^{-i(x+y)}=-ie^{-i(x+y)}=-iX(x,y)$$

$$\hat{A}\phi(x,y)=\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}=-۴xe^{-۲\left(x^{۲}+y^{۲}\right)}-۴ye^{-۲\left(x^{۲}+y^{۲}\right)}=-۴(x+y)\phi(x,y)$$

$$\hat{A}\chi(x,y)=\frac{\partial\chi(x,y)}{\partial\chi}+\frac{\partial\chi(x,y)}{\partial y}=-ie^{-i(x+y)}-ie^{-i(x+y)}=-۲ie^{-i(x+y)}=-۲i\chi(x,y)$$

پس فقط $\chi(x,y)$ ویژه تابع عملگر $\hat{A}$ می‌باشد.

(ب)

$$\hat{B}\psi(x,y)=\frac{\partial^{۲}\psi(x,y)}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}\psi(x,y)}{\partial y^{۲}}+\psi(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(۲\cos ۲x\,c\text{-}s۵y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-۵\sin ۲x\sin ۵y\right)$$

$$+\sin ۲x\cos ۵y=-۴\sin ۲x\cos ۵y-۲۵\sin ۲x\cos ۵y+\sin ۲x\cos ۵y$$

$$=-۲۸\sin ۲x\cos ۵y=-۲۸\psi(x,y)$$

$$\hat{B}\phi(x,y)=\frac{\partial^{۲}\phi(x,y)}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}\phi(x,y)}{\partial y^{۲}}+\phi(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-۴xe^{-۲\left(x^{۲}+y^{۲}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-۴ye^{-۲\left(x^{۲}+y^{۲}\right)}\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$+c^{-2\left(x^2+y^2\right)}=-4c^{-2\left(x^2+y^2\right)}+16x^2c^{-2\left(x^2+y^2\right)}-4c^{-2\left(x^2+y^2\right)}+16y^2c^{-2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$+c^{-2\left(x^2+y^2\right)}=\left(16x^2+16y^2-7\right)c^{-2\left(x^2+y^2\right)}=\left(16x^2+16y^2-7\right)\phi(x,y)$$

$$\hat{B}\chi(x,y)=-c^{-1(x+y)}-c^{-1(x+y)}+c^{-1(x+y)}=-c^{-1(x+y)}=-\chi(x,y)$$

پس در اینجا $\psi(x,y)$ و $\chi(x,y)$ ویژه تابع عملگر $\hat{B}$ هستند.

(ب)

$$\hat{A}\hat{B}\psi(x,y)=\hat{A}\left(-28\psi(x,y)\right)=-28\hat{A}\psi(x,y)=-56\cos 2x\cos 5y+140\sin 2x\sin 5y$$

$$\hat{B}\hat{A}\psi(x,y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+1\right)\left(2\cos 2x\cos 5y-5\sin 2x\sin 5y\right)$$

$$=-8\cos 2x\cos 5y+20\sin 2x\sin 5y-50\cos 2x\cos 5y+125\sin 2x\cos 5y$$

$$+2\cos 2x\cos 5y-5\sin 2x\sin 5y=-56\cos 2x\cos 5y+140\sin 2x\sin 5y$$

$$\hat{A}\hat{B}\phi(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\left(16x^2+16y^2-7\right)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}\right]$$

$$=32xe^{-2\left(x^2+y^2\right)}-4xe^{-2\left(x^2+y^2\right)}\left(16x^2+16y^2-7\right)+32ye^{-2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$-4ye^{-2\left(x^2+y^2\right)}\left(16x^2+16y^2-7\right)=4(x+y)\left(-16x^2-16y^2+15\right)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\hat{B}\hat{A}\phi(x,y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+1\right)\left[-4(x+y)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[-4e^{-2\left(x^2+y^2\right)}+16x(x+y)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[-4e^{-2\left(x^2+y^2\right)}+16y(x+y)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}\right]-4(x+y)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$=16(2x+y)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}-4xe^{-2\left(x^2+y^2\right)}\left(16x^2+16xy-4\right)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$+16(2y+x)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}-4ye^{-2\left(x^2+y^2\right)}\left(16y^2+16xy-4\right)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$-4(x+y)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}=4(x+y)\left(-16x^2-16y^2+15\right)e^{-2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]\phi(x,y)=AB\phi(x,y)-BA\phi(x,y)=0$$

و به‌همین ترتیب:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]\chi(x,y)=0$$

زیرا در حالت کلی $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0$ و دلیل آن نیز این است که:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m,\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\right]=0$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m,\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\right]=0$$

$$[A,B]=\left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+1\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]+\left[\frac{\partial}{dx},1\right]+\left[\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial y},1\right]=0+0+0+0+0+0=0$$

تمرین ۲-۵۲

(آ) آیا حالت $\psi(\theta,\phi)=e^{-2i\phi}\cos\theta$ ویژه تابعی از $\hat{A}_\phi=\partial/\partial\phi$ یا $\hat{B}_\theta=\partial/\partial\theta$ است یا نه؟

(ب) آیا $\hat{A}_\phi$ و $\hat{B}_\theta$ هرمیتی هستند؟

(پ) عبارت‌های $\langle\psi|\hat{A}_\phi|\psi\rangle$ و $\langle\psi|\hat{B}_\theta|\psi\rangle$ را حساب کنید.

(ت) جابجاگر $\left[\hat{A}_\phi,\hat{B}_\theta\right]$ را بیابید.

حل:

(آ)

$$\hat{A}_\phi\psi(\theta,\phi)=\frac{\partial}{\partial\phi}\left[e^{-2i\phi}\cos\theta\right]=-2ie^{-2i\phi}\cos\theta=-2i\psi(\theta,\phi)$$

$$\hat{B}_\theta\psi(\theta,\phi)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[e^{-2i\phi}\cos\theta\right]=-e^{-2i\phi}\sin\theta$$

بنابراین $\psi(\theta,\phi)$ ویژه تابع $\hat{A}_\phi$ هست اما ویژه تابع $\hat{B}_\theta$ نمی‌باشد.

(ب)

در مختصات قطبی (r,θ,ϕ) داریم:

$$x=r\sin\theta\cos\phi$$

$$y=r\sin\theta\sin\phi$$

$$z=r\cos\theta$$

بنابراین:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{\partial}{\partial f}=\frac{\partial x}{\partial f}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial f}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial f}\frac{\partial}{\partial z}=(-r\sin\theta\sin\phi)\frac{\partial}{\partial x}+(r\sin\theta\cos\phi)\frac{\partial}{\partial y}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$$

با توجه به اینکه:

$$\left[y,\frac{\partial}{\partial x}\right]=\left[x,\frac{\partial}{\partial y}\right]=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\dagger}=-\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\dagger}=-\frac{\partial}{\partial y}$$

داریم:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^{\dagger}=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\dagger}y^{\dagger}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\dagger}x^{\dagger}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)x=y\frac{\partial}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial\phi}$$

از آنجا که ویژه مقدار آن حقیقی نیست پس هرمیتی نیست.

پس $\frac{\partial}{\partial\phi}$ پاد هرمیتی است.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial z}=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}=-\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{\dagger}=-\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\dagger}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\dagger}=-\left(\frac{-\partial}{\partial z}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=+\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial\theta}$$

پس $\frac{\partial}{\partial\theta}$ نیز پاد هرمیتی است.

(پ)

$$\left\langle\psi\middle|\hat{A}_{\phi}\middle|\psi\right\rangle=\left\langle\psi\middle|-3i\middle|\psi\right\rangle=-3i\left\langle\psi\middle|\psi\right\rangle=-3i$$

برای یافتن $\left\langle\hat{B}_{\theta}\right\rangle$، ابتدا $\psi(\theta,\phi)$ را بهنجار می‌کنیم.

$$\psi(r,\theta,\phi)=f(r)e^{-3i\phi}\cos\theta$$

$$\psi^{*}(r,\theta,\phi)=f^{*}(r)e^{3i\phi}\cos\theta$$

$$\int_{W}\psi(r,\theta,\phi)\psi^{*}(r,\theta,\phi)dv=\int_{0}^{+\infty}\left|f(r)\right|^2 r^2dr\int_{0}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\int_{0}^{2\pi}d\phi$$

$$=2\pi\left(\frac{-1}{3}\cos^3\theta\right)_{0}^{\pi}\int_{0}^{+\infty}r^2\left|f(r)\right|^2dr=\frac{4\pi}{3}\int_{0}^{+\infty}r^2\left|f(r)\right|^2dr=1$$

$$\left\langle\psi\middle|\hat{B}_{\theta}\middle|\psi\right\rangle=\int_{W}dV\,\psi^{*}(r,\theta,\phi)\hat{B}_{\theta}\psi(r,\theta,\phi)=\int_{W}dV\,f^{*}(r)e^{+3i\phi}\cos\theta\,f(r)e^{-3i\phi}(-\sin\theta)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \int_{۰}^{+\infty} r^{۲} \left|f(r)\right|^{۲} dr \int_{۰}^{۲\pi} d\phi \int_{۰}^{\pi} \left(-\sin^{۲}\theta \cos\theta\right) d\theta = \frac{۳}{۴\pi}(۲\pi)\left(\frac{-۱}{۳}\sin^{۳}\theta\right)_{۰}^{\pi} = ۰$$

(ت)

$$\left[\hat{A}_{\phi}, \hat{B}_{\theta}\right] = \hat{A}_{\phi}\hat{B}_{\theta} - \hat{B}_{\theta}\hat{A}_{\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{\partial^{۲}}{\partial\phi\,\partial\theta} - \frac{\partial^{۲}}{\partial\phi\,\partial\theta} = ۰$$

منظور از W در $\int_{W}$، تمام فضا است.

تمرین ۲-۵۳

عملگر $\hat{A} = (\hat{X}\frac{d}{dx} + ۲)$ رادر نظر بگیرید.

(آ) ویژه تابع $\hat{A}$ متناظر با ویژه مقدار صفر را بیابید. آیا این تابع بهنجارشدنی است؟

(ب) آیا عملگر $\hat{A}$ هرمیتی است؟

(پ) $\left[\hat{A}, \hat{X}\right], \left[\hat{A}, d/dx\right], \left[\hat{A}, d^{۲}/dx^{۲}\right], \left[\hat{X}, \left[\hat{A}, \hat{X}\right]\right]$ و $\left[d/dx, \left[\hat{A}, d/dx\right]\right]$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\hat{A}\psi(x) = ۰\psi(x)$$

$$\left(\hat{X}\frac{d}{dx} + ۲\right)\psi(x) = x\frac{d\psi(x)}{dx} + ۲\psi(x) = ۰$$

$$\frac{d\psi(x)}{\psi(x)} = -\frac{۲\,dx}{x}$$

$$\ln\psi(x) = -۲\ln x + \ln c = \ln\frac{c}{x^{۲}}$$

$$\psi(x) = \frac{c}{x^{۲}}$$

حال $\psi(x)$ را بهنجار می‌کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\psi(x)\right|^{۲} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|c\right|^{۲}}{x^{۴}} dx = ۲\left|c\right|^{۲} \int_{۰}^{+\infty} \frac{dx}{x^{۴}} = ۲\left|c\right|^{۲}\left[\frac{-۱}{۳x^{۳}}\right]_{۰}^{+\infty} = ۱$$

$$\left|c\right|^{۲} = \frac{۱}{۲\left[\frac{-۱}{۳x^{۳}}\right]_{۰}^{+\infty}} = \frac{۱}{+\infty} = ۰$$

$$\left|c\right| = ۰$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

بنابراین $\psi(x)$ قابل بهنجار شدن نیست.

(ب)

$$A^\dagger = \left(\hat{X}\frac{d}{dx} + ۲\right)^\dagger = \left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger \hat{X}^\dagger + ۲ = -\left(\frac{d}{dx}\right)X + ۲ \neq A^\dagger$$

پس $\hat{A}$ هرمیتی نیست.

(پ)

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{i}{\hbar}\hat{P}$$

$$A = \frac{i}{\hbar}\hat{X}\hat{P} + ۲$$

$$\left[\hat{A}, \hat{X}\right] = \left[\frac{i}{\hbar}\hat{X}\hat{P} + ۲, \hat{X}\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{X}\hat{P}, \hat{X}\right] = \frac{i}{\hbar}\left(-i\hbar X\right) = \hat{X}$$

$$\left[\hat{A}, \frac{d}{dx}\right] = \left[\frac{i}{\hbar}\hat{X}\hat{P} + ۲, \frac{i}{\hbar}\hat{P}\right] = \frac{i^۲}{\hbar^۲}\left[\hat{X}\hat{P}, \hat{P}\right] = \frac{-۱}{\hbar^۲} i\hbar P = \frac{-iP}{\hbar} = \frac{-i}{\hbar}\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} = -\frac{d}{dx}$$

$$\left[A, \frac{d^۲}{dx^۲}\right] = \left[\frac{i}{\hbar}\hat{X}\hat{P} + ۲, \frac{-\hat{P}^۲}{\hbar^۲}\right] = \frac{-i^۲}{\hbar^۳}\left[\hat{X}\hat{P}, P^۲\right] = \frac{-i}{\hbar^۲}۲i\hbar P^۲ = \frac{۲}{\hbar^۲}\left(-\hbar^۲\frac{d^۲}{dx^۲}\right) = -۲\frac{d^۲}{dx^۲}$$

$$\left[X, \left[A, \hat{X}\right]\right] = \left[X, X\right] = ۰$$

$$\left[\frac{d}{dx}, \left[A, \frac{d}{dx}\right]\right] = \left[\frac{d}{dx}, \frac{-d}{dx}\right] = ۰$$

تمرین ۲-۵۴

اگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دو عملگر هرمیتی باشند، ویژه مقدارهای متناظر آن‌ها را بیابید به طوری که $\hat{A}^۲ = ۲\hat{I}$ و $\hat{B}^۴ = \hat{I}$ که در آن $\hat{I}$ عملگر واحد است.

حل:

اگر $|a\rangle$ ویژه حالت $\hat{A}$ متناظر با ویژه مقدار a باشد داریم:

$$A|a\rangle = a|a\rangle$$

$$A^۲|a\rangle = A\left(A|a\rangle\right) = A\left(a|a\rangle\right) = aA|a\rangle = aa|a\rangle = a^۲|a\rangle$$

از طرفی داریم:

$$A^۲|a\rangle = ۲I|a\rangle = ۲|a\rangle$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

بنابراین:

$$a^2|a\rangle = 2|a\rangle$$
$$\left(a^2 - 2\right)|a\rangle = 0$$

چون $|a\rangle$ برداری غیر صفر است، پس:

$$a^2 - 2 = 0$$
$$a = \pm\sqrt{2}$$

به‌همین ترتیب در مورد b ویژه مقادیر عملگر $\hat{B}$ نیز داریم:

$$b^4 = 1$$
$$b = \pm 1 \ , \ \pm i$$

اما چون $\hat{B}$ هرمیتی است، پس ویژه مقادیر آن باید حقیقی باشند و بنابراین فقط $b = \pm 1$ قابل قبول است.

تمرین ۲-۵۵

فضای هیلبرت تابع مختلط دو متغیره‌ی $\psi(x,y)$ را درنظر بگیرید. یک عملگر جایگشت به‌وسیله‌ی اثر آن روی $\psi(x,y)$ به این‌صورت تعریف می‌شود:

$$\hat{\pi}\psi(x,y) = \psi(y,x)$$

(آ) ثابت کنید که عملگر $\hat{\pi}$ خطی و هرمیتی است.

(ب) نشان دهید که $\hat{\pi}^2 = \hat{I}$. ویژه مقدارها را بیابید و نشان دهید که ویژه تابع‌های $\hat{\pi}$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آیند:

$$\psi_+(x,y) = \frac{1}{2}[\psi(x,y) + \psi(y,x)] \quad \text{و} \quad \psi_-(x,y) = \frac{1}{2}[\psi(x,y) - \psi(y,x)].$$

حل:

(آ)

$$\begin{aligned}\langle\hat{\pi}\rangle - \langle\hat{\pi}\rangle^* &= \int dx\,dy\,\psi^*(x,y)\,\pi(x,y) - \int \pi\psi(x,y)^*\,\psi(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int dx\,dy\,\psi^*(x,y)\,\psi(y,x) - \int \psi^*(y,x)\,\psi(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int dx\,dy\,\psi^*(x,y)\,\psi(y,x) - \int \psi^*(x,y)\,\psi(y,x)\,dy\,dx = 0\end{aligned}$$

پس $\hat{\pi}$ هرمیتی است.

$$\hat{\pi}\left(c_1\psi(x,y) + c_2\phi(x,y)\right) = c_1\psi(y,x) + c_2\phi(y,x) = c_1\hat{\pi}\,\psi(x,y) + c_2\hat{\pi}\,\phi(x,y)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پس $\hat{\pi}$ خطی نیز می‌باشد.

(ب)

$$\hat{\pi}^{۲}\psi(x,y)=\hat{\pi}\psi(y,x)=\psi(x,y)$$

پس:

$$\hat{\pi}^{۲}=I$$

اگر $|\pi\rangle$ ویژه حالت عملگر $\hat{\pi}$ متناظر با ویژه مقدار π باشد داریم:

$$\hat{\pi}|\pi\rangle=\pi|\pi\rangle$$

$$\hat{\pi}^{۲}|\pi\rangle=\pi^{۲}|\pi\rangle=|\pi\rangle$$

پس:

$$\pi^{۲}=۱$$

$$\pi=\pm ۱$$

از طرفی:

$$\hat{\pi}\psi_{\pm}(x,y)=\frac{۱}{۲}\hat{\pi}\psi(x,y)\pm\frac{۱}{۲}\hat{\pi}\psi(y,x)=\frac{۱}{۲}[\psi(y,x)\pm\psi(x,y)]=\pm\psi_{\pm}(x,y)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

فصل سوم

اصول موضوعه‌ی مکانیک کوانتومی

تمرین ۳-۱

ذره‌ای در یک جعبه‌ی پتانسیل با دیواره‌هایی در $x=0$ و $x=a$ (پتانسیل برای $x<0$ و $x>a$ نامتناهی و بین آن‌ها صفر است) در زمان اولیه دارای تابع موج زیر است:

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{5a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\frac{2}{\sqrt{5a}}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

(آ) نتایج ممکن اندازه‌گیری انرژی سیستم و احتمال‌های متناظر را بیابید.

(ب) شکل تابع موج را پس از یک چنین اندازه‌گیری‌ای پیدا کنید.

(پ) اگر پس از آن انرژی بی‌درنگ اندازه‌گیری شود، احتمال‌های مربوط به این جواب‌های ممکن چقدر هستند؟

حل:

در اینجا باید توجه داشته باشیم که ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی یک ذره‌ی محصور در بازه $0<x<a$ از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\quad;\quad n=1,2,\ldots$$

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

$$\psi(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\phi_۱(x)+\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\phi_۲(x)$$

چون $\psi(x)$ بهنجار نیست ابتدا آن را بهنجار می‌کنیم. برای این منظور $\psi(x)$ را بر اندازه‌ی آن یعنی $\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}=\sqrt{\left(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right)^۲+\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\right)^۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$\psi(x)$ بهنجار شده را $\psi_N(x)$ می‌نامیم. پس:

$$\psi_N(x)=\frac{\psi(x)}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}}=\sqrt{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\phi_۱(x)+\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\phi_۲(x)\right)=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\phi_۱(x)+\frac{۲}{\sqrt{۵}}\phi_۲(x)$$

در اینجا واضح است که در اندازه‌گیری انرژی مقادیر $E_۱$ و $E_۲$ حاصل می‌شوند و اگر این احتمال‌ها را به ترتیب $P_۱(E_۱)$ و $P_۲(E_۲)$ بنامیم، داریم:

$$P_۱(E_۱)=\left|\langle\phi_۱|\psi_N\rangle\right|^۲=\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)^۲=\frac{۱}{۵}$$

$$P_۲(E_۲)=\left|\langle\phi_۲|\psi_N\rangle\right|^۲=\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)^۲=\frac{۴}{۵}$$

(ب)

اگر پس از اندازه‌گیری انرژی مقدار $E_۱$ حاصل شود، تابع موج سیستم بلافاصله به $\phi_۱(x)$ و اگر مقدار $E_۲$ حاصل شود تابع موج آن بلافاصله به $\phi_۲(x)$ تغییر می‌نماید.

(پ)

اگر در اندازه‌گیری انرژی مقدار $E_۱$ به‌دست آید، آنگاه تابع موج سیستم $\phi_۱(x)$ است و چون این یک حالت پایدار است لذا در اندازه‌گیری‌های بعدی انرژی نیز همین مقدار حاصل خواهد شد و احتمال اینکه مقدار انرژی $E_۲$ به‌دست آید صفر است و بالعکس.

تمرین ۳-۲

فرض کنید $\psi_n(x)$ حالت‌های مانای متعامد بهنجار سیستمی با انرژی E_n باشند. اگر تابع موج بهنجار سیستم در زمان $t=۰$، $\psi(x,۰)$ باشد و نیز اندازه‌گیری انرژی سیستم مقادیر $E_۱$ با احتمال $\frac{۱}{۲}$، $E_۲$ با احتمال $\frac{۳}{۸}$ و $E_۳$ با احتمال $\frac{۱}{۸}$ به‌دست آیند:

(آ) کلی‌ترین بسط را برای $\psi(x,۰)$ که در برگیرنده‌ی این اطلاعات باشد بنویسید.

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب) بسط تابع موج سیستم در زمان t، $(\psi(x,t))$ چیست؟

(پ) نشان دهید که مقدار چشم‌داشتی هامیلتونی با زمان تغییر نمی‌کند.

حل:

(آ)

$$P_1(E_1)=\left|\langle\psi_1|\psi(0)\rangle\right|^2=\frac{1}{2}$$

$$P_2(E_2)=\left|\langle\psi_2|\psi(0)\rangle\right|^2=\frac{3}{8}$$

$$P_3(E_3)=\left|\langle\psi_3|\psi(0)\rangle\right|^2=\frac{1}{8}$$

چون :

$$P_1(E_1)+P_2(E_2)+P_3(E_3)=1$$

پس:

$$P_n(E_n)=\left|\langle\psi_n|\psi(0)\rangle\right|^2=0\;;\quad n\neq 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3$$

اما $|\psi(0)\rangle$ را می‌توان بر حسب $|\psi_n\rangle$ها بسط داد:

$$|\psi(0)\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}C_n|\psi_n\rangle$$

که در این رابطه $C_n=\langle\psi_n|\psi(0)\rangle$. پس:

$$|\psi(0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1\rangle+\sqrt{\frac{3}{8}}|\psi_2\rangle+\frac{1}{\sqrt{8}}|\psi_3\rangle$$

و یا:

$$|\psi(x,0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)+\sqrt{\frac{3}{8}}\psi_2(x)+\frac{1}{\sqrt{8}}\psi_3(x)$$

(ب)

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-iE_1t}{h}}\psi_1(x)+\sqrt{\frac{3}{8}}e^{\frac{-iE_2t}{h}}\psi_2(x)+\frac{1}{\sqrt{8}}e^{\frac{-iE_3t}{h}}\psi_3(x)$$

در حالت کلی $\psi(x,t)=e^{\frac{-i\hat{H}t}{h}}\psi(x,0)$ است. اما اگر $\psi(x,0)$ را بر حسب ویژه توابع انرژی بسط دهیم یعنی:

$$\psi(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\psi_n(x)$$

به‌طوری‌که:

$$\hat{H}\psi_n(x)=E_n\psi_n(x)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

آنگاه:

$$\psi(x,t)=e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}\sum C_n\psi_n=\sum C_n e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}\psi_n(x)=\sum C_n e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}}\psi_n(x)$$

(پ)

$$E(0)=\sum P_n(E_n)E_n=P_1E_1+P_2E_2+P_3E_3=\frac{1}{2}E_1+\frac{3}{8}E_2+\frac{1}{8}E_3$$

$$E(t)=\langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$$\langle\psi(t)|=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{iE_1t}{\hbar}}\langle\psi_1|+\frac{3}{\sqrt{8}}e^{\frac{iE_2t}{\hbar}}\langle\psi_2|+\frac{1}{\sqrt{8}}e^{\frac{iE_3t}{\hbar}}\langle\psi_3|$$

$$H\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}E_1|\psi_1\rangle+\sqrt{\frac{3}{8}}e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}E_1|\psi_2\rangle+\frac{1}{\sqrt{8}}e^{-\frac{iE_3t}{\hbar}}E_2|\psi_3\rangle$$

چون $\langle\psi_m|\psi_n\rangle=\delta_{mn}$ پس:

$$E(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{iE_1t}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-iE_1t}{\hbar}}E_1+\sqrt{\frac{3}{8}}e^{\frac{iE_2t}{\hbar}}\sqrt{\frac{3}{8}}e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}}E_2+\frac{1}{\sqrt{8}}e^{\frac{iE_3t}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{8}}e^{\frac{-iE_3t}{\hbar}}E_3$$

$$=\frac{1}{2}E_1+\frac{3}{8}E_2+\frac{1}{8}E_3=E(0)$$

تمرین ۳-۳

نوترونی را در نظر بگیرید که در یک چاه پتانسیلی نامتناهی به پهنای $a=8\,\text{fm}$ محدود است. در زمان $t=0$ فرض می‌شود که نوترون در حالت زیر است:

$$\psi(x,0)=\sqrt{\frac{4}{7a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\sqrt{\frac{2}{7a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)+\sqrt{\frac{8}{7a}}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

(آ) اگر اندازه‌گیری انرژی روی سیستم انجام شود، چه مقادیری برای انرژی و با چه احتمال‌هایی به‌دست خواهند آمد؟ پاسخ خود را برحسب MeV (جرم نوترون $mc^2\simeq 939\text{MeV}$ و $\hbar c\simeq 197\,\text{Mev.fm}$ است) بیان کنید.

(ب) اگر این اندازه‌گیری روی شمار زیادی از سیستم‌های مشابه تکرار شود، مقدار میانگین انرژی که به‌دست خواهد آمد چیست؟ پاسخ خود را برحسب MeV بیان کنید.

(پ) با به‌کارگیری اصل عدم قطعیت، مرتبه‌ی بزرگی سرعت نوترون در این چاه را به‌صورت تابعی از سرعت نور c به دست آورید.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی برای ذره در جعبه‌ی $0 < x < a$ از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \; ; \; n = 1, 2, \ldots$$

(آ)

$$\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{7}}\phi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{7}}\phi_2(x) + \frac{2}{\sqrt{7}}\phi_3(x)$$

با توجه به شکل $\psi(x, 0)$ واضح است که در اندازه‌گیری انرژی یکی از مقادیر E_1، E_2 یا E_3 به‌دست می‌آید:

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2c^2}{2mc^2a^2} \simeq \frac{5n^2\hbar^2c^2}{mc^2a^2}$$

$$E_1 = \frac{5 \times 1^2 \times 197^2}{939 \times 8^2} \simeq 3/23\,\text{MeV}$$

$$E_2 = 4E_1 = 12/92\,\text{MeV}$$

$$E_3 = 9E_1 = 29/07\,\text{MeV}$$

(ب)

$$E = \langle \hat{H} \rangle = P_1E_1 + P_2E_2 + P_3E_3 = \left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2 \times 3/23 + \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 \times 12/92 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 \times 29/07$$
$$= 19/38\,\text{MeV}$$

(پ)

در اینجا عدم قطعیت در مکان ذره از مرتبه‌ی a خواهد بود.

$$\Delta x \simeq a$$

بنابراین طبق اصل عدم قطعیت:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

لذا اگر تکانه‌ی ذره را از مرتبه‌ی Δp درنظر بگیریم، داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$p \simeq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2a} = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v^2 = \frac{c^2}{1+\frac{4a^2 m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2}} \simeq 2\times 10^{-4} c^2$$

$$v = 10^{-2}\sqrt{2}c = 0/014c$$

تمرین ۳-۴

هامیلتونی نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی را در نظر بگیرید.

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}\hat{X}^2 \quad \text{با} \quad \hat{P} = -i\frac{d}{dx}$$

(آ) نشان دهید که دو تابع موج $\psi_0(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ و $\psi_1(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$ ویژه توابع $\hat{H}$ با ویژه مقدارهای $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ هستند.

(ب) مقدار ضریب α را طوری بیابید که $\psi_2(x) = (1+\alpha x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}$ بر $\psi_0(x)$ عمود باشد. سپس نشان دهید که $\psi_2(x)$ ویژه تابع $\hat{H}$ با ویژه مقدار $\frac{5}{2}$ است.

حل:

(آ) برای بررسی اینکه آیا $\psi_0(x)$ و $\psi_1(x)$ ویژه توابع هامیلتونی هستند، $\hat{H}$ را بر این دو تابع موج اثر می‌دهیم:

$$\hat{H}\psi_0(x) = \left(\frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{\hat{X}^2}{2}\right)\psi_0(x) = \left(\frac{1}{2}\left(-i\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{\hat{X}^2}{2}\right)\psi_0(x) = \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}X^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{-x^2}{2}} - x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{-x^2}{2}} = \frac{1}{2}\psi_0(x)$$

$$\hat{H}\psi_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 3x\right)e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{3}{2}xe^{\frac{-x^2}{2}} = \frac{3}{2}\psi_1(x)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

بی $\psi_{\circ}(x)$ و $\psi_{۱}(x)$ ویژه توابع عملگر هامیلتونی به‌ترتیب با ویژه مقادیر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ می‌باشند.

(ب) شرط تعامد $\psi_{\circ}(x)$ و $\psi_{۲}(x)$ آنست که:

$$\langle \psi_{\circ} | \psi_{۲} \rangle = \circ$$

پس:

$$\langle \psi_{\circ} | \psi_{۲} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_{\circ}^{*}(x)\psi_{۲}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}\left(۱+\alpha x^{۲}\right)e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(۱+\alpha x^{۲}\right)e^{-x^{۲}}dx$$

$$= \sqrt{\pi} + \alpha\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}\right) = \left(۱+\frac{\alpha}{۲}\right)\sqrt{\pi} = \circ$$

پس:

$$\alpha = -۲$$

حال $\hat{H}$ را بر $\psi_{۲}(x)$ اثر می‌دهیم.

$$\hat{H}\psi_{۲}(x) = \left(-\frac{۱}{۲}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}} + \frac{۱}{۲}x^{۲}\right)\left(۱-۲x^{۲}\right)e^{\frac{-x^{۲}}{۲}} = -\frac{۱}{۲}\frac{d}{dx}\left[\left(۲x^{۳}-۵x\right)e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}\right] + \frac{۱}{۲}x^{۲}\left(۱-۲x^{۲}\right)e^{\frac{-x^{۲}}{۲}}$$

$$= -\frac{۱}{۲}\left[\left(۶x^{۲}-۵\right) - x\left(۲x^{۳}-۵x\right)\right]e^{\frac{-x^{۲}}{۲}} + \frac{۱}{۲}x^{۲}\left(۱-۲x^{۲}\right)e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}$$

$$= -\frac{۱}{۲}\left[\left(۶x^{۲}-۵\right) - x\left(۲x^{۳}-۵x\right)\right]e^{\frac{-x^{۲}}{۲}} + \frac{۱}{۲}x^{۲}\left(۱-۲x^{۲}\right)e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(-۱۰x^{۲}+۵\right)e^{\frac{-x^{۲}}{۲}} = \frac{۵}{۲}\left(۱-۲x^{۲}\right)e^{-\frac{x^{۲}}{۲}} = \frac{۵}{۲}\psi_{۲}(x)$$

پس $\psi_{۲}(x)$ نیز ویژه تابع $\hat{H}$ با ویژه مقدار $\frac{۵}{۲}$ می‌باشد.

تمرین ۳-۵

تابع موج نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی را درنظر بگیرید که هامیلتونی آن $\hat{H} = \frac{۱}{۲}\hat{P}^{۲} + \frac{۱}{۲}\hat{X}^{۲}$ است و در زمان $t = \circ$ به‌وسیله‌ی:

$$\psi(x,\circ) = \frac{۱}{\sqrt{۸\pi}}\phi_{\circ}(x) + \frac{۱}{\sqrt{۱۸\pi}}\phi_{۱}(x) = \frac{۱}{\sqrt{۸\pi}}e^{\frac{-x^{۲}}{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۱۸\pi}}(۱-۲x^{۲})e^{\frac{-x^{۲}}{۲}}$$

داده می‌شود.

(آ) عبارت تابع موج نوسانگر را در هر زمان t پس از آن بیابید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب) احتمال $P_{\circ}$ را برای یافتن سیستم در یک ویژه حالت با انرژی $\frac{۱}{۲}$ و احتمال $P_{۲}$ یافتن سیستم را در یک ویژه حالت با انرژی $\frac{۵}{۲}$ محاسبه کنید.

(پ) چگالی احتمال $\rho(x,t)$ و چگالی جریان $J(x,t)$ را محاسبه کنید.

(ت) نشان دهید که احتمال پایسته است یعنی نشان دهید که $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\vec{J}(x,t)=۰$.

حل:

(آ)

$$\psi(x,t)=e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\psi(x,۰)=\frac{۱}{\sqrt{۸\pi}}e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\left(e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}\right)+\frac{۱}{\sqrt{۱۸\pi}}e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\left(\left(۱-۲x^{۲}\right)e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}\right)$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۸\pi}}e^{-\frac{it}{\hbar}\left(\frac{۱}{۲}\right)}e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۸\pi}}e^{-\frac{it}{\hbar}\left(\frac{۵}{۲}\right)}\left(۱-۲x^{۲}\right)e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}$$

(ب)

اگر $\psi_{\circ}(x)$ و $\psi_{۲}(x)$ را بهنجار کنیم، داریم:

$$\psi_{\circ N}(x)=\frac{۱}{\pi^{\frac{۱}{۴}}}e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}$$

$$\psi_{۲N}(x)=\frac{۲}{۳}\frac{۱}{\pi^{\frac{۱}{۴}}}\left(۱-۲x^{۲}\right)e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}$$

اما:

$$\psi(x,۰)=\frac{۱}{\pi^{\frac{۱}{۴}}\sqrt{۸}}\psi_{\circ N}(x)+\frac{۳}{۲\pi^{\frac{۱}{۴}}\sqrt{۱۸}}\psi_{۲N}(x)$$

بهنجار نیست و اگر آن را بهنجار کنیم، داریم:

$$\psi_{N}(x,۰)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\psi_{\circ N}(x)+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\psi_{۲N}(x)$$

.

یعنی:

$$P_{\circ}=\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$P_{۲}=\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$P_{\circ}$ و $P_{۲}$ در طی زمان تغییر نخواهند کرد زیرا $\psi_{\circ}$ و $\psi_{۲}$ حالت‌های پایدار (ایستا) هستند.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$\psi_N(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-it}{2\hbar}}\psi_{0N}(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-5it}{2\hbar}}\psi_{2N}(x)$$

$$\rho(x,t)=\psi^*{}_N(x,t)\psi_N(x,t)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{it}{2\hbar}}\psi_{0N}(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{+5it}{2\hbar}}\psi_{2N}(x)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-it}{2\hbar}}\psi_{0N}(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-5it}{2\hbar}}\psi_{2N}(x)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\psi^2_{0N}(x)+\frac{1}{2}\psi^2_{2N}(x)+\frac{1}{2}\left(e^{\frac{4it}{2\hbar}}+e^{\frac{4it}{2\hbar}}\right)\psi_{0N}(x)\psi_{2N}(x)$$

$$=\frac{1}{2}\psi^2_{0N}(x)+\frac{1}{2}\psi^2_{2N}(x)+\cos\left(\frac{4t}{2\hbar}\right)\psi_{0N}(x)\psi_{2N}(x)$$

$$\vec{J}(x,t)=\frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left[\psi^*_N(x,t)\vec{\nabla}\psi_N(x,t)\right]$$

$$\vec{\nabla}\psi_N(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-it}{2\hbar}}\vec{\nabla}\psi_{0N}(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5it}{2\hbar}}\vec{\nabla}\psi_{2N}(x)$$

$$\vec{\nabla}\psi_{0N}(x)=-\hat{i}\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\vec{\nabla}\psi_{2N}(x)=+\hat{i}\frac{2}{3\pi^{\frac{1}{4}}}\left(2x^2-5x\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\vec{\nabla}\psi_N(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-it}{2\hbar}}\frac{-\hat{i}}{\pi^{\frac{1}{4}}}xe^{\frac{-x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-5it}{2\hbar}}\hat{i}\frac{2}{3\pi^{\frac{1}{4}}}\left(2x^2-5x\right)e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\psi^*_N\nabla\psi_N=\frac{1}{2}\frac{-\hat{i}}{\pi^{\frac{1}{2}}}xe^{-x^2}+\frac{1}{2}e^{\frac{-4it}{2\hbar}}\hat{i}\frac{2}{3\pi^{\frac{1}{2}}}\left(2x^2-5x\right)e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{\frac{4it}{2\hbar}}\hat{i}\frac{2}{3\pi^{\frac{1}{2}}}x\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{4}{9\pi^{\frac{1}{2}}}\hat{i}\left(2x^2-5x\right)\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$$

$$\vec{J}(x,t)=\frac{\hbar}{m}\left[\frac{-\hat{i}}{3\pi^{\frac{1}{2}}}\sin\left(\frac{4t}{2\hbar}\right)\left(2x^2-5x\right)e^{-x^2}-\frac{\hat{i}}{3\pi^{\frac{1}{2}}}\sin\left(\frac{4t}{\hbar}\right)x\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{i\hbar}{m} \frac{۴x}{۳\pi^{\frac{۱}{۲}}} \sin\left(\frac{۴t}{۲\hbar}\right) e^{-x^۲}$$

(ت)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = \frac{-۴}{۲\hbar} \sin\left(\frac{۴t}{۲\hbar}\right) \frac{۲}{۳\pi^{\frac{۱}{۲}}} \left(۱ - ۲x^۲\right) e^{-x^۲} + \frac{\hbar}{m} \frac{۴x}{۳\pi^{\frac{۱}{۲}}} \sin\left(\frac{۴t}{۲\hbar}\right) \left(+۱ - ۲x^۲\right) e^{-x^۲} = ۰$$

تمرین ۳-۶

ذره‌ای به جرم m در یک چاه پتانسیل نامتناهی به‌طول a در $t=۰$ دارای تابع موج اولیه‌ی

$$\psi(x,۰) = \sqrt{\frac{۳}{۵a}} \sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) + \frac{۱}{\sqrt{۵a}} \sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)$$

و طیف انرژی $E_n = -\hbar^۲\pi^۲n^۲ / (۲ma^۲)$ است.

$\psi(x,t)$ را در هر زمان t پس از آن بیابید. سپس $\frac{\partial p}{\partial t}$ و بردار چگالی جریان احتمال $J(x,t)$ را حساب کنید و نشان دهید که $\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J}(x,t) = ۰$. به‌خاطر داشته باشید که $p = \psi^*(x,t)\psi(x,t)$ و $\vec{J}(x,t) = \frac{i\hbar}{۲m}(\psi(x,t)\vec{\nabla}\psi^*(x,t) - \psi^*(x,t)\vec{\nabla}\psi(x,t))$ است.

حل:

ویژه توابع و ویژه مقادیر ذره‌ای به جرم m محصور در جعبه‌ای به طول a عبارتند از:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$E_n = \frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲} \quad ; \quad n = ۱, ۲, \ldots$$

پس با توجه به این توضیحات $\psi(x,۰)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\psi(x,۰) = \sqrt{\frac{۳}{۱۰}}\phi_۲(x) + \sqrt{\frac{۱}{۱۰}}\phi_۵(x)$$

در اینجا ذکر این نکته، ضروری است که $\psi(x,۰)$ بهنجار نمی‌باشد. حال $\psi(x,t)$ را می‌یابیم:

$$\psi(x,t) = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\psi(x,۰) = e^{-i\frac{E_۲t}{\hbar}} \sqrt{\frac{۳}{۵a}} \sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) + e^{-i\frac{E_۵t}{\hbar}} \frac{۱}{\sqrt{۵a}} \sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)$$

و از این‌جا نتیجه می‌شود که:

$$\rho = \psi^*(x,t)\psi(x,t) = \frac{۳}{۵a}\sin^۲\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) + \frac{۱}{۵a}\sin^۲\left(\frac{۵\pi x}{a}\right) + \frac{۲\sqrt{۳}}{۵a}\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\cos\left[\frac{t}{\hbar}\left(E_۵ - E_۲\right)\right]$$

و

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{۲\sqrt{۳}}{۵a}\frac{۱}{\hbar}\left(E_۵ - E_۲\right)\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\sin\left[\frac{t}{\hbar}\left(E_۵ - E_۲\right)\right]$$

$$\vec{J}\left(x,t\right) = \frac{i\hbar}{۲m}\left(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right) = \frac{\hbar}{m}Im\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi\right)$$

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{i}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \hat{i}\left[\sqrt{\frac{۳}{۵a}}e^{-i\frac{E_۲ t}{\hbar}}\left(\frac{۳\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) + \sqrt{\frac{۱}{۵a}}e^{-i\frac{E_۵ t}{\hbar}}\left(\frac{۵\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\right]$$

$$\psi^*\vec{\nabla}\psi = \left[\frac{۹\pi}{۵a^۲}\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) + \frac{۵\sqrt{۳}\pi}{۵a^۲}e^{-i\frac{\left(E_۵ - E_۲\right)t}{\hbar}}\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{۳\sqrt{۳}\pi}{۵a^۲}e^{i\frac{\left(E_۵ - E_۲\right)t}{\hbar}}\sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) + \frac{۵\pi}{۵a^۲}\sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\right]\hat{i}$$

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{m}\frac{\sqrt{۳}\pi}{۵a^۲}\sin\left[\frac{t}{\hbar}\left(E_۵ - E_۲\right)\right]\left[۳\sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) - ۵\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\right]\hat{i}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{J} = \frac{\hbar\sqrt{۳}\pi}{۵ma^۲}\sin\left[\frac{t}{\hbar}\left(E_۵ - E_۲\right)\right]\left\{۳\left(\frac{۵\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) - ۳\left(\frac{۳\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)\right.$$

$$\left. - ۵\left(\frac{۳\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{۵\pi x}{a}\right) - ۵\left(-\frac{۵\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\right\}$$

$$= \frac{۱۶\hbar\sqrt{۳}\pi^۲}{۵ma^۲}\sin\left[\frac{t}{\hbar}\left(E_۵ - E_۲\right)\right]\sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

و لذا:

$$\vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = ۰$$

تمرین ۳-۷

سیستمی را در نظر بگیرید که حالت اولیه‌ی آن در $t = ۰$ برحسب یک مجموعه‌ی کامل و متعامد - بهنجار از سه‌بردار $|\phi_۱\rangle, |\phi_۲\rangle, |\phi_۳\rangle$ به‌صورت $|\psi(۰)\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۳}}|\phi_۱\rangle + A|\phi_۲\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۶}}|\phi_۳\rangle$ است، و در آن A یک ثابت حقیقی است.

(آ) A را به گونه‌ای بیابید که $|\psi(۰)\rangle$ بهنجار شود.

(ب) اگر انرژی‌های متناظر $|\phi_۱\rangle, |\phi_۲\rangle$ و $|\phi_۳\rangle$ به ترتیب با $E_۱, E_۲$ و $E_۳$ نشان داده شوند، حالت سیستم $|\psi(t)\rangle$ را در هر زمان t پس از آن بیابید.

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ) احتمال یافتن سیستم را در یک زمان t در حالت $|\phi_۲\rangle$ تعیین کنید.

حل:

(آ)

$$۱=\langle\psi(۰)|\psi(۰)\rangle=\frac{۱}{۳}+A^۲+\frac{۱}{۶}$$

$$A=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

(ب)

$$|\psi(t)\rangle=e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\psi(۰)\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\phi_۱\rangle+\frac{۱}{\sqrt{۲}}e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\phi_۲\rangle+\frac{۱}{\sqrt{۶}}e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\phi_۳\rangle$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\frac{-iE_۱t}{\hbar}}|\phi_۱\rangle+\frac{۱}{\sqrt{۲}}e^{\frac{-iE_۲t}{\hbar}}|\phi_۲\rangle+\frac{۱}{\sqrt{۶}}e^{\frac{-iE_۳t}{\hbar}}|\phi_۳\rangle$$

(پ)

$$P=|\langle\phi_۲|\psi(t)\rangle|^۲=\left|\frac{۱}{\sqrt{۶}}e^{\frac{-iE_۲t}{\hbar}}\right|^۲=\frac{۱}{۶}$$

تمرین ۳-۸

مؤلفه‌های حالت اولیه $|\psi_i\rangle$ یک سیستم کوانتومی در یک پایه‌ی کامل و متعامد بهنجار از سه حالت $|\phi_۱\rangle,|\phi_۲\rangle$ و $|\phi_۳\rangle$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\langle\phi_۱|\psi_i\rangle=\frac{i}{\sqrt{۳}}\quad,\quad\langle\phi_۲|\psi_i\rangle=\sqrt{\frac{۲}{۳}}\quad,\quad\langle\phi_۳|\psi_i\rangle=۰$$

احتمال یافتن سیستم در حالت $|\psi_f\rangle$ را که مؤلفه‌های آن در همان پایه به‌صورت

$$\langle\phi_۱|\psi_f\rangle=\frac{۱+i}{\sqrt{۳}}\quad,\quad\langle\phi_۲|\psi_f\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۶}}\quad,\quad\langle\phi_۳|\psi_f\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۶}}$$

هستند محاسبه کنید.

حل:

$$|\psi_i\rangle=\sum_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\psi_i\rangle=|\phi_۱\rangle\langle\phi_۱|\psi_i\rangle+|\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|\psi_i\rangle+|\phi_۳\rangle\langle\phi_۳|\psi_i\rangle$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۳}}|\phi_۱\rangle+\sqrt{\frac{۲}{۳}}|\phi_۳\rangle$$

$$|\psi_f\rangle=\sum_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\psi_f\rangle=|\phi_۱\rangle\langle\phi_۱|\psi_f\rangle+|\phi_۲\rangle\langle\phi_۲|\psi_f\rangle+|\phi_۳\rangle\langle\phi_۳|\psi_f\rangle$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{۱+i}{\sqrt{۳}}|\phi_۱\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۶}}|\phi_۲\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۶}}|\phi_۳\rangle$$

$$P = \left|\langle\psi_f|\psi_i\rangle\right|^۲ = \left|\left(\frac{۱-i}{\sqrt{۳}}\langle\phi_۱| + \frac{۱}{\sqrt{۶}}\langle\phi_۲| + \frac{۱}{\sqrt{۶}}\langle\phi_۳|\right)\left(\frac{i}{\sqrt{۳}}|\phi_۱\rangle + \sqrt{\frac{۲}{۳}}|\phi_۳\rangle\right)\right| = \left|\frac{۱-i}{\sqrt{۳}}\frac{i}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۶}}\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right|^۲$$

$$= \left|\frac{i+۱}{۳} + \frac{۱}{۳}\right| = \left|\frac{i+۲}{۳}\right|^۲ = \frac{۱^۲ + ۲^۲}{۳^۲} = \frac{۵}{۹}$$

تمرین ۳-۹

(آ) براکت پوآسون $\{x^۲, p^۲\}$ را به‌دست آورید.

(ب) جابه‌جاگر $\left[\hat{X}^۲, \hat{P}^۲\right]$ را برحسب $\hat{X}\hat{P}$ و یک ثابت $\hbar^۲$ بیان کنید.

(پ) حد کلاسیک $\left[\hat{x}^۲, \hat{p}^۲\right]$ را برای این عبارت بیابید و سپس با نتیجه قسمت (آ) مقایسه کنید.

حل:

(آ)

$$\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)$$

$$\left\{x^۲, p^۲\right\} = \frac{\partial x^۲}{\partial x}\frac{\partial p^۲}{\partial p} - \frac{\partial x^۲}{\partial p}\frac{\partial p^۲}{\partial x} = ۲x \times ۲p = ۴xp$$

(ب)

$$\left[X^۲, P^۲\right] = ۲i\hbar\left(XP + PX\right) = ۲i\hbar\left(XP + XP - i\hbar\right) = ۴i\hbar XP + ۲h^۲$$

(پ)

می‌دانیم که در مکانیک کوانتومی xp و px، متفاوت می‌باشند و:

$$xp - px = i\hbar$$

اما وقتی $\hbar \to ۰$ (یعنی در حد کلاسیکی):

$$xp \to px$$

و بنابراین می‌توان گفت:

$$\left[x^۲, p^۲\right] = ۲i\hbar\left(xp + xp\right) \to ۲i\hbar\left(xp + xp\right) = ۴i\hbar\, xp = i\hbar\left\{x^۲, p^۲\right\}$$

تمرین ۳-۱۰

ذره‌ای در یک پتانسیل یک بُعدی با تابع موج زیر مقید شده است:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\psi(x)=\begin{cases} A e^{۵ikx}\cos(\frac{۳\pi x}{a}) & \frac{-a}{۲}\le x\le\frac{a}{۲} \\ ۰ & |x|>\frac{a}{۲} \end{cases}$$

(آ) ثابت A را به‌گونه‌ای محاسبه کنید که $\psi(x)$ بهنجار باشد.

(ب) احتمال یافتن ذره را میان $x=۰$ و $x=\frac{a}{۴}$ محاسبه کنید.

حل:

(آ)

$$۱=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx=\int_{|x|>\frac{a}{۲}}۰\times۰\,dx+\int_{-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}}A^*e^{-۵ikx}\cos\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)Ae^{۵ikx}\cos\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)dx$$

$$=|A|^۲\int_{-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}}\cos^۲\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)dx=۲\times\frac{|A|^۲}{۲}\int_۰^{\frac{a}{۲}}\left(۱+\cos\left(\frac{۶\pi x}{a}\right)\right)dx=|A|^۲\left(\frac{a}{۲}+\frac{a}{۶\pi}\left[\sin\left(\frac{۶\pi x}{a}\right)\right]_۰^{\frac{a}{۲}}\right)$$

$$=\frac{a}{۲}|A|^۲$$

پس:

$$|A|=\sqrt{\frac{۲}{a}}$$

(ب)

$$P=\int_۰^{\frac{a}{۴}}\psi^*(x)\psi(x)dx=\frac{۲}{a}\int_۰^{\frac{a}{۴}}\cos^۲\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)dx=\frac{۱}{a}\left[x+\frac{a}{۶\pi}\sin\left(\frac{۶\pi x}{a}\right)\right]_۰^{\frac{a}{۴}}=\frac{۱}{a}\left(\frac{a}{۴}+\frac{a}{۶\pi}\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)\right)$$

$$=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶\pi}$$

تمرین ۳-۱۱

(آ) نشان دهید که هر مؤلفه‌ی عملگر اندازه حرکت یک ذره با عملگر انرژی جنبشی خود سازگار است.

(ب) نشان دهید که عملگر اندازه حرکت، تنها اگر عملگر پتانسیل در مختصات فضایی ثابت باشد، با عملگر هامیلتونی سازگار است.

حل:

(آ)

$$\hat{\vec{P}}=\hat{i}\,\hat{P}_x+\hat{j}\,\hat{P}_y+\hat{k}\,\hat{P}_z$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{K}=\frac{\hat{P}^{۲}}{۲m}=\frac{\hat{P}_x^{۲}+\hat{P}_y^{۲}+\hat{P}_z^{۲}}{۲m}$$

$$\left[\hat{P}_x,\hat{K}\right]=\left[\hat{P}_x,\frac{۱}{۲m}\left(\hat{P}_x^{۲}+\hat{P}_y^{۲}+\hat{P}_z^{۲}\right)\right]=\frac{۱}{۲m}\left[\hat{P}_x,\hat{P}_x^{۲}\right]+\frac{۱}{۲m}\left[\hat{P}_x,\hat{P}_y^{۲}\right]+\frac{۱}{۲m}\left[\hat{P}_x,\hat{P}_z^{۲}\right]$$

چون هر مؤلفه‌ی عملگر $\hat{\vec{P}}$ با تابعی از خود آن و یا با تابعی از مؤلفه‌های دیگر $\hat{\vec{P}}$ جابجا می‌شود، پس:

$$\left[\hat{P}_i,\hat{P}_j^{۲}\right]=۰$$

و بنابراین:

$$\left[\hat{P}_x,\hat{K}\right]=۰=\left[\hat{P}_y,\hat{K}\right]=\left[\hat{P}_z,\hat{K}\right]$$

(ب)

با استفاده از قسمت (آ) واضح است که:

$$\left[\frac{\hat{P}^{۲}}{۲m},\hat{\vec{P}}\right]=۰$$

پس:

$$\left[\hat{H},\hat{\vec{P}}\right]=\left[\frac{\hat{P}^{۲}}{۲m}+\hat{V}\left(\vec{r},t\right),\hat{\vec{P}}\right]=\left[\hat{V}\left(\vec{r},t\right),\hat{\vec{P}}\right]=\left[\hat{V}\left(\vec{r},t\right),\hat{i}\,\hat{P}_x+\hat{j}\,\hat{P}_y+\hat{k}\,\hat{P}_z\right]$$

$$=\hat{i}\left[\hat{V}\left(\vec{r},t\right),\hat{P}_x\right]+\hat{j}\left[\hat{V}\left(\vec{r},t\right),\hat{P}_y\right]+\hat{k}\left[\hat{V}\left(\vec{r},t\right),\hat{P}_z\right]$$

$$=i\hbar\left[\hat{i}\left\{\hat{V}\left(\vec{r},t\right),\hat{P}_x\right\}+\hat{j}\left\{\hat{V}\left(\vec{r},t\right),\hat{P}_y\right\}+\hat{k}\left\{\hat{V}\left(\vec{r},t\right),\hat{P}_z\right\}\right]$$

$$=i\hbar\left[\hat{i}\left(\frac{\partial\hat{V}\left(\vec{r},t\right)}{\partial x}\frac{\partial P_x}{\partial P_x}-\frac{\partial\hat{V}\left(\vec{r},t\right)}{\partial P_x}\frac{\partial P_x}{\partial x}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial\hat{V}\left(\vec{r},t\right)}{\partial y}\frac{\partial P_y}{\partial P_y}-\frac{\partial\hat{V}\left(\vec{r},t\right)}{\partial P_y}\frac{\partial P_y}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left.+\hat{k}\left(\frac{\partial\hat{V}\left(\vec{r},t\right)}{\partial z}\frac{\partial P_z}{\partial P_z}-\frac{\partial\hat{V}\left(\vec{r},t\right)}{\partial P_z}\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)\right]=i\hbar\left(\hat{i}\frac{\partial\hat{V}\left(\vec{r},t\right)}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\hat{V}\left(\vec{r},t\right)}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\hat{V}\left(\vec{r},t\right)}{\partial z}\right)$$

$$=i\hbar\vec{\nabla}V\left(\vec{r},t\right)$$

واضح است که اگر عملگر پتانسیل مقدار ثابتی داشته باشد آنگاه:

$$\left[\hat{H},\hat{\vec{P}}\right]=۰$$

تمرین ۳-۱۲

سیستمی فیزیکی را در نظر بگیرید که هامیلتونی $\hat{H}$ و عملگر $\hat{A}$ آن به‌صورت زیر داده شده‌اند:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$H=\varepsilon_{\circ}\begin{pmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A=a_{\circ}\begin{pmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۰\end{pmatrix}$$

که در آن $\varepsilon_{\circ}$ دارای ابعاد انرژی است.

(آ) آیا $\hat{H}$ و $\hat{A}$ جابجا می‌شوند؟ اگر جابجا می‌شوند، یک پایه برای ویژه بردارهای مشترک $\hat{H}$ و $\hat{A}$ ارائه دهید.

(ب) از میان مجموعه عملگرهای $\hat{H},\hat{A},\{\hat{H},\hat{A}\}$ و $\{\hat{H}^{۲},\hat{A}\}$ کدام یک مجموعه‌ی کامل از عملگرهای جابه‌جا شونده (CSCO) تشکیل می‌دهند؟

حل:

(آ)

بله زیرا:

$$[H,A]=\varepsilon_{\circ}a_{\circ}\begin{pmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۰\end{pmatrix}-\varepsilon_{\circ}a_{\circ}\begin{pmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{pmatrix}$$

$$=\varepsilon_{\circ}a_{\circ}\begin{pmatrix}-۱۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۰\end{pmatrix}-\varepsilon_{\circ}a_{\circ}\begin{pmatrix}-۱۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۰\end{pmatrix}=۰$$

ویژه مقادیر $\hat{H}$ یکی از مقادیر $h_{۱}=-۲\varepsilon_{\circ}$ و $h_{۲}=\varepsilon_{\circ}$ و $h_{۳}=\varepsilon_{\circ}$ و ویژه بردارهای راست هنجار متناظر با آنها عبارتند از:

$$|h_{۱}\rangle=\begin{pmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\end{pmatrix} \quad , \quad |h_{۲}\rangle=\begin{pmatrix}۰\\ ۱\\ ۰\end{pmatrix} \quad , \quad |h_{۳}\rangle=\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ ۱\end{pmatrix}$$

از حل معادله‌ی $\det(A-a)=۰$ نیز ویژه مقادیر $\hat{A}$ حاصل می‌شوند که عبارتند از:

$$a_{۱}=۵a_{\circ} \quad , \quad a_{۲}=+۲a_{\circ} \quad , \quad a_{۳}=-۲a_{\circ}$$

و ویژه بردارهای خود به خود متعامد متناظر با آنها عبارت خواهند بود از:

$$|a_{۱}\rangle=\begin{pmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\end{pmatrix} \quad , \quad |a_{۲}\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۰\\ ۱\\ ۱\end{pmatrix} \quad , \quad |a_{۳}\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۰\\ ۱\\ -۱\end{pmatrix}$$

اما در اینجا ویژه بردارهای بهنجار شده $\hat{A}$ خود به خود ویژه بردارهای $\hat{H}$ نیز می‌باشند به‌طوری‌که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$|h_1,a_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad,\quad |h_2,a_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\quad,\quad |h_3,a_3\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

(ب)

چون $\hat{H}$ دارای ویژه بردارهای تبهگن است، بنابراین ویژه بردارهای آن به‌طور خودبه‌خود تشکیل یک مجموعه‌ی کامل را نمی‌دهند.

اما عملگر $\hat{A}$ چون دارای ویژه بردارهای غیر تبهگن است لذا ویژه بردارهای آن تشکیل یک مجموعه‌ی کامل را می‌دهند.

چون $\hat{A}$ فاقد تبهگنی است و از طرفی $[\hat{H},\hat{A}]=0$، لذا $\{A,H\}$ نیز تشکیل مجموعه‌ی کامل عملگرهای جا به‌جا شونده (CSCO) را می‌دهد.

در مورد $\hat{A}$ و $\hat{H}^2$ نیز استدلال مربوط به $\{A,H\}$ صادق است و لذا $\{\hat{A},\hat{H}^2\}$ نیز تشکیل مجموعه‌ی کامل عملگرهای جابه‌جا شونده را می‌دهد.

تمرین ۳-۱۳

نشان دهید اندازه حرکت و انرژی کل را تنها هنگامی که پتانسیل در هر جا ثابت باشد می‌توان به صورت همزمان اندازه‌گیری کرد.

حل:

برای این‌که بتوان تکانه و انرژی را به‌طور همزمان اندازه‌گیری کرد لازم است که این دو کمیت با هم جابه‌جا شوند، یعنی:

$$[\hat{H},\hat{P}]=0$$

و یا به عبارتی باید داشته باشیم:

$$0=\left[\frac{\hat{P}^2}{2m}+\hat{V},\hat{P}\right]=\left[\frac{\hat{P}^2}{2m},\hat{V}\right]+\left[\frac{\hat{P}^2}{2m},\hat{P}\right]=\left[\frac{\hat{P}^2}{2m},\hat{V}\right]+0=\left[\frac{\hat{P}^2}{2m},\hat{V}\right]$$

اما رابطه‌ی $\left[\frac{\hat{P}^2}{2m},\hat{V}\right]=0$ فقط وقتی برقرار است که $\hat{V}$ (پتانسیل) در همه جا ثابت باشد.

تمرین ۳-۱۴

حالت اولیه‌ی سیستمی برحسب چهار ویژه تابع متعامد – بهنجار انرژی $|\phi_1\rangle$، $|\phi_2\rangle$، $|\phi_3\rangle$ و $|\phi_4\rangle$ به‌صورت زیر است:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$|\psi_{\circ}\rangle = |\psi(t=\circ)\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۳}}|\phi_۱\rangle + \frac{۱}{۲}|\phi_۲\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۶}}|\phi_۳\rangle + \frac{۱}{۲}|\phi_۴\rangle$$

(آ) اگر چهار کت $|\phi_۱\rangle$، $|\phi_۲\rangle$، $|\phi_۳\rangle$ و $|\phi_۴\rangle$ ویژه بردارهای هامیلتونی $\hat{H}$ به‌ترتیب با انرژی‌های $E_۱, E_۲, E_۳$ و $E_۴$ باشند، حالت $|\psi(t)\rangle$ را در هر زمان t پس از آن بیابید.

(ب) نتایج ممکن اندازه‌گیری انرژی این سیستم چه هستند و با چه احتمالی رخ خواهند داد؟

(پ) مقدار چشمداشتی هامیلتونی سیستم را در $t=\circ$ و $t=۱\circ s$ را پیدا کنید.

حل:

(آ)

ابتدا اثر عملگر تحول زمانی را بر روی $|\phi_i\rangle$ می‌یابیم:

$$e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\phi_i\rangle = \sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{۱}{n!}\left(\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right)^n|\phi_i\rangle = \sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{۱}{n!}\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right)^n|\phi_i\rangle = e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}}|\phi_i\rangle$$

پس:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\psi_{\circ}\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\phi_۱\rangle + \frac{۱}{۲}e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\phi_۲\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۶}}e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\phi_۳\rangle + \frac{۱}{۲}e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\phi_۴\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\frac{-iE_۱t}{\hbar}}|\phi_۱\rangle + \frac{۱}{۲}e^{\frac{-iE_۲t}{\hbar}}|\phi_۲\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۶}}e^{\frac{-iE_۳t}{\hbar}}|\phi_۳\rangle + \frac{۱}{۲}e^{\frac{-iE_۴t}{\hbar}}|\phi_۴\rangle$$

(ب)

واضح است که در اندازه‌گیری انرژی یکی از مقادیر $E_۱$، $E_۲$، $E_۳$ و $E_۴$ با احتمال $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$ و $P_۴$ یافت خواهد شد به‌طوری‌که:

$$P_۱ = |\langle\phi_۱|\psi(t)\rangle|^۲ = \left|\langle\phi_۱|\frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\frac{-iE_۱t}{\hbar}}|\phi_۱\rangle\right|^۲ = \left|\frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\frac{-iE_۱t}{\hbar}}\right|^۲ = \frac{۱}{۳}$$

$$P_۲ = |\langle\phi_۲|\psi(t)\rangle|^۲ = \left|\frac{۱}{۲}e^{\frac{-iE_۲t}{\hbar}}\right|^۲ = \frac{۱}{۴}$$

$$P_۳ = |\langle\phi_۳|\psi(t)\rangle|^۲ = \left|\frac{۱}{\sqrt{۶}}e^{\frac{-iE_۳t}{\hbar}}\right|^۲ = \frac{۱}{۶}$$

$$P_۴ = |\langle\phi_۴|\psi(t)\rangle|^۲ = \left|\frac{۱}{۲}e^{\frac{-iE_۴t}{\hbar}}\right|^۲ = \frac{۱}{۴}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

ملاحظه می‌شود که این احتمالات در طول زمان ثابت هستند زیرا $|\phi_i\rangle$ها ویژه حالت‌های انرژی می‌باشند.

(پ)

$$E(0)=\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle=\sum_i P_i(0)E_i=\frac{1}{3}E_1+\frac{1}{4}E_2+\frac{1}{6}E_3+\frac{1}{4}E_4$$

$$E(t)=\langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle=\sum_i P_i(t)E_i=\sum_i P_i(0)E_i=E(0)=\frac{1}{3}E_1+\frac{1}{4}E_2+\frac{1}{6}E_3+\frac{1}{4}E_4$$

در اینجا $E(0)$ و $E(t)$ متوسط هامیلتونی در زمان $t=0$ و $t=10s$ می‌باشند.

تمرین ۳-۱۵

بسط مجموعه‌ی کامل یک تابع موج اولیه‌ی $\psi(x,0)$ برای سیستمی برحسب ویژه توابع متعامد و بهنجار انرژی $\phi_n(x)$ دارای سه جمله است $(n=1,2,3)$. اندازه‌گیری انرژی روی این سیستم با $\psi(x,0)$، سه مقدار E_1 و E_2 (با احتمال $\frac{1}{4}$) و E_3 (با احتمال $\frac{1}{2}$) را به‌دست می‌دهد.

(آ) $\psi(x,0)$ را برحسب $\phi_1(x),\phi_2(x)$ و $\phi_3(x)$ بنویسید.

(ب) $\psi(x,0)$ را در هر زمان t پس از آن بیابید، یعنی $\psi(x,t)$ را پیدا کنید.

حل:

(آ)

$$\psi(x,0)=\sum_n c_n\phi_n(x)$$

$$P_n=c_n c_n^*=|c_n|^2$$

در اینجا بدون اینکه کلیت مسئله از بین رود فرض می‌کنیم که c_nها حقیقی باشد، پس:

$$c_n=\sqrt{P_n}$$

و بنابراین:

$$c_1=\sqrt{\frac{1}{4}}=c_2=\frac{1}{2}$$

$$c_3=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c_n=0\ ;\ n=4,5,\ldots$$

پس:

$$\psi(x,0)=\frac{1}{2}\phi_1(x)+\frac{1}{2}\phi_2(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_3(x)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$\psi(x,t)=e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}\psi(x,\circ)=\frac{۱}{۲}e^{\frac{-iE_۱t}{\hbar}}\phi_۱(x)+\frac{۱}{۲}e^{\frac{-iE_۲t}{\hbar}}\phi_۲+\frac{۱}{\sqrt{۲}}e^{\frac{-iE_۲t}{\hbar}}\phi_۲(x)$$

تمرین ۳-۱۶

سیستمی را در نظر بگیرید که هامیلتونی $\hat{H}$ و عملگر $\hat{A}$ آن با ماتریس‌های زیر نشان داده می‌شوند:

$$H=\varepsilon_\circ\begin{pmatrix}\circ & -i & \circ\\ i & \circ & ۲i\\ \circ & -۲i & \circ\end{pmatrix}\quad\text{و}\quad A=a_\circ\begin{pmatrix}\circ & -i & \circ\\ i & ۱ & ۱\\ \circ & ۱ & \circ\end{pmatrix}$$

(آ) اگر انرژی را اندازه بگیریم چه مقدارهایی به‌دست خواهیم آورد؟

(ب) فرض کنید هنگامی که انرژی را اندازه می‌گیریم مقدار $\sqrt{۵}\varepsilon_\circ$ را به‌دست آوریم و بی‌درنگ پس از آن A را اندازه می‌گیریم. چه مقدارهایی برای A به‌دست خواهیم آورد و احتمال‌های متناظر با هر مقدار چه هستند؟

(پ) مقدار چشم‌داشتی $\langle A\rangle$ را حساب کنید.

حل:

(آ)

آنچه در اندازه‌گیری انرژی حاصل می‌شود در واقع همان ویژه مقادیر عملگر هامیلتونی است. بنابراین باید h (ویژه مقدار انرژی) را به‌دست آورد به‌طوری‌که:

$$\det(H-h)=\circ$$

پس با اختیار $h=h'\varepsilon_\circ$، داریم:

$$\begin{vmatrix}-h' & -i & \circ\\ i & -h' & ۲i\\ \circ & -۲i & -h'\end{vmatrix}=-h'\begin{vmatrix}-h' & ۲i\\ -۲i & -h'\end{vmatrix}+i\begin{vmatrix}i & ۲i\\ \circ & -h\end{vmatrix}=-h'\left(h'^{۲}-۴\right)+h'=h'\left(۵-h'^{۲}\right)=\circ$$

اگر $\left|h=\circ\right\rangle=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$؛ آنگاه:

$$H\left|h=\circ\right\rangle=\circ\left|h=\circ\right\rangle$$

$$\varepsilon_\circ\begin{pmatrix}\circ & -i & \circ\\ i & \circ & ۲i\\ \circ & -۲i & \circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\circ$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

یا:

$$y = 0$$

$$x = -2z$$

با اعمال روش مشابه داریم:

$$|h_1 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\ |h_2 = \sqrt{5}\varepsilon_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\i\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}\ ,\ |h_3 = -\sqrt{5}\varepsilon_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-i\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}$$

با اعمال روش مشابهی می‌توان ویژه مقادیر و ویژه بردارهای عملگر هرمیتی $\hat{A}$ را نیز یافت که عبارتند از:

$$|a_1 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix}\ ,\ |a_2 = -a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-i\\i\end{pmatrix}\ ,\ |a_3 = 2a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2i\\i\end{pmatrix}$$

ب) احتمال‌های متناظر با ویژه مقادیر $\hat{A}$ یعنی a_1، a_2 و a_3 عبارتند از:

$$P_1 = \left|\langle a_1|h_2\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & +i\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\i\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{20}|1+2i|^2 = \frac{1}{4}$$

$$P_2 = \left|\langle a_2|h_2\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & i & -i\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\i\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{30}\left|1+i^2\sqrt{5}-2i\right|^2 = \frac{1}{30}\left|\left(1-\sqrt{5}\right)^2+4\right|$$

$$= \frac{10-2\sqrt{5}}{30}$$

$$P_3 = \left|\langle a_3|h_2\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & -2i & -i\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\i\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{4\sqrt{5}+25}{60}$$

P_2 را می‌توانستیم از رابطه‌ی زیر نیز به‌دست آوریم:

$$P_3 = 1-\left(P_1+P_2\right) = 1-\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{5}-10}{30} = \frac{60-15+4\sqrt{5}-20}{60} = \frac{4\sqrt{2}+25}{60}$$

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که وقتی در اندازه‌گیری انرژی مقدار $\sqrt{5}\varepsilon_0$ حاصل شود، بلافاصله حالت سیستم به $|h_2\rangle$ تغییر می‌نماید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$\langle A\rangle = \sum_i P_i a_i = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 = \frac{1}{4}\times 0 + \frac{10-2\sqrt{5}}{30}(-a_0) + \frac{4\sqrt{5}+25}{60}(2a_0)$$
$$= \frac{\left(10-2\sqrt{5}+4\sqrt{5}+25\right)a_0}{30} = \frac{\left(2\sqrt{5}+35\right)a_0}{30}$$

تمرین ۳-۱۷

یک سیستم فیزیکی را در نظر بگیرید که هامیلتونی و حالت اولیه آن با روابط زیر داده می‌شوند:

$$\hat{H} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

و در آن ε_0 بعد انرژی دارد.

(آ) اگر انرژی اندازه‌گیری شود، چه مقادیر و با چه احتمالاتی به‌دست خواهند آمد؟

(ب) مقدار چشمداشتی هامیلتونی $\langle \hat{H}\rangle$ را محاسبه کنید.

حل:

(آ)

ویژه مقادیر عبارتند از: $h_1 = 0$، $h_2 = 2\varepsilon_0$ و $h_3 = -\varepsilon_0$. چون $\hat{H}$ فاقد تبهگنی است، پس ویژه بردارهای آن خود به خود متعامد می‌باشند. ویژه بردارهای راست هنجار $\hat{H}$ عبارتند از:

$$|h_1 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |h_2 = 2\varepsilon_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |h_3 = -\varepsilon_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین در اندازه‌گیری انرژی، یکی از مقادیر h_1، h_2 و h_3 حاصل می‌شود و احتمال‌های متناظر با آنها عبارتند از:

$$P_1 = \left|\langle h_1|\psi_0\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = \left|\langle h_2|\psi_0\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|^2 = 0$$

$$P_3 = 1 - \left(P_1 + P_2\right) = 1 - \left(\frac{1}{3} + 0\right) = \frac{2}{3}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$\langle H\rangle = p_1 h_1 + p_2 h_2 + p_3 h_3 = \frac{1}{3}\times 0 + 0\times 2\varepsilon_0 + \frac{2}{3}(-\varepsilon_0) = -\frac{2}{3}\varepsilon_0$$

تمرین ۳-۱۸

سیستمی را در نظر بگیرید که حالت $|\psi(t)\rangle$ آن و دو مشاهده‌پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ عبارت‌اند از:

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix},\quad \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \hat{B} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

(آ) یک اندازه‌گیری انجام می‌دهیم که در آن نخست A و سپس بی‌درنگ پس از آن $\hat{B}$ اندازه‌گیری می‌شود. احتمال یافتن مقدار $\sqrt{2}$ برای A و مقدار ۱- برای $\hat{B}$ را بیابید.

(ب) اکنون، نخست $\hat{B}$ و سپس بی‌درنگ پس از آن $\hat{A}$ را اندازه می‌گیریم. احتمال به‌دست آوردن مقدار ۱- برای $\hat{B}$ و $\sqrt{2}$ برای $\hat{A}$ را بیابید.

(پ) نتایج (آ) و (ب) را مقایسه و توضیح دهید.

حل:

(آ)

ویژه مقادیر $\hat{A}$ عبارتند از $a_1 = a_2 = \sqrt{2}$ و $a_3 = 0$. به‌دلیل تبهگنی، ویژه بردارهای $\hat{A}$ خود به خود مجموعه‌ی کاملی را تشکیل نمی‌دهند. اما با کمی دقت می‌توان ویژه بردارهای راست هنجار آن را یافت که عبارتند از:

$$|a_1 = \sqrt{2}\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad |a_2 = \sqrt{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad |a_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

به‌همین ترتیب اگر ویژه بردارهای راست هنجار $\hat{B}$ را بیابیم داریم:

$$|b_1 = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad |b_2 = 1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad |b_3 = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

چنانچه در اندازه‌گیری $\hat{A}$ مقدار $\sqrt{2}$ به‌دست آید سیستم در یکی از دو حالت $|a_1\rangle$ و یا $|a_2\rangle$ خواهد بود. اگر بر روی هر یک از این دو حالت مقدار $\hat{B}$ اندازه‌گیری شود، مقداری برابر با ۱ به‌دست می‌آید. بنابراین در اندازه‌گیری دوم هرگز مقدار ۱- حاصل نمی‌شود. بنابراین احتمال مطلوب در قسمت (آ) صفر خواهد شد.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)
چنانچه در اندازه‌گیری $\hat{B}$ مقدار ۱- به‌دست آید آنگاه سیستم در حالت $|b_1=-1\rangle$ قرار دارد. اگر بر روی هر یک از این دو حالت، مقدار $\hat{A}$ اندازه‌گیری شود همواره مقدار ۰ حاصل می‌گردد. بنابراین در اندازه‌گیری دوم هرگز مقدار $\sqrt{2}$ به‌دست نمی‌آید. پس احتمال مطلوب در قسمت (ب) نیز صفر خواهد شد.

(پ)
علت اینکه نتایج قسمت (آ) و (ب) یکسان هستند مربوط به این است که $\hat{A}$ و $\hat{B}$ با هم جابه‌جا می‌شوند و لذا ترتیب اندازه‌گیری دیگر اهمیت نخواهد داشت.

تمرین ۳-۱۹

سیستمی را در نظر بگیرید که حالت $|\psi(t)\rangle$ آن و دو مشاهده‌پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ عبارت‌اند از

$$|\psi(t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-i\\2\\0\end{pmatrix},\quad A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&i&1\\-i&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&i\\0&-i&0\end{pmatrix}$$

(آ) آیا $\hat{A}$ و $\hat{B}$ سازگارند؟ از میان مجموعه عملگرهای $\{\hat{A},\hat{B}\},\hat{B},\hat{A}$ کدام‌یک، مجموعه‌ای کامل از عملگرهای جابه‌جاشونده را تشکیل می‌دهد؟
(ب) نخست با اندازه‌گیری $\hat{A}$ و بی‌درنگ پس از آن با اندازه‌گیری $\hat{B}$، احتمال یافتن مقدار ۱- برای $\hat{A}$ و مقدار ۳ برای $\hat{B}$ را بیابید.
(پ) اکنون نخست با اندازه‌گیری $\hat{B}$ و سپس بی‌درنگ پس از آن $\hat{A}$، احتمال یافتن مقدار ۳ برای $\hat{B}$ و ۱- برای $\hat{A}$ را بیابید. این نتیجه را با احتمال به‌دست آمده در (ب) مقایسه کنید.

حل:
(آ)

$$[\hat{A},\hat{B}]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&i&1\\-i&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&i\\0&-i&0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&i\\0&-i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&i&1\\-i&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3&0&-1\\-3i&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3&3i&3\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-3i&-4\\-3i&0&0\\4&0&0\end{pmatrix}$$

پس $\hat{A}$ و $\hat{B}$ با هم جابه‌جا نمی‌شوند.
ویژه بردارهای $\hat{A}$ عبارتند از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$|a_1=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-i\end{pmatrix}\quad,\quad |a_2=-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix}\quad,\quad |a_3=2\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-i\\1\end{pmatrix}$$

حالا می‌توان گفت چون $\hat{A}$ فاقد تبهگنی است لذا ویژه بردارهای آن خودبه‌خود تشکیل یک مجموعه‌ی کامل را می‌دهند. یعنی $\{\hat{A}\}$ یک مجموعه‌ی کامل از عملگرهای جابه‌جا شونده است.

ویژه بردارهای $\hat{B}$ نیز عبارتند از:

$$|b_1=3\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\left|b_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{-2i}{1+\sqrt{5}}\end{pmatrix},\left|b_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{2i}{\sqrt{5}-1}\end{pmatrix}$$

چون $\hat{B}$ نیز فاقد تبهگنی است لذا $\{\hat{B}\}$ یک مجموعه کامل از عملگرهای جابه‌جا شونده است. اما چون $\hat{A}$ و $\hat{B}$ با هم جابه‌جا نمی‌شوند پس $\{\hat{A},\hat{B}\}$ یک مجموعه کامل از عملگرهای جابه‌جا شونده نیست.

(ب)

ابتدا $|\psi(t)\rangle$ را بهنجار می‌کنیم و آن را $|\psi_N(t)\rangle$ می‌نامیم:

$$|\psi_N(t)\rangle=\frac{|\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-i\\2\\0\end{pmatrix}$$

در اندازه‌گیری $\hat{A}$ احتمال اینکه مقدار -1 حاصل شود برابر است با:

$$P_1=\left|\langle a_2|\psi_N(t)\rangle\right|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&-i&-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-i\\2\\0\end{pmatrix}\right|^2=\frac{1}{15}|-3i|^2=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

پس از این اندازه‌گیری، حالت سیستم به $|a_2\rangle$ تغییر می‌کند. حال در اندازه‌گیری $\hat{B}$ احتمال اینکه مقدار ۳ به‌دست آید برابر است با:

$$P_2=\left|\langle b_1|a_2\rangle\right|^2=\left|\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix}\right|^2=\frac{1}{3}$$

اما احتمال مطلوب در قسمت (ب) در واقع حاصل‌ضرب این دو احتمال است، یعنی:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$P = P_1 P_2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

(پ)

احتمال مطلوب را P' می‌نامیم؛ پس:

$$P' = \left|\langle b_1 | \psi_N(t)\rangle\right|^2 \left|\langle b_1 | a_2\rangle\right|^2$$

اما:

$$\langle b_1 | \psi_N(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{5}}$$

پس:

$$P' = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

نتیجه این است که $P \neq P'$ و علت آن عدم جابه‌جایی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ است و لذا در اینجا ترتیب اندازه‌گیری دارای اهمیت می‌باشد.

تمرین ۳-۲۰

سیستمی فیزیکی را درنظر بگیرید که دارای تعدادی مشاهده‌پذیر است که با ماتریس‌های زیر نمایش داده می‌شوند:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & -i & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(آ) نتایج اندازه‌گیری‌های مشاهده‌پذیرهای سازگار را بیابید.

(ب) از میان این مشاهده‌پذیرها کدام یک سازگار هستند؟ پایه‌ای از ویژه بردارهای مشترک این مشاهده‌پذیرها را ارائه دهید.

(پ) از میان مجموعه‌های عملگری $\hat{C}, \hat{B}, \hat{A}$، $\{\hat{A}, \hat{B}\}$، $\{\hat{A}, \hat{C}\}$ و $\{\hat{B}, \hat{C}\}$ کدام‌یک مجموعه‌ای کامل از عملگرهای جابه‌جاشونده تشکیل می‌دهد؟

حل:

(آ)

نتایج اندازه‌گیری A، B و C عبارتند از:

$$a_1 = a_2 = 1 \ , \ a_3 = -1$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$b_1 = 0 \ , \ b_2 = 2+\sqrt{6} \ , \ b_3 = 2-\sqrt{6}$$
$$c_1 = 2 \ , \ c_2 = 4 \ , \ c_3 = -2$$

(ب)

از این سه عملگر فقط $\hat{A}$ و $\hat{C}$ با هم جابه‌جا می‌شوند. چون $\hat{C}$ فاقد ویژه بردارهای تبهگن است لذا ویژه بردارهای آن، خودبه‌خود تشکیل یک مجموعه‌ی کامل را می‌دهند. و به‌دلیل آنکه $[\hat{A},\hat{C}]=0$، لذا ویژه بردارهای آن، ویژه بردارهای عملگر $\hat{A}$ نیز خواهند بود به‌طوری‌که:

$$|c_1=2, a_1=1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \ , \ |c_2=4, a_2=1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \ , \ |c_3=-2 \ , \ a_3=-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

(پ)

چون عملگر $\hat{A}$ دارای ویژه بردارهای تبهگن است، ویژه بردارهای آن خودبه‌خود یک مجموعه‌ی کامل را تشکیل نمی‌دهند و یا به عبارتی $\{A\}$ یک مجموعه‌ی کامل از عملگرهای جابه‌جا شونده نیست.

عملگرهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ چون فاقد ویژه بردارهای تبهگن هستند لذا ویژه بردارهای آنها تشکیل یک مجموعه‌ی کامل را می‌دهند و یا به عبارتی $\{\hat{B}\}$ و $\{\hat{C}\}$ هر کدام یک مجموعه‌ی کامل از عملگرهای جابه‌جا شونده هستند.

چون $\hat{A}$ و $\hat{B}$ با هم جابه‌جا نمی‌شوند پس $\{\hat{A},\hat{B}\}$ یک مجموعه‌ی کامل عملگرهای جابه‌جا شونده نیست.

در مورد عملگر $\hat{B}$ و $\hat{C}$ نیز به همین ترتیب. اما $\hat{A}$ و $\hat{C}$ چون با هم جابه‌جا می‌شوند و چون $\hat{C}$ فاقد ویژه بردارهای تبهگن است لذا $\{\hat{A},\hat{C}\}$ یک مجموعه‌ی کامل از عملگرهای جابه‌جا شونده است.

تمرین ۳-۲۱

سیستمی را در نظر بگیرید که ابتدا در حالت $|\psi(0)\rangle$ و دارای هامیلتونی $\hat{H}$ است که در آن

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix}4-i\\-2+5i\\3+2i\end{pmatrix} \ , \ H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 3 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

(آ) اگر اندازه‌گیری $\hat{H}$ انجام شود، چه مقدارهایی و با چه احتمال‌هایی به‌دست خواهند آمد؟

(ب) حالت سیستم را در زمان t بیابید. ممکن است از بسط $|\psi(0)\rangle$ برحسب ویژه بردارهای $\hat{H}$ استفاده کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ) انرژی کل سیستم را در زمان $t=0$ و در زمان t پس از آن بیابید. آیا این مقادیر با هم متفاوت‌اند؟

(ت) آیا $\hat{H}$ یک مجموعه‌ی کامل از عملگرهای جابه‌جاشونده را تشکیل می‌دهد؟

حل:

(آ)

ابتدا $|\psi(0)\rangle$ را بهنجار می‌کنیم و آن را $|\psi_N(0)\rangle$ می‌نامیم.

$$|\psi_N(0)\rangle=\frac{|\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle}}=\frac{|\psi(0)\rangle}{\sqrt{|4-i|^2+|-2+5i|^2+|3+2i|^2}}=\frac{1}{\sqrt{59}}\begin{pmatrix}4-i\\-2+5i\\3+2i\end{pmatrix}$$

ویژه مقادیر $\hat{H}$ از حل معادله $\det(H-h)=0$ به‌دست می‌آیند. اگر فرض کنیم $h=\frac{h'}{\sqrt{2}}$ آنگاه:

$$\det\begin{vmatrix}-h' & -i & 0\\ i & 3-h' & 3\\ 0 & 3 & -h'\end{vmatrix}=-h'\left[(3-h')(-h')-9\right]+i\left[i(-h')-3\times 0\right]=0$$

نتیجه‌ی حل این معادله آن است که:

$$h_1=\frac{-2}{\sqrt{2}}\quad,\quad h_2=0\quad,\quad h_3=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

پس در اندازه‌گیری $\hat{H}$ یکی از مقادیر h_1، h_2 و h_3 با احتمال P_1، P_2 و P_3 یافت می‌شود. برای محاسبه‌ی این احتمالات، ابتدا ویژه بردارهای بهنجار $\hat{H}$ را که خودبه‌خود متعامد نیز می‌باشند (به‌دلیل عدم تبهگنی) می‌یابیم.

با فرض $|h_1\rangle=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ داریم:

$$H|h_1\rangle=h_1|h_1\rangle$$

پس:

$$-iy=-2x$$

$$ix+3y+3z=-2y$$

$$3y=-2z$$

نتیجه می‌شود که:

$$|h_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\-2i\\3i\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

به همین ترتیب:

$$|h_۲\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\begin{pmatrix}۳i\\۰\\۱\end{pmatrix}\ ,\ |h_۳\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۳۵}}\begin{pmatrix}۱\\۵i\\۳i\end{pmatrix}$$

حال $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ را می‌یابیم:

$$P_۱=\left|\langle h_۱|\psi_N(۰)\rangle\right|^۲=\left|\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\begin{pmatrix}۱ & ۲i & -۳i\end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۵۹}}\begin{pmatrix}۴-i\\-۲+۵i\\۳+۲i\end{pmatrix}\right|^۲=\frac{۱۴^۲}{۱۴\times۵۹}=\frac{۱۴}{۵۹}$$

$$P_۲=\left|\langle h_۲|\psi_N(۰)\rangle\right|^۲=\left|\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\begin{pmatrix}-۳i & ۰ & ۱\end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۵۹}}\begin{pmatrix}۴-i\\-۲+۵i\\۳+۲i\end{pmatrix}\right|^۲=\frac{۱۰^۲}{۱۰\times۵۹}=\frac{۱۰}{۵۹}$$

$$P_۳=۱-(P_۱+P_۲)=۱-\left(\frac{۱۴}{۵۹}+\frac{۱۰}{۵۹}\right)=\frac{۵۹-۲۴}{۵۹}=\frac{۳۵}{۵۹}$$

(ب)

$$|\psi_N(t)\rangle=e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\psi_N(۰)\rangle$$

اما می‌توانیم $|\psi_N(۰)\rangle$ را برحسب ویژه بردارهای راست هنجار $\hat{H}$ بسط دهیم.

$$|\psi_N(۰)\rangle=\sum_{i=۱}^{۳}|h_i\rangle\langle h_i|\psi_N(۰)\rangle$$

پس:

$$|\psi_N(t)\rangle=e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}\sum_{i=۱}^{۳}|h_i\rangle\langle h_i|\psi_N(۰)\rangle=\sum_{i=۱}^{۳}|h_i\rangle\langle h_i|\psi_N(۰)\rangle=\sum_{i=۱}^{۳}e^{\frac{-iE_it}{\hbar}}|h_i\rangle\langle h_i|\psi_N(۰)\rangle$$

$$\langle h_۱|\psi_N(۰)\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\begin{pmatrix}۱ & ۲i & -۳i\end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۵۹}}\begin{pmatrix}۴-i\\-۲+۵i\\۳+۲i\end{pmatrix}=-\sqrt{\frac{۱۴}{۵۹}}i$$

$$\langle h_۲|\psi_N(۰)\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\begin{pmatrix}-۳i & ۰ & ۱\end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۵۹}}\begin{pmatrix}۴-i\\-۲+۵i\\۳+۲i\end{pmatrix}=-\sqrt{\frac{۱۰}{۵۹}}i$$

$$\langle h_۳|\psi_N(۰)\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۳۵}}\begin{pmatrix}۱ & -۵i & -۳i\end{pmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۵۹}}\begin{pmatrix}۴-i\\-۲+۵i\\۳+۲i\end{pmatrix}=\sqrt{\frac{۳۵}{۵۹}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پس:

$$|\psi_N(t)\rangle = -\sqrt{\frac{۱۴}{۵۹}}\, i e^{\frac{-۵i\sqrt{۲}t}{\hbar}} |a_۱\rangle - \sqrt{\frac{۱۰}{۵۹}}\, i |a_۲\rangle + \sqrt{\frac{۳۵}{۵۹}} e^{\frac{-۵i\sqrt{۲}t}{۲\hbar}} |a_۳\rangle$$

(پ)

$$E(t) = \langle\psi_N(t)|\hat{H}|\psi_N(t)\rangle = \langle\psi_N(۰)|e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\hat{H}e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}|\psi_N(۰)\rangle = \langle\psi_N(۰)|\hat{H}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\psi_N(۰)\rangle$$
$$= \langle\psi_N(۰)|\hat{H}|\psi_N(۰)\rangle = E(۰)$$

(ت)

چون $\hat{A}$ فاقد بردارهای ویژه تبهگن است لذا $\{\hat{A}\}$ یک مجموعه‌ی کامل عملگرهای جابه‌جا شونده را تشکیل می‌دهد.

تمرین ۳-۲۲

ذره‌ای را در نظر بگیرید که در یک پتانسیل نرده‌ای $V(\vec{r}) = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$ حرکت می‌کند.

(آ) نشان دهید که هامیلتونی این ذره را می‌توان به‌صورت $\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z$ نوشت که در آن $\hat{H}_x = \frac{\hat{P}_x^۲}{۲m} + V_x(x)$ و به همین ترتیب.

ب) آیا $\hat{H}_x, \hat{H}_y, \hat{H}_z$ یک مجموعه‌ی کامل از عملگرهای جابه‌جاشونده را تشکیل می‌دهند؟

حل:

(آ)

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^۲}{۲m} + \hat{V}(\vec{r}) = \frac{\hat{P}_x^۲ + \hat{P}_y^۲ + \hat{P}_z^۲}{۲m} + \hat{V}_x(x) + \hat{V}_y(y) + \hat{V}_z(z)$$
$$= \frac{\hat{P}_x^۲}{۲m} + \hat{V}_x(x) + \frac{\hat{P}_y^۲}{۲m} + \hat{V}_y(y) + \frac{\hat{P}_z^۲}{۲m} + \hat{V}_z = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z$$

(ب)

چون $\hat{H}_x$، $\hat{H}_y$ و $\hat{H}_z$ فاقد ویژه توابع تبهگن هستند و از طرفی دو به دو با هم جابه‌جا می‌شوند بنابراین $\{\hat{H}_x, \hat{H}_y, \hat{H}_z\}$ تشکیل یک مجموعه‌ی کامل از عملگرهای جابه‌جا شونده را می‌دهند.

تمرین ۳-۲۳

سیستمی را در نظر بگیرید که هامیلتونی آن $H = \varepsilon\begin{pmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰ \end{pmatrix}$ است و در آن ε ثابتی حقیقی با بعد

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

انرژی است.

(آ) ویژه مقدارهای انرژی H را بیابید.

(ب) اگر سیستم ابتدا (یعنی در $t=0$) در حالت $|\psi_0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ باشد، احتمال را طوری بیابید که اندازه‌گیری انرژی در $t=0$، E_1 و E_2 را نتیجه دهد.

(پ) مقدار میانگین انرژی $\langle\hat{H}\rangle$ و عدم قطعیت انرژی $\sqrt{\langle\hat{H}^2\rangle-\langle\hat{H}\rangle^2}$ را بیابید.

(ت) حالت $|\psi(t)\rangle$ را بیابید.

حل:

(آ)

$$\mathrm{Tr}(H)=E_1+E_2=0$$
$$\det(H)=-\varepsilon^2=E_1E_2$$

پس:

$$E_1=-E_2=\varepsilon$$

(ب)

اما ویژه بردارهای راست هنجار (چون $\hat{H}$ فاقد ویژه بردار تبهگن است، ویژه بردارهای آن خودبه‌خود متعامد هستند) متناظر عبارتند از:

$$|E_1=\varepsilon\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\quad,\quad|E_2=-\varepsilon\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

$$P_1(E_1)=\left|\langle E_1|\psi(0)\rangle\right|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2=\frac{1}{2}$$

$$P_2(E_2)=\left|\langle E_2|\psi(0)\rangle\right|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2=\frac{1}{2}$$

(پ)

در اینجا ذکر این نکته مفید است که مقدار چشمداشتی $\hat{H}$ و یا هر تابعی از آن در طول زمان ثابت است.

$$\langle\hat{H}\rangle=P_1E_1+P_2E_2=\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}(-\varepsilon)=0$$
$$\langle\hat{H}^2\rangle=P_1E_1^2+P_2E_2^2=\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{2}(-\varepsilon)^2=\varepsilon^2$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\Delta\hat{H}=\sqrt{\langle\hat{H}^{۲}\rangle-\langle H\rangle^{۲}}=\sqrt{\varepsilon^{۲}-۰^{۲}}=|\varepsilon|$$

(ت)

$$|\psi(t)\rangle=e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\psi(۰)\rangle=e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}\left(\frac{|E_{۱}\rangle+|E_{۲}\rangle}{\sqrt{۲}}\right)=\frac{e^{\frac{-iE_{۱}t}{\hbar}}|E_{۱}\rangle+e^{\frac{-iE_{۲}t}{\hbar}}|E_{۲}\rangle}{\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[\begin{pmatrix}e^{\frac{-i\varepsilon t}{\hbar}}\\ ie^{\frac{-i\varepsilon t}{\hbar}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}\\ -ie^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right)\\ \sin\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right)\end{pmatrix}$$

تمرین ۳-۲۴

رابطه‌ی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\hat{B}\rangle=\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{B}\rangle+\langle\hat{A}\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\rangle+\frac{۱}{i\hbar}\langle\left[\hat{A},\hat{H}\right]\hat{B}\rangle+\frac{۱}{i\hbar}\langle\hat{A}\left[\hat{B},\hat{H}\right]\rangle$$

حل:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\hat{B}\rangle=\frac{۱}{i\hbar}\langle\left[\hat{A}\hat{B},\hat{H}\right]\rangle+\left\langle\frac{\partial(\hat{A}\hat{B})}{\partial t}\right\rangle=\frac{۱}{i\hbar}\langle\left[\hat{A},\hat{H}\right]\hat{B}+\hat{A}\left[\hat{B},\hat{H}\right]\rangle+\left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{B}+\hat{A}\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\right\rangle$$

$$=\frac{۱}{i\hbar}\langle\left[\hat{A},\hat{H}\right]\hat{B}\rangle+\frac{۱}{i\hbar}\langle\hat{A}\left[\hat{B},\hat{H}\right]\rangle+\left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\hat{B}\right\rangle+\left\langle\hat{A}\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\right\rangle$$

تمرین ۳-۲۵

ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیروی گرانش حرکت می‌کند. هامیلتونی ذره $\hat{H}=\frac{\hat{P}_{z}^{۲}}{۲m}-mg\hat{Z}$ می‌باشد که در آن g شتاب ناشی از گرانش است $\left(g=۹/۸\,\mathrm{ms}^{-۲}\right)$.

(آ) $\frac{d\langle\hat{Z}\rangle}{dt}$ ، $\frac{d\langle\hat{P}_{z}\rangle}{dt}$ و $\frac{d\langle\hat{H}\rangle}{dt}$ را محاسبه کنید.

(ب) معادله‌ی $\frac{d\langle\hat{Z}\rangle}{dt}$ را حل کنید و $\langle\hat{Z}\rangle(t)$ را به‌دست آورید به طوری که $\langle\hat{Z}\rangle(۰)=h$ و $\langle\hat{P}_{z}\rangle(۰)=۰$. نتیجه را با رابطه‌ی کلاسیکی $z(t)=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+h$ مقایسه کنید.

حل:

(آ)

$$\frac{d\langle\hat{Z}\rangle}{dt}=\frac{۱}{i\hbar}\langle\left[\hat{Z},\hat{H}\right]\rangle+\left\langle\frac{\partial\hat{Z}}{\partial t}\right\rangle=\frac{۱}{i\hbar}\left[\hat{Z},\frac{P^{۲}}{۲m}+mg\hat{Z}\right]=\frac{۱}{i\hbar}\frac{۱}{۲m}\left[\hat{Z},\hat{P}_{x}^{۲}+\hat{P}_{y}^{۲}+\hat{P}_{z}^{۲}\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{2i\hbar m}\left\langle\left[\hat{Z}, \hat{P}_z^2\right]\right\rangle = \frac{1}{2i\hbar m}\left\langle i\hbar\, 2\hat{P}_z\right\rangle = \frac{\left\langle \hat{P}_z\right\rangle}{m}$$

$$\frac{d\left\langle \hat{P}\right\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{P}, \hat{H}\right]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial \hat{P}}{\partial t}\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{P}, \frac{\hat{P}^2}{2m} + mg\,\hat{Z}\right]\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{P}, mg\,\hat{Z}\right]\right\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, mg\,\hat{Z}\right]\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle i\hbar\left\{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, mg\,\hat{Z}\right\}\right\rangle = -\left\langle\frac{2\hat{P}_z}{2\hat{P}} mg\right\rangle$$

$$= -mg\left\langle\frac{\hat{P}_z}{\hat{P}}\right\rangle$$

$$\frac{d\left\langle \hat{\vec{P}}\right\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\left\langle \hat{i}P_x + \hat{j}P_y + \hat{k}P_z\right\rangle = \hat{i}\frac{d\left\langle P_x\right\rangle}{dt} + \hat{j}\frac{d\left\langle P_y\right\rangle}{dt} + \hat{k}\frac{d\left\langle P_z\right\rangle}{dt}$$

اما:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{P}_x\right\rangle = \left\langle\frac{\partial \hat{P}_x}{dt}\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{P}_x, \hat{H}\right]\right\rangle = 0 = \frac{d}{dt}\left\langle \hat{P}_y\right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{P}_z\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{P}_z, mg\hat{Z}\right]\right\rangle = -mg$$

پس:

$$\frac{d\left\langle \hat{\vec{P}}\right\rangle}{dt} = -mg\,\hat{k}$$

$$\frac{d\left\langle \hat{H}\right\rangle}{dt} = \left\langle\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{H}, \hat{H}\right]\right\rangle = 0$$

(ب)

از طرفین رابطه‌ی $\frac{d\left\langle \hat{Z}\right\rangle}{dt} = \frac{\left\langle \hat{P}_z\right\rangle}{m}$ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d^2\left\langle \hat{Z}\right\rangle}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\left\langle \hat{P}_z\right\rangle = \frac{1}{m}(-mg) = -g$$

$$\frac{d\left\langle \hat{Z}\right\rangle}{dt} = -gt + \left(\frac{d\left\langle \hat{Z}\right\rangle}{dt}\right)_{t=0} = -gt + \frac{\left\langle \hat{P}_z\right\rangle(0)}{m}$$

$$\left\langle \hat{Z}\right\rangle = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\left\langle \hat{P}_z\right\rangle(0)}{m}t + \left\langle \hat{Z}\right\rangle(0)$$

با فرض اینکه $\left\langle \hat{P}_z\right\rangle(0) = 0$ آنگاه:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle \hat{Z} \rangle = -\frac{1}{2} g t^2 + h$$

در اینجا باید گفت منظور از $\langle \hat{P}_z \rangle(0)$ و $\langle \hat{Z} \rangle(0)$ عبارت است از $\langle \hat{P}_z \rangle$ و $\langle \hat{Z} \rangle$ در لحظه‌ی صفر.

تمرین ۳-۲۶

برای ذره‌ای با هامیلتونی $\hat{H} = \frac{\hat{P}_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{X}^2 + V_0 \hat{X}^3$ ، $\frac{d\langle \hat{H} \rangle}{dt}$ و $\frac{d\langle \hat{P}_x \rangle}{dt}, \frac{d\langle \hat{X} \rangle}{dt}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{d\langle \hat{X} \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{X}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{X}, \hat{H}] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[\hat{X}, \frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m w^2 \hat{X}^2 + V_0 \hat{X}^3 \right] \right\rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[\hat{X}, \frac{\hat{P}_x^2}{2m} \right] \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2i\hbar m} \langle 2\hat{P}_x \rangle = \frac{\langle \hat{P}_x \rangle}{m}$$

$$\frac{d\langle \hat{P}_x \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{P}_x}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{P}_x, \hat{H}] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[\hat{P}_x, +\frac{1}{2} m w^2 \hat{X}^2 + V_0 \hat{X}^3 \right] \right\rangle = -\left\langle \left[m w^2 \hat{X} + 3 V_0 \hat{X}^2 \right] \right\rangle$$

$$= -m w^2 \langle \hat{X} \rangle + (-3) V_0 \langle \hat{X}^2 \rangle$$

$$\frac{d\langle \hat{H} \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{H}] \rangle = 0$$

تمرین ۳-۲۷

سیستمی را در نظر بگیرید که حالت اولیه‌ی آن در $t = 0$ برحسب مجموعه‌ای از چهار بردار $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ به‌صورت زیر است:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{A}{\sqrt{12}} |\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\phi_2\rangle + \frac{2}{\sqrt{12}} |\phi_3\rangle + \frac{1}{2} |\phi_4\rangle$$

و درآن A یک ثابت حقیقی است.

(آ) A را به‌گونه‌ای بیابید که $|\psi(0)\rangle$ بهنجار باشد.

(ب) اگر انرژی‌های متناظر با $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle$ و $|\phi_4\rangle$ به ترتیب با E_1، E_2، E_3 و E_4 داده شوند، حالت سیستم $|\psi(t)\rangle$ در هر زمان t پس از آن را بنویسید.

(پ) احتمال یافتن سیستم در یک زمان t در حالت $|\phi_2\rangle$ را تعیین کنید.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

$$1=\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle=\frac{|A|^2}{6}+\frac{1}{6}+1+\frac{1}{4}$$

ملاحظه می‌شود که به ازای هر مقداری از A، حالت سیستم غیر قابل بهنجار شدن است.

به‌جای $|\psi(0)\rangle$ داده شده، از $|\psi_N(0)\rangle$ که در ذیل می‌آید استفاده می‌شود:

$$|\psi_N(0)\rangle=\sqrt{\frac{12}{19}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_1\rangle+\frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_2\rangle+|\phi_3\rangle+\frac{1}{2}|\phi_4\rangle\right)$$

(ب)

$$|\psi_N(t)\rangle=e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}|\psi_N(0)\rangle=\sqrt{\frac{12}{19}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}e^{\frac{-iE_1t}{\hbar}}|\phi_1\rangle+\frac{1}{\sqrt{6}}e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}}|\phi_2\rangle+e^{\frac{-iE_3t}{\hbar}}|\phi_3\rangle+\frac{1}{2}e^{\frac{-iE_4t}{\hbar}}|\phi_4\rangle\right)$$

(پ)

$$P=|\langle\phi_2|\psi_N(t)\rangle|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{6}}e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}}\right|^2=\frac{1}{6}$$

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

فصل چهارم

مسأله‌های یک بُعدی

تمرین ۴-۱

ذره‌ای به جرم m در معرض پتانسیل زیر قرار دارد:

$$V(x)=\begin{cases}0 & |x|<a/2\\ \infty & |x|>a/2\end{cases}$$

(آ) توابع موج حالت پایه و اولین و دومین حالت برانگیخته را بیابید.

(ب) مقادیر E_1, E_2 و E_3 را بیابید.

(پ) چگالی‌های احتمال $P_2(x,t)$ و $P_3(x,t)$ را رسم کنید.

(ت) $\langle X\rangle_2, \langle X\rangle_3, \langle P\rangle_2$ و $\langle P\rangle_3$ را بیابید.

(ث) $\Delta x\Delta p$ را برای حالت‌های $\psi_2(x,t)$ و $\psi_3(x,t)$ برآورد کنید.

حل:

(آ)

توصیف حرکت ذره‌ی میکروسکوپیکی به جرم m در پتانسیل یک بُعدی مستقل از زمان از طریق معادله‌ی شرودینگر بیان می‌شود:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

در این رابطه، $\psi(x)$ و E به‌ترتیب ویژه توابع و ویژه مقادیر هامیلتونی هستند.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

در این مسئله چون در نواحی $|x| > \frac{a}{۲}$ پتانسیل نامتناهی است، لذا در این نواحی تابع موج باید صفر باشد و برای ناحیه‌ی $|x| < \frac{a}{۲}$ داریم:

$$\frac{-\hbar^۲}{۲m}\frac{d^۲\psi(x)}{dx^۲} = E\psi(x)$$

و یا به عبارتی:

$$\frac{d^۲\psi(x)}{dx^۲} + k^۲\psi(x) = ۰$$

که در این رابطه:

$$k^۲ = \frac{۲mE}{\hbar^۲}$$

جواب این معادله عبارتست از:

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

اما پیوستگی تابع موج در $|x| = \frac{a}{۲}$ بیانگر آنست که:

$$\psi\left(x = \frac{a}{۲}\right) = \psi\left(x = -\frac{a}{۲}\right) = ۰$$

یا به‌عبارتی:

$$A\sin\frac{ka}{۲} + B\cos\frac{ka}{۲} = ۰$$

$$-A\sin\frac{ka}{۲} + B\cos\frac{ka}{۲} = ۰$$

این دو رابطه‌ی بیانگر آن هستند که از بین A و B یکی باید صفر و دیگری غیرصفر باشد یعنی $\psi(x)$ یا باید به‌شکل $\psi(x) = A\sin kx$ و یا به شکل $\psi(x) = B\cos kx$ باشد. در مورد اول داریم:

$$A\sin\frac{ka}{۲} = ۰$$

پس چون A باید صفر باشد لذا:

$$\frac{ka}{۲} = ۲m\pi \quad ; \quad m = ۱, ۲, \ldots$$

در مورد دوم داریم:

$$B\cos\frac{ka}{۲} = ۰$$

و چون B باید غیر صفر باشد لذا:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{ka}{۲} = m'\pi + \frac{\pi}{۲} \quad ; \quad m' = ۰,۱,۲,\dots$$

پس به‌طور کلّی نتیجه می‌شود که:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) & ; \quad n = ۲,۴,\dots \\ B\cos\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) & ; \quad n = ۱,۳,\dots \end{cases}$$

A و B نیز از شرط بهنجارش به دست می‌آیند:

$$۱ = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^۲ \, dx$$

که نتیجه می‌دهد:

$$A = B\sqrt{\frac{۲}{a}}$$

انرژی نیز از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$E_n = \frac{\hbar^۲ n^۲ \pi^۲}{۲ma^۲} \quad ; \quad n = ۱,۲,\dots$$

پس ویژه تابع حالت پایه عبارتست از:

$$\psi_۱(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

ویژه تابع اولین حالت برانگیخته عبارتست از:

$$\psi_۲(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{۲\pi x}{a}\right)$$

و ویژه تابع دومین حالت برانگیخته عبارتست از:

$$\psi_۳(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}}\cos\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)$$

(ب)

$$E_۱ = \frac{\hbar^۲\pi^۲}{۲ma^۲}$$

$$E_۲ = \frac{۴\hbar^۲\pi^۲}{۲ma^۲} = \frac{۲\hbar^۲\pi^۲}{ma^۲}$$

$$E_۳ = \frac{۹\hbar^۲\pi^۲}{۲ma^۲}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ)

از آنجا که در حالت کلی:

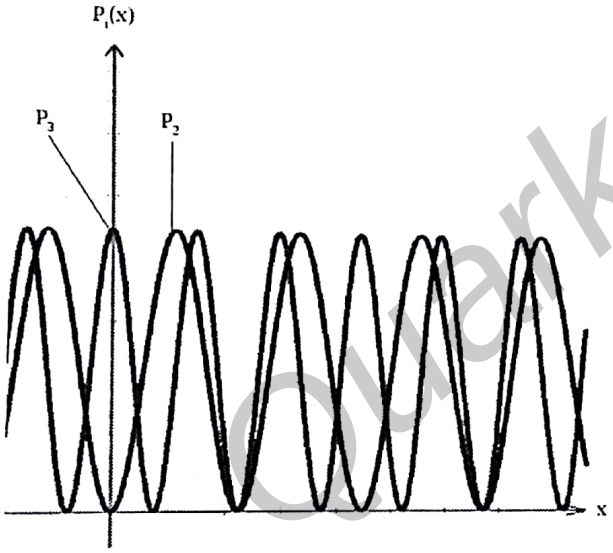
$$\psi_n(x,t)=e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}\psi_n(x)$$

لذا:

$$P_۲(x,t)=\left|\psi_۲(x,t)\right|^۲=\left|\psi_۲(x)e^{\frac{-iE_۲t}{\hbar}}\right|^۲=\left|\psi_۲(x)\right|^۲=\frac{۲}{a}\sin^۲\left(\frac{۲\pi x}{a}\right)$$

$$P_۳(x,t)=\left|\psi_۳(x,t)\right|^۲=\left|\psi_۳(x)e^{\frac{-iE_۳t}{\hbar}}\right|^۲=\left|\psi_۳(x)\right|^۲=\frac{۲}{a}\cos^۲\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)$$

نمودارهای $P_۲$ و $P_۳$



(ت)

$$\left\langle\hat{X}\right\rangle_۲=\left\langle\psi_۲\middle|\hat{X}\middle|\psi_۲\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi_۲^*(x)\,x\,\psi_۲(x)=\int_{\frac{-a}{۲}}^{\frac{a}{۲}}dx\,\psi_۲(x)\,x\,\psi_۲(x)=۰$$

علت صفر شدن رابطه‌ی اخیر آن است که $\psi_۲(x)$ تابعی فرد است. لذا انتگرالده تابعی فرد خواهد شد و چون بازه انتگرال‌گیری متقارن است، نتیجه‌ی انتگرال صفر خواهد شد. به‌طور کلی چون در این مسأله، ویژه توابع انرژی دارای پاریته‌ی مشخص هستند (یعنی یا زوج هستند یا فرد)، لذا محاسبه‌ی مقدار چشمداشتی عملگرهای $\hat{X}$ و $\hat{P}$ با استفاده از هر یک از این ویژه توابع، مقداری صفر خواهد بود. پس:

$$\left\langle\hat{X}\right\rangle_۲=\left\langle\hat{X}\right\rangle_۳=۰$$

و:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle \hat{P} \rangle_۲ = \langle \hat{P} \rangle_۳ = ۰$$

(ث)

از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{X}^۲ \rangle - \langle \hat{X} \rangle^۲}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle \hat{P}^۲ \rangle - \langle \hat{P} \rangle^۲}$$

در اینجا $\langle \hat{X} \rangle = ۰$ و $\langle \hat{P} \rangle = ۰$. بنابراین:

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{X}^۲ \rangle}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle \hat{P}^۲ \rangle}$$

برای حالت $\psi_۲(x,t)$ داریم:

$$\langle \hat{X}^۲ \rangle_t = \langle \psi_۲ | \hat{X}^۲ | \psi_۲ \rangle_t = \int_{-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}} dx \psi_۲^*(x,t) x^۲ \psi_۲(x,t) = \int_{-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}} \sqrt{\frac{۲}{a}} \sin\left(\frac{۲\pi x}{a}\right) x^۲ \sqrt{\frac{۲}{a}} \sin\left(\frac{۲\pi x}{a}\right) dx$$

$$= ۲\left(\frac{۲}{a}\right) \int_{۰}^{\frac{a}{۲}} x^۲ \sin^۲\left(\frac{۲\pi x}{a}\right) dx = \frac{a^۲}{\pi^۲} \frac{۲\pi^۲ + ۳}{۲۴}$$

$$\langle \hat{P}^۲ \rangle_t = \langle \psi_۲ | \hat{P}^۲ | \psi_۲ \rangle = \int_{-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}} dx \psi_۲^*(x,t) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\right)^۲ \psi_۲(x,t)$$

$$= -\hbar^۲ \int_{-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}} dx \sqrt{\frac{۲}{a}} \sin\left(\frac{۲\pi x}{a}\right) \frac{d^۲}{dx^۲} \left[\sqrt{\frac{۲}{a}} \sin\left(\frac{۲\pi x}{a}\right)\right] dx = \hbar^۲ \left(\frac{۲\pi}{a}\right)^۲ \left(\frac{۲}{a}\right) \int_{-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}} \sin^۲\left(\frac{۲\pi x}{a}\right) dx$$

$$= \hbar^۲ \left(\frac{۲\pi}{a}\right)^۲$$

پس:

$$\Delta x = \frac{a}{۲\pi} \sqrt{\frac{۲\pi^۲ + ۳}{۶}}$$

$$\Delta p = \frac{۲\pi}{a} \hbar$$

و درنتیجه:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\Delta x\,\Delta p = \left(\frac{۲\pi^۲ + ۳}{۶}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

برای حالت $\psi_۲(x,t)$ داریم:

$$\left\langle \hat{X}^۲ \right\rangle_t = ۲\left(\frac{۲}{a}\right)\int_۰^{\frac{a}{۲}} x^۲ \cos^۲ \frac{۳\pi x}{a}\,dx = \frac{\left(۹\pi^۲ - ۲\right)a^۲}{۳۶\pi^۲}$$

$$\left\langle \hat{P}^۲ \right\rangle_t = \hbar^۲\left(\frac{۳\pi}{a}\right)^۲$$

$$\Delta x\,\Delta p = \frac{a}{۶\pi}\left(۹\pi^۲ - ۲\right)^{\frac{۱}{۲}}\hbar\frac{۳\pi}{a} = \frac{\hbar}{۲}\left(۹\pi^۲ - ۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

تمرین ۴-۲

سیستمی را در نظر بگیرید که تابع موج آن در $t=۰$ عبارت است از

$$\psi(x,۰) = \frac{۳}{\sqrt{۳۰}}\phi_۱(x) + \frac{۴}{\sqrt{۳۰}}\phi_۲(x) + \frac{۱}{\sqrt{۶}}\phi_۵(x),$$

که درآن $\phi_n(x)$ تابع موج حالت برانگیخته‌ی nاُم یک چاه پتانسیل مربعی نامتناهی به‌پهنای a و انرژی آن $E_n = \pi^۲\hbar^۲n^۲/(۲ma^۲)$ است.

(آ) انرژی میانگین این سیستم را بیابید.

(ب) حالت $\psi(x,t)$ را در زمان t و مقدار متوسط انرژی را بیابید. نتیجه را با مقدار به‌دست آمده در قسمت (آ) مقایسه کنید.

حل:

(آ)

به‌طور کلی اگر تابع موج بهنجار $\psi(x)$ را برحسب ویژه توابع راست هنجار مشاهده‌پذیر $\hat{A}$؛ $\left(\{\phi_n(x)\}\right)$، بسط دهیم، یعنی:

$$\psi(x) = \sum_n C_n\phi_n(x)$$

آنگاه مقدار چشمداشتی عملگر $\hat{A}$ عبارت خواهد بود از:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \sum_n |C_n|^۲ a_n$$

که در این رابطه، a_n ویژه مقدار متناظر با ویژه تابع $\phi_n(x)$ است. پس در مورد این مسئله داریم:

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle = \left|\frac{۳}{\sqrt{۳۰}}\right|^۲ E_۱ + \left|\frac{۴}{\sqrt{۳۰}}\right|^۲ E_۲ + \left|\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right|^۲ E_۵$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{۹}{۳۰}\frac{\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲} + \frac{۱۶}{۳۰}\frac{۴\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲} + \frac{۱}{۶}\frac{۲۵\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲} = \frac{۱}{۳۰}\frac{\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}\left(۹ + ۶۴ + ۱۲۵\right) = \frac{۳۳}{۵}\frac{\pi^۲\hbar^۲}{ma^۲}$$

(ب)
به‌طور کلی $\psi(x,t)$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\psi(x,t) = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}\psi(x,t)$$

اما اگر $\psi(x,۰)$ را برحسب ویژه توابع انرژی بسط داده باشیم یعنی:

$$\psi(x,۰) = \sum_n C_n \phi_n(x)$$

که درآن $\{\phi_n(x)\}$ ویژه توابع انرژی هستند، آنگاه:

$$\psi(x,t) = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}\sum_n C_n\phi_n = \sum_n C_n e^{\frac{-iHt}{\hbar}}\phi_n(x) = \sum_n C_n e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}}\phi_n(x)$$

پس در اینجا داریم:

$$\psi(x,t) = \frac{۳}{\sqrt{۳۰}}e^{-i\frac{E_۱t}{\hbar}}\phi_۱(x) + \frac{۴}{\sqrt{۳۰}}e^{\frac{-iE_۲t}{\hbar}}\phi_۲(x) + \frac{۱}{\sqrt{۶}}e^{\frac{-iE_۵t}{\hbar}}\phi_۵(x)$$

$$\langle\hat{H}\rangle_t = \left|\frac{۳}{\sqrt{۳۰}}e^{\frac{-iE_۱t}{\hbar}}\right|^۲E_۱ + \left|\frac{۴}{\sqrt{۳۰}}e^{\frac{-iE_۲t}{\hbar}}\right|^۲E_۲ + \left|\frac{۱}{\sqrt{۶}}e^{\frac{-iE_۵t}{\hbar}}\right|^۲E_۵$$

$$= \left|\frac{۳}{\sqrt{۳۰}}\right|^۲E_۱ + \left|\frac{۴}{\sqrt{۳۰}}\right|^۲E_۲ + \left|\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right|^۲E_۵ = \langle\hat{H}\rangle_{t=۰} = \frac{۳۳}{۵}\frac{\pi^۲\hbar^۲}{ma^۲}$$

و این نتیجه‌ای کلی است:

$$\langle\hat{H}\rangle_t = \langle\hat{H}\rangle_t = ۰$$

تمرین ۴-۳

الکترونی با انرژی جنبشی ۱۰ eV در مقدارهای منفی x از چپ به راست و در راستای محور x در حال حرکت است. انرژی پتانسیل عبارت است از:

$$V(x) = \begin{cases} ۰ & (x \le ۰) \\ ۲۰\text{eV} & (x > ۰) \end{cases}$$

(آ) معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان را در محدوده‌های $x \le ۰$ و $x > ۰$ بنویسید.

(ب) یک جواب را برای $\psi_E(x)$ رسم کنید.

(پ) تابع موج الکترون را (برحسب متر) در $-۲۰\text{m} < x < -۱۰\text{m}$ و $x > ۱۰\text{m}$ محاسبه کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ت) شرایط مرزی را در $x=0$ بنویسید.

(ث) نسبت احتمال‌ها را برای یافتن الکترون نزدیکی $x=10^{-10}\,\mathrm{m}$ و $x=0$ محاسبه کنید.

حل:

به‌طور کلی داریم:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x)$$

پس:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2}=E\psi_1(x) \qquad ; \qquad x<0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2}=(E-V_0)\psi_2(x) \qquad ; \qquad x>0$$

و یا به‌طور معادل:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+k_1^2\psi_1(x)=0 \qquad ; \qquad x<0$$

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2}-k_2'^2\psi_2(x)=0 \qquad ; \qquad x>0$$

که در آن:

$$k_1^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$k_2'^2=\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)$$

پس جواب‌های مربوط به $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ عبارتند از:

$$\psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$$

$$\psi_2(x)=Ce^{-k_2'x}+De^{k_2'x}$$

از آنجا که تابع موج باید متناهی باشد، چون عبارت $e^{k_2'x}$ وقتی $x\to+\infty$ واگرا می‌شود لذا D باید صفر باشد. از پیوستگی تابع موج در $x=0$ داریم:

$$\psi_1(0)=\psi_2(0)$$

یا:

$$A+B=C$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

از پیوستگی مشتق تابع موج در $x=0$ داریم:

$$ik_1(A-B)=-k'_2C$$

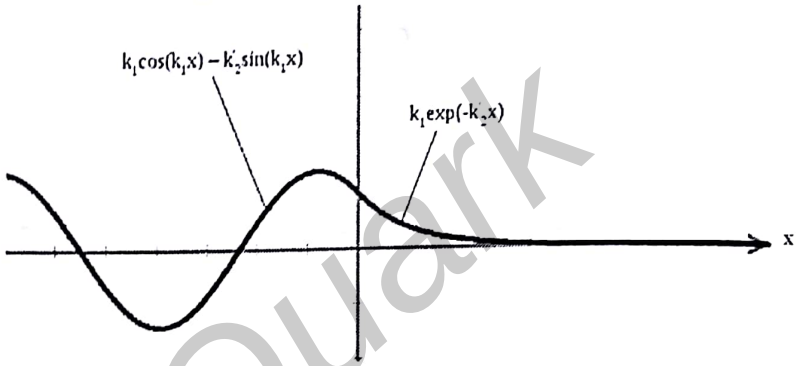
از حل این دو معادله‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$B=\frac{k_1-ik'_2}{k_1+ik'_2}A$$

$$C=\frac{2k_1}{k_1+ik'_2}A$$

و یا به عبارتی:

$$\psi'_E(x)=\frac{k_1+ik'_2}{2a}\psi_E(x)=\begin{cases}k_1\cos k_1x-k'_2\sin k_1x & ; \quad x<0\\ k_1e^{-k'_2x} & ; \quad x>0\end{cases}$$



برای ناحیه‌ی $-20m<x<-10m$ می‌توان طول موج الکترون را از رابطه‌ی زیر یافت:

$$\lambda_1=\frac{2\pi}{k_1}=\frac{2\pi}{\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}}=\frac{2\pi\times 197/327\,\frac{\text{eV.nm}}{\text{c}}}{\left(2\times 0/511\frac{\text{MeV}}{c^2}\times 10\text{eV}\right)^{\frac{1}{2}}}\simeq 3/95\,\text{Å}$$

برای ناحیه‌ی $x>10$ به‌دلیل رفتارنمایی تابع موج، تعریف طول موج چندان بامعنا نیست.

اگر احتمال یافتن الکترون حول $x=10^{-10}m$ را با P و حول $x=0$ را با P' نشان دهیم آنگاه:

$$\frac{P}{P'}=\frac{\left|\psi\left(x=10^{-10}m\right)\right|^2}{\left|\psi(x=0)\right|^2}=\frac{\left[k_1\cos\left(\frac{2\pi}{3/95\text{Å}}\times 1A\right)-k'_2\sin\left(\frac{2\pi}{3/95\text{Å}}\times 1A\right)\right]^2}{k_1^2}\simeq\frac{k'^2_2}{k_2^2}=\frac{V_0-E}{E}$$

تمرین ۴-۴

ذره‌ای در چاه پتانسیل زیر در حال حرکت است:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$V(x)=\begin{cases}0 & -a\le x\le -b\\ V_0 & -b\le x\le b\\ 0 & b\le x\le a\\ +\infty & \text{بقیه جاها}\end{cases}$$

که در آن V_0 مثبت است. در این مسأله $E<V_0$ درنظر بگیرید. $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ را طوری درنظر بگیرید که دو جواب برای کمترین مقدار انرژی در معادله‌ی شرودینگر باشند و انرژی‌های آن‌ها را به‌ترتیب E_1 و E_2 بنامید.

(آ) E_1 و E_2 را در واحد eV برای حالتی که در آن $mc^2=1\text{GeV}$, $a=10^{-14}\,\text{m}$ و $b=0/4\times10^{-14}\,\text{m}$ و $\hbar c\simeq 200\,\text{MeV.fm}$ محاسبه کنید.

(ب) جواب خصوصی معادله‌ی شرودینگر را می‌توان با برهم نهی $\psi_1(x)e^{iE_1t/\hbar}$ و $\psi_2(x)e^{iE_2t/\hbar}$ ساخت بسته موجی بسازید که در $t=0$ تماماً در طرف چپ چاه باشد و حرکت آن را در زمان توصیف کنید. زمان تناوب نوسان را بین دو جمله از ψ به‌دست آورید.

حل:

(آ)

از حل معادله‌ی شرودینگر با استفاده از پتانسیل داده شده نتیجه می‌شود که:

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & ; \quad |x|\ge a\\ A\sin kx+B\cos kx & ; \quad -a\le x\le -b\\ Ce^{-k'x}+De^{k'x} & ; \quad -b\le x\le +b\\ E\sin kx+F\cos kx & ; \quad b\le x\le a\end{cases}$$

که در این رابطه:

$$k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$k'^2=\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)$$

با درنظر گرفتن اینکه $\psi(x)$ باید در $x=\pm a$ مقداری برابر صفر داشته باشد می‌توان $\psi(x)$ را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & ; \quad |x|\ge a\\ \alpha\sin k(x+a) & ; \quad -a\le x\le -b\\ Ce^{-k'x}+De^{k'x} & ; \quad -b\le x\le b\\ \beta\sin k(x-a) & ; \quad b\le x\le a\end{cases}$$

و از رابطه‌ی فوق نتیجه می‌شود که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\psi'(x)=\begin{cases}0 & ; \quad |x|\geq a\\ \alpha k\cos k(x+a) & ; \quad -a\leq x\leq -b\\ k'\left(-Ce^{-k'x}+De^{k'x}\right) & ; \quad -b\leq x\leq b\\ \beta k\cos k(x-a) & ; \quad b\leq x\leq a\end{cases}$$

از پیوستگی تابع موج و مشتق آن در $x=\pm b$ داریم:

$$\alpha\sin\left[k(-b+a)\right]=Ce^{k'b}+De^{-k'b}$$

$$\alpha k\cos\left[k(-b+a)\right]=k'\left(-Ce^{+k'b}+De^{-k'b}\right)$$

$$Ce^{-k'b}+De^{k'b}=\beta\sin\left[k(b-a)\right]$$

$$k'\left(-Ce^{-k'b}+De^{k'b}\right)=\beta k\cos\left[k(b-a)\right]$$

از تقسیم رابطه‌ی اول بر رابطه‌ی دوم و نیز تقسیم رابطه‌ی سوم بر رابطه‌ی چهارم داریم:

$$\frac{tg\left[k(a-b)\right]}{k}=\frac{Ce^{k'b}+De^{-k'b}}{k'\left(-Ce^{k'b}+De^{-k'b}\right)}=-\frac{Ce^{-k'b}+De^{k'b}}{k'\left(-Ce^{-k'b}+De^{k'b}\right)}$$

از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود که:

$$C^2=D^2$$

مورد $C=D$ (ویژه توابع زوج):

$$\frac{tg\,k(a-b)}{k}=-\frac{\cot h(k'b)}{k'}$$

و:

$$\alpha=-\beta=\frac{2C\cos h(k'b)}{\sin\left[k(a-b)\right]}$$

از حل معادله‌ی اول می‌توان مقادیر انرژی را به‌دست آورد. کوچکترین مقدار به‌دست آمده درواقع همان E_1 است.

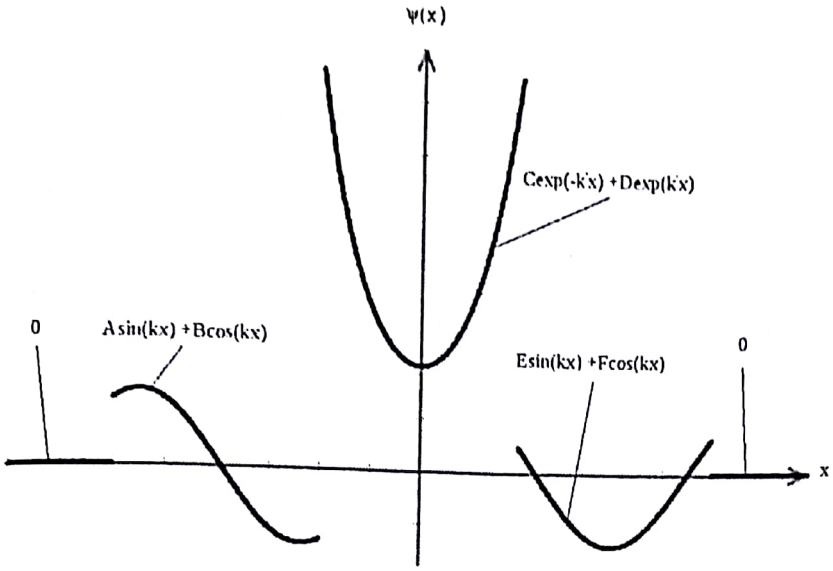
مورد $C=-D$ (ویژه توابع فرد):

$$\frac{tg\,k(a-b)}{k}=-\frac{tg\,h(k'b)}{k'}$$

$$\alpha=\beta=\frac{2C\sinh(k'b)}{\sin\left[k(a-b)\right]}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

از حل معادله‌ی اول مقادیر انرژی و ویژه توابع فرد به‌دست می‌آیند. کوچکترین مقدار به‌دست آمده درواقع همان E_2 است.



در اینجا ذکر این نکته ضروری است که به‌طور کلی هرگاه پتانسیل (یا به‌عبارتی هامیلتونی) زوج باشد ویژه توابع انرژی دارای پاریته‌ی مشخص هستند؛ یعنی، یا زوج هستند و یا فرد.

برای محاسبه‌ی E_1 و E_2 دانستن مقدار V_0 نیز لازم است و روش کار نیز قبلاً توضیح داده شده است.

بسته‌ی موجی را که تقریباً در سمت چپ جایگزیده شده است با $L(x)$ و بسته‌ی موجی که در سمت راست جایگزیده شده است را با $R(x)$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$L(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x)-\psi_2(x)\right)$$

$$R(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x)+\psi_2(x)\right)$$

اما در زمان t داریم:

$$L(x,t)=e^{-\frac{iHt}{\hbar}}L(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{-iHt}{\hbar}}\psi_1(x)-e^{\frac{-iHt}{\hbar}}\psi_2(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}\psi_1(x)-e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}}\psi_2(x)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-iE_1t}{\hbar}}\left(\psi_1(x)-e^{\frac{-it}{\hbar}(E_2-E_1)}\psi_2(x)\right)$$

در زمان $t=\frac{T}{2}\equiv\frac{2\pi\hbar}{2(E_2-E_1)}$ سیستم درحالت $R(x)$ و در زمان $t=T$ مجدداً به‌حالت $L(x)$ باز خواهد گشت و درواقع بین این دو حالت، نوسانی با فرکانس $w=\frac{E_2-E_1}{\hbar}$ داریم.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۴-۵

ذره‌ای در پتانسیل زیر حرکت می‌کند:

$$V(x)=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\left(\frac{۴}{۲۲۵}\sinh^{۲}x-\frac{۲}{۵}\cosh x\right)$$

(آ) $V(x)$ را رسم کنید و مکان دونقطه‌ی کمینه را روی آن مشخص کنید.

(ب) نشان دهید که $\psi(x)=(۱+۴\cosh x)\exp\left(-\frac{۲}{۱۵}\cosh x\right)$ یک جواب معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان برای ذره است. تراز انرژی متناظر را بیابید و مکان آن‌را روی نمودار $V(x)$ نشان دهید.

(پ) $\psi(x)$ را رسم کنید و نشان دهید که در نقاط بازگشت کلاسیکی و در محدوده‌های ممنوع کلاسیکی خوش‌رفتار است.

حل:

(آ)

برای یافتن نقاط کمینه $V(x)$، نقاطی را می‌یابیم که در آنها $V'(x)$ صفر می‌شود.

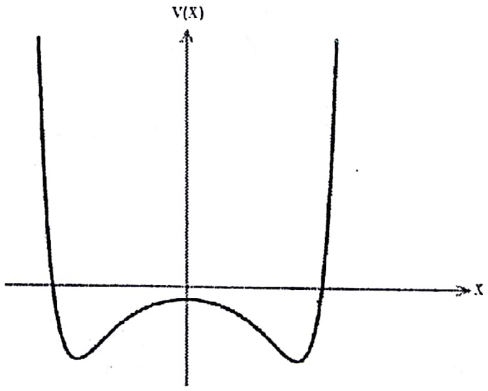
$$\frac{dV(x)}{dx}=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\left(\frac{۴}{۲۲۵}\left(۲\sinh x\cosh hx\right)-\frac{۲}{۵}\sinh x\right)=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\frac{۲}{۲۲۵}\sinh x\left(۴\cosh x-۴۵\right)$$

از مساوی صفر قرار دادن عبارت فوق، داریم:

$$x=۰$$

$$x=\cosh^{-۱}\left(\frac{۴۵}{۴}\right)$$

درواقع این دو نقطه، نقاطی هستند که مینیمم $V(x)$ در آنها اتفاق می‌افتد.



(ب)

برای اینکه $\psi(x)$ جوابی برای معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان باشد باید در آن صدق کند. پس به بررسی این مطلب می‌پردازیم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$H\psi(x)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\left[(1+4\cosh x)\exp\left(-\frac{2}{15}\cosh x\right)\right]$$

$$=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}\left[4\sinh x\exp\left(\frac{-2}{15}\cosh x\right)-\frac{2}{15}\sinh x\exp\left(\frac{-2}{15}\cosh x\right)(1+4\cosh x)\right]$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{4}{225}\sinh^2 x-\frac{2}{5}\cosh x\right)\psi(x)=\frac{-\hbar^2}{2m}\left[4\cosh x\exp\left(\frac{-2}{15}\cosh x\right)\right.$$

$$+4\times\frac{-2}{15}\sinh^2 x\exp\left(\frac{-2}{15}\cosh x\right)-\frac{2}{15}\cosh x\exp\left(\frac{-2}{15}\cosh x\right)(1+4\cosh x)$$

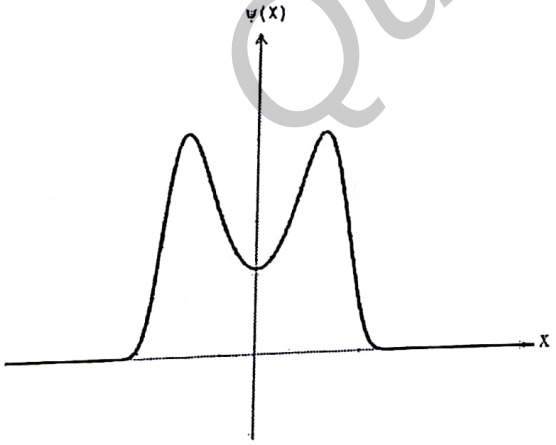
$$\left.+\left(\frac{2}{15}\right)^2\sinh^2 x\exp\left(\frac{-2}{15}\cosh x\right)(1+4\cosh x)-\frac{2}{15}\times 4\sinh^2 x\exp\left(\frac{-2}{15}\cosh x\right)\right]$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{4}{225}\sinh^2 x-\frac{2}{5}\cosh x\right)\psi(x)=\frac{16}{15}\frac{-\hbar^2}{2m}(1+4\cosh x)\exp\left(\frac{-2}{15}\cosh x\right)$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\times\frac{16}{15}\psi(x)$$

پس $\psi(x)$ ویژه تابع هامیلتونی با سطح انرژی $\frac{-8\hbar^2}{15m}$ می‌باشد.

(پ)



تمرین ۴-۶

نشان دهید که برای ذره‌ای به جرم m در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک‌بعدی به‌طول a، حاصل‌ضرب عدم قطعیت‌های $\Delta x_n\Delta p_n$ با $\Delta x_n\Delta p_n \simeq n\pi\hbar/\sqrt{12}$ داده می‌شود.

حل:

از تعاریف عدم قطعیت به فرم زیر استفاده می‌کنیم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\Delta x_n = \sqrt{\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle_n - \left\langle \hat{X} \right\rangle_n^2}$$

$$\Delta p_n = \sqrt{\left\langle \hat{P}^2 \right\rangle_n - \left\langle \hat{P} \right\rangle_n^2}$$

با توجه به‌اینکه:

$$\left\langle \hat{X} \right\rangle_n = \frac{a}{2}$$

$$\left\langle \hat{P} \right\rangle_n = 0$$

$$\left\langle \hat{P}^2 \right\rangle_n = 2mE_n = 2m\frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{a^2}$$

فقط کافی است که $\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle_n$ را بیابیم. برای این منظور داریم:

$$\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle_n = \int_0^a x^2 \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a}\right)^2 dx = \frac{1}{a}\int_0^a x^2 \left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{a}\left(\frac{a^3}{3} - \int_0^a x^2 \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx\right)$$

از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle_n = \frac{a^2}{3} - \frac{1}{a}\left[\left(\frac{ax^2}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\right)_0^a - \frac{a}{n\pi}\int_0^a x \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx\right] = \frac{a^2}{3} + \frac{1}{n\pi}\int_0^a x \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx$$

مجدداً از روش انتگرال‌گیری جزء به‌جزء داریم:

$$\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle_n = \frac{a^2}{3} + \frac{1}{n\pi}\left\{\left[\frac{-a}{2n\pi} x \cos\frac{2n\pi x}{a}\right]_0^a + \left[\left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\right]_0^a\right\} = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2(n\pi)^2} \simeq \frac{a^2}{3}$$

پس:

$$\Delta x_n \simeq \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

$$\Delta p_n = \frac{\hbar n\pi}{a}$$

بنابراین:

$$\Delta x_n \Delta p_n \simeq \frac{n\pi\hbar}{\sqrt{12}}$$

تمرین ۴-۷

ذره‌ای به جرم m در چاه پتانسیل نامتناهی زیر درحال حرکت است:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$V(x)=\begin{cases}V_0 & 0<x<a\\ \infty & \text{هرجای دیگر}\end{cases}$$

(آ) معادله‌ی شرودینگر را حل کنید و ترازهای انرژی و توابع موج بهنجار متناظر را بیابید.

(ب) $\langle\hat{X}\rangle_n$، $\langle\hat{P}\rangle_n$، $\langle\hat{X}^2\rangle_n$ و $\langle\hat{P}^2\rangle_n$ را برای چهارمین حالت برانگیخته محاسبه کنید و مقدار $\Delta x\Delta p$ را نتیجه بگیرید.

حل:

(آ)

معادله‌ی شرودینگر در ناحیه‌ی $0<x<a$ به‌صورت زیر است:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V_0\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

یا:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi(x)=0$$

در اینجا فقط با فرض $E>V_0$ جواب فیزیکی خواهیم داشت و داریم:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k^2\psi(x)=0$$

که در آن:

$$k^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)$$

جواب کلی به‌شکل $\psi(x)=A\sin kx+B\cos kx$ خواهد بود. با اعمال شرط مرزی $\psi(0)=\psi(a)=0$، داریم:

$$B=0$$

$$ka=n\pi \quad ; \quad n=1,2,\dots$$

با استفاده از شرط بهنجارش خواهیم داشت:

$$A=\sqrt{\frac{2}{a}}$$

پس:

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_n = V_\circ + \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$$

درواقع این نتیجه از قبل نیز قابل انتظار بود.

(ب)

با توجه به تمرین قبلی داریم:

$$\langle \hat{X} \rangle_5 = \frac{a}{2}$$

$$\langle \hat{X}^2 \rangle_5 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2(5\pi)^2} \simeq \frac{a^2}{3}$$

$$\langle \hat{P} \rangle_5 = \circ$$

$$\langle \hat{P}^2 \rangle_5 = \frac{25\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

$$\Delta x_5 \Delta p_5 \simeq \frac{5\pi\hbar}{\sqrt{12}}$$

تمرین ۴-۸

پله‌ی پتانسیل زیر را درنظر بگیرید:

$$V(x) = \begin{cases} 6\text{eV}, & x < \circ, \\ \circ, & x > \circ. \end{cases}$$

(آ) یک الکترون با انرژی 8eV ازچپ به‌راست در این پتانسیل درحال حرکت است. احتمال آن‌را که الکترون (۱)پس از رسیدن به پله در راستای اولیه خود به حرکتش ادامه دهد و (۲) در پله‌ی پتانسیل بازتابیده شود، محاسبه کنید.

(ب) اکنون فرض کنید الکترون از راست به چپ با انرژی 3eV در حال حرکت است. (۱) مرتبه‌ی بزرگی فاصله‌ای که الکترون می‌تواند در سد نفوذ کند را تخمین بزنید. (۲) قسمت (۱) را برای یک شخص ۷۰ کیلوگرمی تکرار کنید که ابتدا با سرعت 4ms^{-1} در حال حرکت است و به‌طرف دیواری می‌دود که می‌توان آن‌را با یک پله‌ی پتانسیل با ارتفاع ۴ برابر انرژی این شخص پیش از رسیدن به پله نمایش داد.

حل:

(آ)

طبق معادله‌ی شرودینگر در مورد ویژه تابع انرژی $\psi(x)$ داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

پس:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi(x)=0 \quad ; \quad x\le 0$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0 \quad ; \quad x\ge 0$$

با تعریف:

$$k^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)$$

$$k'^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

داریم:

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{ikx} \quad ; \quad x\le 0$$

$$\psi(x)=Ce^{ik'x} \quad ; \quad x\ge 0$$

از پیوستگی $\psi(x)$ و $\psi'(x)$ در $x=0$ داریم:

$$A+B=C$$

$$ik(A-B)=ik'c$$

و یا به‌عبارتی:

$$\frac{B}{A}=\frac{k-k'}{k+k'}$$

$$\frac{C}{A}=\frac{2k}{k+k'}$$

ضریب انعکاس (احتمال انعکاس) و ضریب عبور (احتمال عبور) که آنها را با R و T نشان می‌دهیم عبارتند از:

$$R=\left|\frac{B}{A}\right|^2=\left(\frac{k-k'}{k'+k}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{E+V_0}-\sqrt{E}}{\sqrt{E+V_0}+\sqrt{E}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{8-6}-\sqrt{8}}{\sqrt{8-6}+\sqrt{8}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{9}$$

$$T=\frac{k'}{k}\left|\frac{C}{A}\right|^2=1-R=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب) در این حالت رفتار تابع موج برای ناحیه‌ی $x<0$ به‌صورت e^{qx} خواهد بود که در آن:

$$q^2=\frac{2m}{\hbar^2}\left(V_0-E\right)$$

مقدار نفوذ الکترون از مرتبه $\frac{1}{q}$ خواهد بود؛ یعنی:

$$\frac{1}{q}=\left[\frac{\hbar^2}{2m\left(V_0-E\right)}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{\left(197/327\text{eV.nm}\right)^2}{c^2\times 2\times 0/511\frac{\text{MeV}}{c^2}\left(6-3\right)\text{eV}}\right]^{\frac{1}{2}}\simeq 1/13\ \text{Å}$$

این مقدار برای یک شخص ۷۰ کیلوگرمی که با سرعت $4\,\text{ms}^{-1}$ به‌سمت دیواری که ارتفاع آن معادل با چهار برابر انرژی شخص قبل از رسیدن به پله است، در حال حرکت می‌باشد برابر است با

$$\frac{1}{q}=\frac{\hbar}{\sqrt{2m\left(V_0-E\right)}}=\frac{\hbar}{\sqrt{2m\left(4E-E\right)}}=\frac{\hbar}{\sqrt{2m\times 3E}}=\frac{\hbar}{\sqrt{3}\sqrt{2mE}}=\frac{\hbar}{\sqrt{3}mv}=\frac{1/055\times 10^{-34}}{\sqrt{3}\times 70\times 4}$$
$$=2/22\times 10^{-37}$$

تمرین ۴-۹

سیستمی را در نظر بگیرید که تابع موج آن در زمان $t=0$ با

$$\psi(x,0)=\frac{5}{\sqrt{50}}\phi_1(x)+\frac{4}{\sqrt{50}}\phi_3(x)+\frac{3}{\sqrt{50}}\phi_4(x)$$

داده می‌شود که در آن، $\phi_n(x)$ تابع موج nاُمین حالت برانگیخته برای یک نوسانگر هماهنگ با انرژی $E_n=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ است.

(آ) انرژی میانگین این سیستم را بیابید.

(ب) حالت $\psi(x,t)$ را در زمان بعدی t و مقدار میانگین انرژی را پیدا کنید؛ نتیجه را با مقدار به دست آمده در (آ) مقایسه کنید.

(پ) مقدار چشمداشتی عملگر $\hat{X}$ نسبت به حالت $\psi(x,t)$ را به دست آورید.

(یعنی، $\langle\psi(x,t)|\hat{X}|\psi(x,t)\rangle$ را پیدا کنید).

حل:

(آ)

چون $\phi_n(x)$ ویژه توابع انرژی با ویژه مقدارهای E_n هستند؛ پس:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle \hat{H} \rangle = \left|\frac{۵}{\sqrt{۵۰}}\right|^۲ E_۰ + \left|\frac{۴}{\sqrt{۵۰}}\right|^۲ E_۱ + \left|\frac{۳}{\sqrt{۵۰}}\right|^۲ E_۲ = \frac{۱}{۵۰}\left(۲۵ \times \frac{\hbar w}{۲} + ۱۶ \times \frac{۳}{۲}\hbar w + ۹ \times \frac{۵}{۲}\hbar w\right) = \frac{۵۹}{۵۰}\hbar w$$

(ب)

$\psi(x,t)$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\psi(x,t) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}\psi(x,۰) = \frac{۵}{\sqrt{۵۰}} e^{\frac{-iE_۰ t}{\hbar}} \phi_۰(x) + \frac{۴}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{E_۱ t}{\hbar}} \phi_۱(x) + \frac{۳}{\sqrt{۵۰}} e^{\frac{-iE_۲ t}{\hbar}} \phi_۲(x)$$

$$= \frac{۵}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۱}{۲}wt} \phi_۰(x) + \frac{۴}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۳}{۲}wt} \phi_۱(x) + \frac{۳}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۵}{۲}wt} \phi_۲(x)$$

پس:

$$\langle H \rangle_t = \left|\frac{۵}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۱}{۲}wt}\right|^۲ E_۰ + \left|\frac{۴}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۳}{۲}wt}\right|^۲ E_۱ + \left|\frac{۳}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۵}{۲}wt}\right|^۲ E_۲ = \langle H \rangle_۰ = \frac{۵۹}{۵۰}\hbar w$$

درواقع $\langle \hat{H} \rangle$ در طی زمان ثابت است.

(پ)

با توجه به اینکه:

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$$

پس:

$$\hat{X}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\left(a + \hat{a}^\dagger\right)|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\left(\sqrt{n}\,|n-۱\rangle + \sqrt{n+۱}\,|n+۱\rangle\right)$$

لذا:

$$\hat{X}\psi(x,t) = \frac{۵}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۱}{۲}wt} \hat{X}\phi_۰(x) + \frac{۴}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۳}{۲}wt} \hat{X}\phi_۱(x) + \frac{۳}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۵}{۲}wt} \hat{X}\phi_۲(x)$$

$$= \frac{\hbar}{۲mw}\left(\frac{۵}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۱}{۲}wt}\phi_۱(x) + \frac{۴}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۳}{۲}wt}\left(\phi_۰(x) + \sqrt{۲}\phi_۲(x)\right) + \frac{۳}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۵}{۲}wt}\left(\sqrt{۲}\phi_۱(x) + \sqrt{۳}\phi_۳(x)\right)\right)$$

$$= \frac{\hbar}{۲mw}\left(\frac{۴}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۳}{۲}wt}\phi_۰(x) + \left(\frac{۵}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۱}{۲}wt} + \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۵}{۲}wt}\right)\phi_۱(x) + \frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۳}{۲}wt}\phi_۲(x)\right.$$

$$\left. + \frac{۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۵۰}} e^{-i\frac{۵}{۲}wt}\phi_۳(x)\right)$$

حال با توجه به اینکه:

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{mn}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

داریم:

$$\langle\psi(x,y)|\hat{X}|\psi(x,t)\rangle=\frac{\hbar}{۲mw}\left|\frac{۵}{\sqrt{۵۰}}e^{i\frac{۱}{۲}wt}\times\frac{۴}{\sqrt{۵۰}}e^{-i\frac{۳}{۲}wt}+\frac{۴۰}{\sqrt{۵۰}}e^{i\frac{۳}{۲}wt}\times\left(\frac{۵}{\sqrt{۵۰}}e^{-i\frac{۱}{۲}wt}+\frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۵۰}}e^{-i\frac{۵}{۲}wt}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{۳}{\sqrt{۵۰}}e^{i\frac{۵}{۲}wt}\times\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۵۰}}e^{-i\frac{۳}{۲}wt}\right|=\frac{\hbar}{۲mw}\times\frac{۱}{۵۰}\left(۲۰e^{-iwt}+۲۰e^{iwt}+۱۲\sqrt{۲}e^{-iwt}\right.$$

$$\left.+۱۲\sqrt{۲}e^{iwt}\right)=\frac{\hbar}{۱۰۰mw}\left(۴۰\cos wt+۲۴\sqrt{۲}\cos wt\right)=\frac{۲}{۲۵}\left(۵+۳\sqrt{۲}\right)\cos wt$$

تمرین ۴-۱۰

$\langle n|\hat{X}^{۲}|m\rangle$ و $\langle m|\hat{X}^{۴}|n\rangle$ را در نمایش N محاسبه کنید. ($|n\rangle$ و $|m\rangle$ حالت‌های نوسانگر هماهنگ هستند).

حل:

با توجه به اینکه:

$$\hat{X}^{۲}=\frac{\hbar}{۲mw}\left(\hat{a}^{۲}+\hat{a}^{\dagger^{۲}}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)$$

$$=\frac{\hbar}{۲mw}\left(\hat{a}^{۲}+\hat{a}^{\dagger^{۲}}+۲\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+۱\right)$$

و

$$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle=\sqrt{n+۱}|n+۱\rangle$$

$$\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-۱\rangle$$

$$\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle=n|n\rangle$$

$$\hat{a}^{۲}|n\rangle=\sqrt{n(n-۱)}|n-۲\rangle$$

$$\hat{a}^{\dagger۲}|n\rangle=\sqrt{(n+۱)(n+۲)}|n\rangle$$

خواهیم داشت:

$$X^{۲}=\frac{\hbar}{۲mw}\begin{pmatrix}۱ & ۰ & \sqrt{۱\times۲} & ۰ & ۰ & ۰ & \\ ۰ & ۳ & ۰ & \sqrt{۲\times۳} & ۰ & ۰ & \\ \sqrt{۱\times۲} & ۰ & ۵ & ۰ & \sqrt{۳\times۴} & ۰ & \vdots \\ ۰ & \sqrt{۲\times۳} & ۰ & ۷ & ۰ & \sqrt{۴\times۵} & \\ & & & \cdots & & & \end{pmatrix}$$

برای به‌دست آوردن $X^{۴}$ می‌توان با ضرب کردن $X^{۲}$ در خودش ماتریس آن را به‌دست آورد.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۴-۱۱

هامیلتونی یک‌بعدی $\hat{H}=\frac{1}{2}\hat{P}^2+\frac{1}{2}\hat{X}^2$ را با $\hat{P}=-id/dx$ در نظر بگیرید.

(آ) نشان دهید که توابع موج $\psi_0(x)=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}$ و $\psi_1(x)=\sqrt{2/\sqrt{\pi}}xe^{-x^2/2}$ ویژ توابع $\hat{H}$ با ویژه مقدارهای $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ هستند.

(ب) مقدار ضریب‌های α و β را به‌گونه‌ای بیابید که

$$\psi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}\left(\alpha x^2-1\right)e^{-x^2/2} \quad \text{و} \quad \psi_3(x)=\frac{1}{\sqrt{6\sqrt{\pi}}}x\left(1+\beta x^2\right)e^{-x^2/2}$$

بر $\psi_0(x)$ عمود باشند. سپس نشان دهید که $\psi_2(x)$ و $\psi_3(x)$ به ترتیب، ویژه توابع $\hat{H}$ با ویژه مقادیر $\frac{5}{2}$ و $\frac{7}{2}$ هستند.

حل:

(آ)

برای تحقیق اینکه $\psi_0(x)$ و $\psi_1(x)$ ویژه توابع هامیلتونی هستند، اثر هامیلتونی را بر آنها بررسی می‌کنیم:

$$H\psi_0(x)=\left(\frac{1}{2}\hat{P}^2+\frac{1}{2}\hat{X}^2\right)\psi_0(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\right)\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\left(x^2e^{\frac{-x^2}{2}}-\frac{d}{dx}\left(-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\left(x^2e^{-\frac{x^2}{2}}+e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}e^{\frac{-x^2}{2}}\right)=\frac{1}{2}\psi_0(x)$$

$$H\psi_1(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}\left(x^3e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}\left(x^3e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}+2xe^{-\frac{x^2}{2}}-x^3e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}xe^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{3}{2}\psi_1(x)$$

پس $\psi_0(x)$ و $\psi_1(x)$ ویژه توابع $\hat{H}$ با ویژه مقادیر متناظر $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ هستند.

(ب)

طبق تعریف، دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را متعامد گوییم هرگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(x)g(x)dx=1$$

پس:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^*(x)\psi_0(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}\left(\alpha x^2 - 1\right)e^{-\frac{x^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} \times \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha x^2 - 1\right)e^{-x^2}dx$$

با توجه به اینکه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

و:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\alpha}{2} - 1 = 0$$

یا:

$$\alpha = 2$$

اما $\psi_2(x)$ و $\psi_0(x)$ به‌ازای تمام مقادیر β برهم عمودند زیرا $\psi_0(x)$ تابعی زوج و $\psi_2(x)$ تابعی فرد است. لذا در انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^*\psi_0(x)dx$، انتگرالده تابعی فرد و بازه انتگرال‌گیری نیز متقارن است پس حاصل آن همواره صفر است و به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $\psi_2(x)$ و $\psi_2(x)$ نیز بر $\psi_1(x)$ عمود هستند. حال هامیلتونی را بر $\psi_2(x)$ و $\psi_2(x)$ اثر می‌دهیم:

$$H\psi_2(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}\left(2x^2 - 1\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}\left[x^2\left(2x^2 - 1\right)e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{d}{dx}\left(4xe^{-\frac{x^2}{2}} - x\left(2x^2 - 1\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}\left[x^2\left(2x^2 - 1\right)e^{-\frac{x^2}{2}} - \left(5e^{-\frac{x^2}{2}} - 5x^2e^{-\frac{x^2}{2}} - 6x^2e^{-\frac{x^2}{2}} + 2x^4e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(10x^2 - 5\right) = \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(2x^2 - 1\right) = \frac{5}{2}\psi_2(x)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$H\psi_2(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{8\sqrt{\pi}}}\left[x^3\left(1+\beta x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{d}{dx}\left[\left(1+3\beta x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}-\left(x^2+\beta x^4\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\right.$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{8\sqrt{\pi}}}\left\{x^3\left(1+\beta x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}-\left[6\beta x e^{-\frac{x^2}{2}}-x\left(1+3\beta x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\right]-\left(2x+4\beta x^3\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\right.$$

$$\left.+x\left(x^2+\beta x^4\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{8\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^3+\beta x^5-6\beta x+x+3\beta x^3+2x+4\beta x^3-x^3-\beta x^5\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{8\sqrt{\pi}}}x\left[\left(3-6\beta\right)+7\beta x^2\right]$$

ملاحظه می‌شود که $\psi_2(x)$ ویژه حالت هامیلتونی نیست مگر اینکه:

$$\beta=-\frac{2}{3}$$

و دراین‌صورت $\psi_2(x)$ ویژه حالت هامیلتونی با ویژه مقدار $\frac{7}{2}$ خواهد بود.

تمرین ۴-۱۲

هامیلتونی یک‌بُعدی $\hat{H}=\frac{1}{2}\hat{P}^2+\frac{1}{2}\hat{X}^2$ را در نظر بگیرید (که در آن $\hat{P}=-id/dx$) که تابع موج آن در زمان $t=0$ عبارت است از

$$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(x)+\frac{1}{\sqrt{8}}\psi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{10}}\psi_2(x),$$

و در آن $\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}e^{-x^2/2}$ ، $\psi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}xe^{-x^2/2}$ و $\psi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}(2x^2-1)e^{-x^2/2}$.

(آ) $\Delta x_n\Delta p_n$ را برای $n=0,1$ محاسبه کنید، که درآن $\Delta x_n=\sqrt{\langle\psi_n|\hat{X}^2|\psi_n\rangle-\langle\psi_n|\hat{X}|\psi_n\rangle^2}$

(ب) $\hat{a}^\dagger\psi_1(x)$ ، $\hat{a}\psi_0(x)$ ، $\hat{a}^\dagger\psi_0(x)$ و $\hat{a}\psi_n(x)$ را محاسبه کنید که عملگرهای $\hat{a}^\dagger$ و $\hat{a}$ با $\hat{a}=(\hat{X}+d/dx)/\sqrt{2}$ و $\hat{a}^\dagger=(\hat{X}-d/dx)/\sqrt{2}$ تعریف می‌شوند.

حل:

(آ)

با توجه به‌اینکه $\psi_0(x)$ زوج و $\psi_1(x)$ فرد است لذا:

$$\left\langle\psi_0\middle|\hat{X}\middle|\psi_0\right\rangle=\left\langle\psi_1\middle|\hat{X}\middle|\psi_1\right\rangle=0$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle \psi_0 | \hat{P} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{P} | \psi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \psi_0 | \hat{X}^2 | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*(x) x^2 \psi_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\langle \psi_1 | \hat{X}^2 | \psi_1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^2(x) x^2 dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = \frac{3}{2}$$

$$\langle \psi_0 | \hat{P}^2 | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*(x) \left(\frac{-d^2}{dx^2} \right) \psi_0(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} \frac{d}{dx} \left(\frac{-1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[x e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\langle \psi_1 | \hat{P}^2 | \psi_1 \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \left[-x(1 - x^2) - 2x \right] e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 (x^2 - 3) e^{-x^2} dx = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi} - 3\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

پس:

$$\Delta x_0 \Delta p_0 = \sqrt{\langle \psi_0 | \hat{X}^2 | \psi_0 \rangle} \sqrt{\langle \psi_0 | \hat{P}^2 | \psi_0 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta x_1 \Delta p_1 = \sqrt{\langle \psi_1 | \hat{X}^2 | \psi_1 \rangle} \sqrt{\langle \psi_1 | \hat{P}^2 | \psi_1 \rangle} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

(ب)

$$\hat{a}^\dagger \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} - \frac{d}{dx} \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} x e^{-\frac{x^2}{2}} = \psi_1(x)$$

$$\hat{a} \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} + \frac{d}{dx} \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} = 0$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{a}^{\dagger}\psi_{1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}-\frac{d}{dx}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\,x\,e^{\frac{-x^{2}}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}\left[x^{2}e^{-\frac{x^{2}}{2}}-e^{-\frac{x^{2}}{2}}\left(1-x^{2}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}\left(2x^{2}-1\right)e^{-\frac{x^{2}}{2}}=\sqrt{2}\,\psi_{2}(x)$$

$$\hat{a}\psi_{1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}+\frac{d}{dx}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}xe^{-\frac{x^{2}}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\left[x^{2}e^{-\frac{x^{2}}{2}}+e^{-\frac{x^{2}}{2}}\left(1-x^{2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^{2}}{2}}=\psi_{0}(x)$$

$$\hat{a}\psi_{2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}+\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}\left(2x^{2}-1\right)e^{-\frac{x^{2}}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}$$

$$\times\left\{x\left(2x^{2}-1\right)e^{-\frac{x^{2}}{2}}+e^{-\frac{x^{2}}{2}}\left[4x-x\left(2x^{2}-1\right)\right]\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^{2}}{2}}\left(2x^{3}-x+5x-2x^{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}xe^{\frac{-x^{2}}{2}}=\sqrt{2}\psi_{1}(x)$$

تمرین ۴-۱۳

ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی با دیواره‌های $x=0$ و $x=a$ و در ابتدا (یعنی در $t=0$) در حالت $\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_{1}(x)+\phi_{2}(x)]$ است و در آن $\phi_{1}(x)$ و $\phi_{2}(x)$ به ترتیب حالت پایه و دومین حالت برانگیخته هستند.

(آ) بردار حالت $\psi(x,t)$ را برای $t>0$ در تصویر شرودینگر به‌دست آورید؟

(ب) مقدار چشمداشتی $\langle\hat{X}\rangle,\langle\hat{P}\rangle,\langle\hat{X}^{2}\rangle$ و $\langle\hat{p}^{2}\rangle$ را برحسب $|\psi\rangle$ بیابید.

(پ) $\Delta x\Delta p$ را برآورد کنید و ثابت کنید که در اصل عدم قطعیت صدق می‌کند.

حل:

$$|\psi(x,t)\rangle=e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi(x,0)\rangle$$

$$=e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi_{1}(x)+\Phi_{2}(x)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_{1}t}{\hbar}}\Phi_{0}(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_{2}t}{\hbar}}\Phi_{2}(x)$$

توجه کنیم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2},\ E_2=9\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

تمرین ۴-۱۴

حالت ذره‌ی در حال حرکت در یک نوسانگر هارمونیک یک بعدی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{17}}|0\rangle+\frac{3}{\sqrt{17}}|1\rangle-\frac{2}{\sqrt{17}}|2\rangle-\sqrt{\frac{3}{17}}|3\rangle$$

که $|n\rangle$ بیانگر nامین ویژه حالت بهنجار انرژی است. مقدار چشمداشتی عملگر تعداد، $\hat{N}$ و عملگر هامیلتونی را بیابید.

حل:

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{17}}|0\rangle+\frac{3}{\sqrt{17}}|1\rangle-\frac{2}{\sqrt{17}}|2\rangle-\frac{3}{\sqrt{17}}|3\rangle$$

$$\left\langle\psi\middle|\hat{N}\middle|\psi\right\rangle=\Sigma|C_n|^2 n$$

$$=\frac{1}{17}\times0+\frac{3}{17}\times1+\frac{4}{17}\times2+\frac{3}{17}\times3$$

$$=\frac{3}{17}+\frac{8}{17}+\frac{9}{17}=\frac{20}{17}$$

تمرین ۴-۱۵

تعداد حالت‌های مقید و انرژی‌های متناظر را برای چاه پتانسیل مربعی متناهی در حالتی که (آ) $R=7$ (یعنی، $\sqrt{ma^2V_0/(2\hbar^2)}=7$) و (ب) $R=3\pi$ باشد پیدا کنید.

حل:

(آ)

طبق نمودار ۴-۸ به‌ازای $R=7$، پنج حالت مقید وجود دارد که برای یافتن انرژی متناظر با هر حالت، داریم:

$$\alpha_0\tan\alpha_0=\sqrt{49-\alpha_0^2}$$

$$-\alpha_1\cot\alpha_1=\sqrt{49-\alpha_1^2}$$

$$\alpha_2\tan\alpha_2=\sqrt{49-\alpha_2^2}$$

$$-\alpha_3\cot\alpha_2=\sqrt{49-\alpha_3^2}$$

$$\alpha_4\tan\alpha_4=\sqrt{49-\alpha_4^2}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$E_n = \frac{۲\hbar^۲ \alpha_n^۲}{m a^۲}$ پس از یافتن مقادیر $\alpha_۰$، $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$ و $\alpha_۴$ از روابط فوق، با استفاده از رابطه‌ی

می‌توان مقادیر $E_۰$، $E_۱$، $E_۲$، $E_۳$ و $E_۴$ را یافت.

(ب)

به‌ازای $R = ۳\pi$، شش حالت مقید وجود دارد که انرژی متناظر با هر حالت به روشی که از قسمت (آ) به آن اشاره شد، محاسبه می‌شود.

تمرین ۴-۱۶

توپی به جرم $m = ۰/۲kg$ در حال افتادن روی میزی واقع بر $z = ۰$ تحت تأثیر پتانسیل

$$V(z) = \begin{cases} V_۰ & , \quad z < ۰ \\ mgz & , \quad z > ۰ \end{cases}$$

است که در آن، $V_۰ = ۳g$ و g شتاب ناشی از گرانش است.

(آ) طیف انرژی‌های ممکن را با افزایش E از مقدارهای منفی بزرگ تا مقدارهای مثبت بزرگ (یعنی: پیوسته، گسسته یا غیرموجود) توصیف کنید.

(ب) مرتبه بزرگی را برای پایین‌ترین تراز انرژی تخمین بزنید.

(پ) شکل‌های کلی توابع موج $\psi_۰(z)$ و $\psi_۱(z)$ متناظر با پایین‌ترین دو تراز انرژی را توصیف کنید و چگالی‌های احتمال متناظر آن‌ها را رسم کنید.

حل:

با توجه به معادله‌ی شرودینگر برای $z < ۰$ و $z > ۰$ داریم:

$$\frac{d^۲\psi(z)}{dz^۲} + \frac{۲m}{\hbar^۲}(E - V_۰) \quad ; \quad z \le ۰$$

$$\frac{d^۲\psi(z)}{dz^۲} + \frac{۲m}{\hbar^۲}(E - mgz) = ۰ \quad ; \quad z \ge ۰$$

با فرض $E < V_۰$ و با تعریف‌های:

$$k^۲ = \frac{۲m}{\hbar^۲}(V_۰ - E)$$

$$x = \left(\frac{\hbar^۲}{۲m^۲ g}\right)^{\frac{۲}{۳}} \frac{۲m}{\hbar^۲}(mgz - E)$$

خواهیم داشت:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - k^2\psi(z) = 0 \quad ; \quad z \le 0$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - x\psi(x) = 0 \quad ; \quad z \ge 0$$

در این‌صورت داریم:

$$\psi(z) = \alpha e^{kz} + \beta e^{-kz} \quad ; \quad z \le 0$$

$$\psi(z) = \gamma Ai\big(x(z)\big) + \delta Bi\big(x(z)\big) \quad ; \quad z \ge 0$$

در اینجا $Ai(x)$ و $Bi(x)$ توابع $Airy$ هستند. به‌دلیل اینکه وقتی $z \to -\infty$ تابع موج باید متناهی باشد لذا: $\beta = 0$. و چون $Bi(x)$ وقتی $x \to +\infty$ واگرا می‌شود لذا: $\delta = 0$ و داریم:

$$\psi(z) = \alpha e^{kz} \quad ; \quad z \le 0$$

$$\psi(z) = \gamma Ai(x) \quad ; \quad z \ge 0$$

برای یافتن α و γ از پیوستگی ψ و مشتق آن در $z = 0$ استفاده می‌کنیم. پس:

$$\alpha = \gamma Ai\left[-\left(\frac{2}{mg^2\hbar^2}\right)^{\frac{+1}{3}} E\right]$$

$$k\alpha = \gamma\left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{dAi(x)}{dx}\bigg|_{x=-\left(\frac{2}{mg^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}E}$$

از تقسیم این دو رابطه بر هم داریم:

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} = \frac{\left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{dAi(x)}{dx}\Big|_{x=-\left(\frac{2}{mg^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}E}}{Ai\left[-\left(\frac{2}{mg^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} E\right]}$$

این رابطه بیانگر آنست که E باید گسسته باشد.

برای $E > V_0$ با تعریف:

$$k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

خواهیم داشت:

$$\psi(z) = Ae^{ikz} + Be^{-ikz} \quad ; \quad z \le 0$$
$$\psi(z) = C\,Ai(x) \quad ; \quad z \ge 0$$

بنابراین با اعمال شرایط مرزی مناسب داریم:

$$A + B = C\,Ai\left[-\left(\frac{2}{mg^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} E\right]$$

$$ik(A - B) = C\left(\frac{2m^2 g}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{d\,Ai(x)}{dx}\bigg|_{x = -\left(\frac{2}{mg^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} E}$$

از این روابط نتیجه می‌گیریم که E می‌تواند پیوسته باشد.

تمرین ۴-۱۷

ذره‌ای به جرم m را که تحت تأثیر پتانسیل نوسانگر یک بعدی با $\hat{X} = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ و $\hat{P} = i\sqrt{m\hbar\omega/2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ در حال حرکت است در نظر بگیرید.

(آ) حاصل‌ضرب عدم قطعیت‌ها در مکان و اندازه‌حرکت را برای ذره‌ای در پنجمین حالت برانگیخته یعنی $(\Delta X \Delta P)_5$ محاسبه کنید.

(ب) نتیجه‌ی (آ) را با حاصل‌ضرب عدم قطعیت هنگامی که ذره در پایین‌ترین تراز انرژی خود است مقایسه کنید. توضیح دهید که چرا دو حاصل‌ضرب عدم قطعیت متفاوت هستند.

حل:

(آ)

با توجه به‌اینکه $\psi_5(x)$ تابعی فرد است، لذا $\langle X \rangle_5$ و $\langle P \rangle_5$ مقداری برابر صفر دارند. پس:

$$\Delta x_5 = \sqrt{\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle_5 - \left\langle \hat{X} \right\rangle_5^2} = \sqrt{\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle_5}$$

$$\Delta P_5 = \sqrt{\left\langle \hat{P}^2 \right\rangle_5 - \left\langle \hat{P} \right\rangle_5^2} = \sqrt{\left\langle \hat{P}^2 \right\rangle_5}$$

اما با توجه به رابطه‌ی $\left\langle n \middle| \hat{X}^2 \middle| n \right\rangle = \frac{\hbar^2}{2mw}(2n+1)$ داریم:

$$\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle_5 = \frac{\hbar}{2mw}(2 \times 5 + 1) = \frac{11\hbar}{2mw}$$

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

الف)

$$E_n = \langle n|\hat{H}|n\rangle = \left\langle n\left|\frac{\hat{P}^2}{2m}\right|n\right\rangle + \left\langle n\left|\frac{1}{2}mw^2\hat{X}^2\right|n\right\rangle$$

با:

$$\left\langle n\left|\hat{P}^2\right|n\right\rangle = 2mE_n - m^2w^2\left\langle n\left|\hat{X}^2\right|n\right\rangle = 2mhw\left(n+\frac{1}{2}\right) - m^2w^2\frac{\hbar}{2mw}(2n+1)$$

یا:

$$\left\langle n\left|\hat{P}^2\right|n\right\rangle = \frac{1}{2}mhw(2n+1)$$

لذا:

$$\left\langle \hat{P}^2\right\rangle_5 = \frac{11}{2}mhw$$

پس:

$$\Delta X_5\Delta P_5 = \sqrt{\frac{11\hbar^2}{2mw}\times\frac{11}{2}mhw} = \frac{11}{2}\hbar$$

به همین ترتیب:

ب)

$$\Delta X_0\Delta P_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}\times\frac{1}{2}mhw} = \frac{1}{2}\hbar$$

تمرین ۴-۱۸

ذره‌ای به جرم m در یک چاه پتانسیل نامتناهی به‌طول a دارای تابع موج اولیه زیر است:

$$\psi(x,0) = \frac{2}{\sqrt{7a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sqrt{\frac{6}{7a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{2}{\sqrt{7a}}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right).$$

آ) اگر انرژی را اندازه بگیریم، چه مقدارهایی و با چه احتمال‌هایی پیدا می‌کنیم؟ میانگین انرژی را محاسبه کنید.

ب) تابع موج $\psi(x,t)$ را در زمان t بیابید.

احتمال یافتن ذره در زمان t در حالت $\phi(x,t) = 1/\sqrt{a}\sin(3\pi x/a)\exp(-iE_3t/\hbar)$ را تعیین کنید.

پ) چگالی احتمال $\rho(x,t)$ و چگالی جریان $\vec{J}(x,t)$ را محاسبه کنید.

ثابت کنید که $\partial\rho/\partial t + \vec{\nabla}.\vec{J}(x,t) = 0$.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

(آ)

می‌دانیم که $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ ویژه تابع هامیلتونی با ویژه مقدار $E_n=\frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}$ برای ذره در جعبه است. پس:

$$\psi(x,۰)=\sqrt{\frac{۲}{۷}}\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\sqrt{\frac{۳}{۱۴}}\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{۲\pi x}{a}\right)+\sqrt{\frac{۲}{۷}}\frac{۲}{a}\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)$$
$$=\sqrt{\frac{۲}{۷}}\phi_۱(x)+\sqrt{\frac{۳}{۱۴}}\phi_۲(x)+\sqrt{\frac{۲}{۷}}\phi_۳(x)$$

ملاحظه می‌شود که $\psi(x,۰)$ بهنجار نیست. پس اگر آن را بهنجار کرده و با $\psi_N(x,۰)$ نمایش دهیم، داریم:

$$\psi_N(x,۰)=\sqrt{\frac{۱۴}{۱۱}}\psi(x,۰)=\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}\phi_۱(x)+\sqrt{\frac{۳}{۱۱}}\phi_۲(x)+\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}\phi_۳(x)$$

بنابراین در اندازه‌گیری انرژی، مقادیر $E_۱$، $E_۲$ و $E_۳$ با احتمال $\frac{۴}{۱۱}$، $\frac{۳}{۱۱}$ و $\frac{۴}{۱۱}$ به‌دست می‌آیند و:

$$\langle\hat{H}\rangle=\sum_n P_n(E_n)E_n=\frac{۴}{۱۱}E_۱+\frac{۳}{۱۱}E_۲+\frac{۴}{۱۱}E_۳=\frac{۱}{۱۱}\frac{\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}\left(۴+۳\times۲^۲+۴\times۳^۲\right)=\frac{۲۶}{۱۱}\frac{\pi^۲\hbar^۲}{ma^۲}$$

(ب)

$$\psi(x,t)=\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}e^{-i\frac{E_۱t}{\hbar}}\phi_۱(x)+\sqrt{\frac{۳}{۱۱}}e^{-i\frac{E_۲t}{\hbar}}\phi_۲(x)+\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}e^{-i\frac{E_۳t}{\hbar}}\phi_۳(x)$$

بنابراین احتمال پیدا کردن سیستم در حالت $\phi_۳(x)e^{-\frac{iE_۳t}{\hbar}}$ بدون اینکه در طی زمان تغییر کند همان $\frac{۴}{۱۱}$ است.

(پ)

طبق تعریف $\rho(x,t)=|\psi(x,t)|^۲$ و $\vec{J}=\frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(\psi^*\Delta\psi\right)$ می‌باشد. پس:

$$\rho(x,t)=\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}e^{i\frac{E_۱t}{\hbar}}f_۱(x)+\sqrt{\frac{۳}{۱۱}}e^{i\frac{E_۲t}{\hbar}}f_۲(x)+\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}e^{i\frac{E_۳t}{\hbar}}f_۳(x)\right)$$

$$P_۲=|C_۲|^۲$$
$$=\frac{۱}{۱۱}\left|۴\phi_۱^۲(x)+۲\sqrt{۳}e^{\frac{it}{\hbar}(E_۱-E_۲)}\phi_۱(x)\phi_۲(x)+۴e^{\frac{tit}{\hbar}(E_۱-E_۲)}\phi_۱(x)\phi_۳(x)\right|$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$+۳\phi_۲^۲(x)+۲\sqrt{۳}\,c^{-\frac{it}{\hbar}(E_۱-E_۲)}\phi_۱(x)\phi_۲(x)+۲\sqrt{۳}\,c^{\frac{it}{\hbar}(E_۲-E_۲)}\phi_۲(x)\phi_۲(x)$$

$$\left[+۴\phi_۲^۲(x)+۴c^{-\frac{it}{\hbar}(E_۱-E_۲)}\phi_۱(x)\phi_۲(x)+۲\sqrt{۳}\,c^{\frac{it}{\hbar}(E_۲-E_۲)}\phi_۲(x)\phi_۲(x)\right]$$

$$=\frac{۱}{۱۱}\left\{۴\phi_۱^۲(x)+۳\phi_۲^۲(x)+۴\phi_۲^۲(x)+۴\sqrt{۳}\phi_۱(x)\phi_۲(x)\cos\left[\frac{(E_۱-E_۲)t}{\hbar}\right]\right.$$

$$\left.+۸\phi_۱(x)\phi_۲(x)\cos\left[\frac{(E_۱-E_۲)t}{\hbar}\right]+۴\sqrt{۳}\,\phi_۲(x)\phi_۲(x)\cos\left[\frac{(E_۲-E_۲)t}{\hbar}\right]\right\}$$

$$J_x=\frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(\psi^*\frac{d\psi}{dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\psi(x,t)=\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}e^{-i\frac{E_۱t}{\hbar}}\frac{d\phi_۱(x)}{dx}+\sqrt{\frac{۳}{۱۱}}e^{-i\frac{E_۲t}{\hbar}}\frac{d\phi_۲(x)}{dx}+\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}e^{-\frac{iE_۲t}{\hbar}}\frac{d\phi_۲(x)}{dx}$$

$$\psi^*(x,t)=\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}e^{\frac{iE_۱t}{\hbar}}\phi_۱(x)+\sqrt{\frac{۳}{۱۱}}e^{\frac{iE_۲t}{\hbar}}\phi_۲(x)+\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}e^{\frac{iE_۲t}{\hbar}}\phi_۲(x)$$

$$J_x=\frac{\hbar}{m}\frac{۱}{۱۱}\left[۲\sqrt{۳}\sin\left[\frac{(E_۲-E_۱)t}{\hbar}\right]\phi_۲(x)\frac{d\phi_۱(x)}{dx}+۴\sin\left[\frac{(E_۲-E_۱)t}{\hbar}\right]\phi_۲(x)\frac{d\phi_۱(x)}{dx}\right.$$

$$+۲\sqrt{۳}\sin\left[\frac{(E_۱-E_۲)t}{\hbar}\right]\phi_۱(x)\frac{d\phi_۲(x)}{dx}+۲\sqrt{۳}\sin\left[\frac{(E_۲-E_۲)t}{\hbar}\right]\phi_۲(x)\frac{d\phi_۲(x)}{dx}$$

$$\left.+۴\sin\left[\frac{(E_۱-E_۲)t}{\hbar}\right]\phi_۱(x)\frac{d\phi_۲(x)}{dx}+۲\sqrt{۳}\sin\left[\frac{(E_۲-E_۲)t}{\hbar}\right]\phi_۲(x)\frac{d\phi_۲(x)}{dx}\right]$$

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=\frac{dJ_x}{dx}=\frac{۱}{۱۱}\frac{\hbar}{m}\left\{۲\sqrt{۳}\sin\left[\frac{(E_۲-E_۱)t}{\hbar}\right]\left(\frac{d\phi_۲}{dx}\frac{d\phi_۱}{dx}+\phi_۲\frac{d^۲\phi_۱}{dx^۲}-\frac{d\phi_۱}{dx}\frac{d\phi_۲}{dv}-\phi_۱\frac{d^۲\phi_۲}{dx^۲}\right)\right\}$$

$$+۴\sin\left[\frac{(E_۲-E_۱)t}{\hbar}\right]\left(\frac{d\phi_۲}{dx}\frac{d\phi_۱}{dx}+\phi_۲\frac{d^۲\phi_۱}{dx^۲}-\frac{d\phi_۱}{dx}\frac{d\phi_۲}{dx}-\phi_۱\frac{d^۲\phi_۲}{dx^۲}\right)$$

$$\left\{+۲\sqrt{۳}\sin\left[\frac{(E_۲-E_۲)t}{\hbar}\right]\left(\frac{d\phi_۲}{dx}\frac{d\phi_۲}{dx}+\phi_۲\frac{d^۲\phi_۲}{dx^۲}-\frac{d\phi_۲}{dx}\frac{d\phi_۲}{dx}-\phi_۲\frac{d^۲\phi_۲}{dx^۲}\right)\right\}$$

$$=\frac{۱}{۱۱}\frac{\hbar}{m}\left\{۲\sqrt{۳}\sin\left[\frac{(E_۲-E_۱)t}{\hbar}\right]\left(-\frac{\pi^۲}{a^۲}\phi_۲\phi_۱+\frac{۴\pi^۲}{a^۲}\phi_۱\phi_۲\right)\right\}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$+۴\sin\left[\frac{(E_۳-E_۱)t}{\hbar}\right]\left(-\frac{\pi^۲}{a^۲}\phi_۱\phi_۳+\frac{۹\pi^۲}{a^۲}\phi_۱\phi_۳\right)$$

$$\left\{+۲\sqrt{۳}\sin\left[\frac{(E_۳-E_۲)t}{\hbar}\right]\left(-\frac{۴\pi^۲}{a^۲}\phi_۲\phi_۳+\frac{۹\pi^۲}{a^۲}\phi_۲\phi_۳\right)\right\}$$

$$=\frac{۱}{۱۱}\frac{\hbar}{m}\frac{\pi^۲}{a^۲}\left\{۶\sqrt{۳}\sin\left[\frac{(E_۳-E_۱)t}{\hbar}\right]\phi_۱\phi_۲+۳۲\sin\left[\frac{(E_۳-E_۱)t}{\hbar}\right]\phi_۱\phi_۳\right\}$$

$$+۱۰\sqrt{۳}\sin\left[\frac{(E_۳-E_۲)t}{\hbar}\right]\phi_۲\phi_۳$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{۱}{۱۱}\left\{-۴\sqrt{۳}\times\frac{E_۲-E_۱}{\hbar}\sin\left[\frac{(E_۲-E_۱)t}{\hbar}\right]\phi_۱\phi_۲-۸\times\frac{E_۳-E_۱}{\hbar}\sin\left[\frac{(E_۳-E_۱)}{\hbar}\right]\phi_۱\phi_۳\right\}$$

$$\left\{-۴\sqrt{۳}\times\frac{E_۳-E_۲}{\hbar}\sin\left[\frac{(E_۳-E_۲)t}{\hbar}\right]\phi_۲\phi_۳\right\}=\frac{۱}{۱۱}\left\{-\frac{۴\sqrt{۳}}{\hbar}\frac{۳\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}\sin\left[\frac{(E_۲-E_۱)t}{\hbar}\right]\phi_۱\phi_۲\right.$$

$$\left.-۸\times\frac{۸\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}\sin\left[\frac{(E_۳-E_۱)t}{\hbar}\right]\phi_۱\phi_۳-۴\sqrt{۳}\times\frac{۵\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}\sin\left[\frac{(E_۳-E_۲)t}{\hbar}\right]\phi_۲\phi_۳\right\}$$

$$=-\vec{\nabla}.\vec{J}$$

پس:

$$\vec{\nabla}.\vec{J}+\frac{\partial p}{\partial t}=۰$$

تمرین ۴-۱۹

ذره‌ای را در یک چاه پتانسیل نامتناهی در نظر بگیرید که تابع موج آن با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\psi(x)=\begin{cases}Ax(a^۲-x^۲), & ۰<x<a,\\ ۰, & \text{هر جای دیگر}\end{cases}$$

و در آن A یک ثابت حقیقی است.

(آ) A را طوری بیابید که $\psi(x)$ بهنجار باشد.

(ب) عدم قطعیت‌های موقعیت و تکانه، (Δx و Δp) و حاصل‌ضرب $\Delta x\Delta p$ را محاسبه کنید.

(پ) احتمال یافتن $۵^۲\pi^۲\hbar^۲/(۲ma^۲)$ در اندازه‌گیری انرژی را محاسبه کنید.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

شرط بهنجارش آنست که احتمال یافتن ذره در تمام فضا برابر یک باشد؛ پس:

$$۱=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\psi(x)\right|^{۲}dx=A^{۲}\int_{۰}^{a}x^{۲}\left(a^{۲}-x^{۲}\right)^{۲}dx=A^{۲}\int_{۰}^{a}\left(a^{۴}x^{۲}-۲ax^{۴}+x^{۶}\right)dx$$

$$=A^{۲}\left(\frac{a^{۷}}{۳}-\frac{۲a^{۷}}{۵}+\frac{a^{۷}}{۷}\right)=A^{۲}a^{۷}\left(\frac{۳۵-۴۲+۱۵}{۱۰۵}\right)=\frac{۸}{۱۰۵}A^{۲}a^{۷}$$

درنتیجه:

$$A=\frac{۱}{۲a^{۳}}\sqrt{\frac{۱۰۵}{۲a}}$$

(ب)

می‌دانیم که ویژه توابع هامیلتونی ذره در جعبه‌ی $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ با ویژه مقادیر $E_n=\frac{n^{۲}\pi^{۲}\hbar^{۲}}{۲ma^{۲}}$ است. بنابراین $P_n(E_n)$ احتمال اینکه در اندازه‌گیری انرژی مقدار $\frac{n^{۲}\pi^{۲}\hbar^{۲}}{۲ma^{۲}}$ حاصل شود عبارتست از:

$$P_n(E_n)=\left|\langle\phi_n|\psi\rangle\right|^{۲}$$

اما:

$$\langle\phi_n|\psi\rangle=\int_{۰}^{a}dx\,\phi_n^{*}(x)\psi(x)=\int_{۰}^{a}dx\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)A\,x\left(a^{۲}-x^{۲}\right)$$

$$=A\sqrt{\frac{۲}{a}}\left[a^{۲}\int_{۰}^{a}x\sin\frac{n\pi x}{a}dx-\int_{۰}^{a}x^{۳}\sin\frac{n\pi x}{a}dx\right]$$

$$=A\sqrt{\frac{۲}{a}}\frac{-۶a^{۴}}{(n\pi)^{۳}}(-۱)^{n}$$

درنتیجه:

$$P_n(E_n)=A^{۲}\left(\frac{۲}{a}\right)\frac{۳۶\,a^{۸}}{(n\pi)^{۶}}=\frac{۱۰۵}{۸a^{۷}}\times\frac{۷۲a^{۷}}{(n\pi)^{۶}}=\frac{۹۴۵}{(n\pi)^{۶}}$$

(پ)

از رابطه‌ی $\Delta\hat{A}=\sqrt{\langle\hat{A}^{۲}\rangle-\langle\hat{A}\rangle^{۲}}$ استفاده می‌کنیم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle \hat{X} \rangle = \int_{\circ}^{a} A^{۲} x^{۲} \left(a^{۲} - x^{۲}\right)^{۲} x\, dx = A^{۲} \int_{\circ}^{a} \left(a^{۴} x^{۲} - ۲a^{۲} x^{۵} + x^{۷}\right) dx = A^{۲} \left(\frac{a^{۸}}{۴} - \frac{۲a^{۸}}{۶} + \frac{a^{۸}}{۸}\right) = \frac{A^{۲} a^{۸}}{۲۴}$$

$$\langle \hat{X}^{۲} \rangle = \int_{\circ}^{a} A^{۲} x^{۲} \left(a^{۲} - x^{۲}\right)^{۲} x^{۲} dx = A^{۲} \int_{\circ}^{a} \left(a^{۴} x^{۴} - ۲a^{۲} x^{۶} + \hat{x}\right) dx = A^{۲} \left(\frac{a^{۹}}{۵} - \frac{۲a^{۹}}{۷} + \frac{a^{۹}}{۹}\right) = \frac{۸A^{۲} a^{۹}}{۳۱۵}$$

$$\Delta x = \left[\frac{۸a^{۹}}{۳۱۵} \frac{۱۰۵}{۸a^{۷}} - \left(\frac{۱۰۵}{۸a^{۷}} \frac{a^{۸}}{۲۴}\right)^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}} = \frac{a}{۶۴} \sqrt{\frac{۴۲۱}{۳}}$$

$$\langle \hat{P} \rangle = \int_{\circ}^{a} \psi^{*}(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x) = \circ$$

$$\langle \hat{P}^{۲} \rangle = \int_{\circ}^{a} \psi^{*}(x) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\right)^{۲} \psi(x) = -\hbar^{۲} \int_{\circ}^{a} A^{۲} x \left(a^{۲} - x^{۲}\right) \frac{d}{dx} \left(a^{۲} - ۳x^{۲}\right) = ۶A^{۲} \hbar^{۲} \int_{\circ}^{a} x^{۲} \left(a^{۲} - x^{۲}\right)$$

$$= ۶A^{۲} \hbar^{۲} \left(\frac{a^{۵}}{۳} - \frac{a^{۵}}{۵}\right) = ۶\hbar^{۲} \left(\frac{۱۰۵}{۸a^{۷}}\right) \frac{۲a^{۵}}{۱۵} = \frac{۲۱}{۲} \frac{\hbar^{۲}}{a^{۲}}$$

$$\Delta P = \sqrt{\frac{۲۱}{۲}} \frac{\hbar}{a}$$

پس:

$$\Delta x \Delta P = \frac{a}{۶۴} \sqrt{\frac{۴۲۱}{۳}} \sqrt{\frac{۲۱}{۲}} \frac{\hbar}{a} = \frac{۱}{۶۴} \sqrt{\frac{۲۹۴۷}{۲}}$$

تمرین ۴-۲۰

عبارت نسبیتی برای انرژی یک ذره‌ی آزاد به‌صورت $E^{۲} = m_{\circ}^{۲} c^{۴} + p^{۲} c^{۲}$ است.

(آ) معادله‌ی شرودینگر متناظر را به‌وسیله‌ی کوانتیده کردن عبارت انرژی بنویسید (یعنی E و P را با عملگرهای متناظرشان جابجا کنید). این معادله را معادله‌ی کلاین ـ گوردون می‌نامند.

(ب) جواب‌های متناظر با یک ذره‌ی آزاد در حال حرکت در راستای محور x را پیدا کنید.

حل:

(آ)

معادله‌ی شرودینگر در حالت کلی به‌صورت زیر است:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = H \psi(\vec{x}, t)$$

اما در اینجا:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$H=\sqrt{m_{\circ}^{۲}c^{۴}+\hat{P}^{۲}c^{۲}}+V\left(\hat{X}\right)=\sqrt{m_{\circ}^{۲}c^{۴}+\left(\frac{\hbar}{i}\vec{v}\right)^{۲}c^{۲}}+V\left(\hat{X}\right)=\sqrt{m_{\circ}^{۲}c^{۴}-\hbar^{۲}c^{۲}v^{۲}}+V\left(\hat{X}\right)$$

پس:

$$i\hbar\frac{\partial\psi\left(\vec{x},t\right)}{\partial t}=\left(\sqrt{m^{۲}c^{۴}-\hbar^{۲}c^{۲}v^{۲}}+V\left(\hat{X}\right)\right)\psi\left(\vec{x},t\right)$$

(ب)

معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان برای ذره‌ی آزاد $\left(V\left(\hat{X}\right)=\circ\right)$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$i\hbar\frac{\partial\psi\left(\vec{x},t\right)}{\partial t}=\left(\sqrt{m_{\circ}^{۲}c^{۴}-\hbar^{۲}c^{۲}v^{۲}}\right)\psi\left(\vec{x},t\right)$$

به‌روش جداسازی متغیرها و با انتخاب:

$$\psi\left(\vec{x},t\right)=\psi\left(\vec{x},\circ\right)T\left(t\right)$$

داریم:

$$i\hbar\,\psi\left(\vec{x},\circ\right)\frac{dT\left(t\right)}{dt}=T\left(t\right)\left(\sqrt{m_{\circ}^{۲}c^{۴}-\hbar^{۲}c^{۲}v^{۲}}\right)\psi\left(\vec{x},\circ\right)$$

با تقسیم طرفین این رابطه بر $T\left(t\right)\psi\left(\vec{x},\circ\right)$ داریم:

$$E=i\hbar\frac{۱}{T\left(t\right)}\frac{dT\left(t\right)}{dt}=\frac{\left(\sqrt{m_{\circ}^{۲}c^{۴}-\hbar^{۲}c^{۲}v^{۲}}\right)\psi\left(\vec{x},\circ\right)}{\psi\left(\vec{x},\circ\right)}$$

پس

$$T\left(t\right)=e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

$$\left(m_{\circ}^{۲}c^{۴}-\hbar^{۲}c^{۲}v^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}\psi\left(\vec{x},\circ\right)=E\psi\left(\vec{x},\circ\right)$$

معادله‌ی اخیر را می‌توان به‌شکل زیر نیز نوشت:

$$\left(m_{\circ}^{۲}c^{۴}-\hbar^{۲}c^{۲}v^{۲}\right)\psi\left(\vec{x},\circ\right)=E^{۲}\psi\left(\vec{x},\circ\right)$$

در یک بعد داریم:

$$\left(m_{\circ}^{۲}c^{۴}-\hbar^{۲}c^{۲}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}\right)\psi\left(x,\circ\right)=E^{۲}\psi\left(x,\circ\right)$$

یا:

$$\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}\psi\left(x,\circ\right)+\frac{E^{۲}-m_{\circ}^{۲}c^{۴}}{\hbar^{۲}c^{۲}}\psi\left(x,\circ\right)=\circ$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

با تعریف $k^۲ = \frac{E^۲ - m_۰^۲c^۴}{\hbar^۲c^۲}$ داریم:

$$\psi(x,۰) = A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx}$$

و در نتیجه:

$$\psi(x,t) = A_+ e^{i\left(kx - \frac{Et}{\hbar}\right)} + A_- e^{-i\left(kx + \frac{Et}{\hbar}\right)}$$

تمرین ۴-۲۱

(آ) انرژی E_c (گرانشی) کلاسیک ذره‌ی ساکن به جرم m را در ارتفاع $h_۰$ بالای سطح زمین به دست آورید. (انرژی پتانسیل را در سطح زمین صفر بگیرید).

(ب)اصل عدم قطعیت را برای تخمین انرژی حالت پایه‌ی $E_۰$ ذره‌ی معرفی شده در (آ) به‌کار ببرید. توجه کنید که ذره تحت گرانش است. $E_۰$ و E_c را مقایسه کنید.

(پ) اگر $h_۰ = ۳m$ مقدارهای عددی E_c و تصحیح کوانتوم مکانیکی $(E_۰ - E_c)$ را برای یک نوترون و سپس برای ذره‌ای به جرم $m = ۰/۰۱\,\mathrm{kg}$ به‌دست آورید. در مورد اهمیت تصحیح کوانتومی در هر دو حالت اظهارنظر کنید.

حل:

(آ)

از نظر کلاسیکی انرژی این ذره‌ی ثابت برابر $mgh_۰$ است.

(ب)

در اینجا عدم قطعیت در مکان ذره از مرتبه‌ی $h_۰$ است، یعنی:

$$\Delta x = h_۰$$

پس عدم قطعیتِ حداقلِ تکانه‌ی ذره $\frac{\hbar}{۲\Delta x} \simeq \frac{\hbar}{۲h_۰}$ است. لذا انرژی کل به‌عنوان تابعی از $h_۰$ عبارتست از:

$$E(h_۰) = \frac{۱}{۲m}\left(\frac{\hbar}{۲h_۰}\right)^۲ + mgh_۰$$

فرض می‌کنیم که E در $h_۰ = h_۰'$ کمترین مقدار خود را دارد؛ پس:

$$۰ = E'(h_۰') = \left.\frac{dE}{dh_۰}\right|_{h_۰ = h_۰'} = \frac{۱}{۲m}\frac{\hbar^۲}{۴}\frac{-۲}{\hbar_۰'^۳} + mg$$

در نتیجه:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$h'^{۲}_{\cdot}=\frac{\hbar^{۲}}{۴m^{۲}g}$$

$$E_{\min}=E\left(h'_{\cdot}\right)=\frac{۱}{۲m}\frac{\hbar^{۲}}{۴}\frac{۱}{\hbar'^{۲}_{\cdot}}+mgh'_{\cdot}=\frac{\hbar^{۲}+۸m^{۲}gh'^{۲}_{\cdot}}{۸mh'^{۲}_{\cdot}}=\frac{\hbar^{۲}+۲\hbar^{۲}}{۸m\left(\frac{\hbar^{۲}}{۴m^{۲}g}\right)^{\frac{۲}{۳}}}=\frac{۳\hbar^{۲}}{۸m}\left(\frac{۴m^{۲}g}{\hbar^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$=\frac{۳}{۸}\left(\frac{\hbar^{۲}}{m^{\frac{۲}{۳}}}\frac{۴m^{۲}g}{\hbar^{۲}}\right)^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۸}\left(۴\hbar m^{\frac{۱}{۲}}g\right)^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۸}m^{\frac{۱}{۳}}\left(۴\hbar g\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

(پ)

اگر m_n جرم نوترون و m جرم ذره ۰/۰۱ کیلوگرمی باشد، داریم:

$$m_n gh_{\cdot}=۱/۹۷۵\times۱۰\times۳=۵/۰۲\times۱۰^{-۲۶}$$

$$E_{\cdot neu}=\frac{۳}{۸}\left(۱/۶۷۵\times۱۰^{-۲۷}\right)^{\frac{۱}{۳}}\left(۴\times۱/۰۵۵\times۱۰^{-۳۴}\times۱۰\right)^{\frac{۲}{۳}}=۱/۱۶۳\times۱۰^{-۳۱}$$

پس $E_{\cdot}$ و E_e مربوط به نوترون تقریباً هم‌مرتبه هستند.

$$mgh_{\cdot}=۰/۰۱\times۱۰\times۳=۰/۳$$

$$E_{\cdot}=\frac{۳}{۸}\left(۰/۰۱\right)^{\frac{۱}{۳}}\left(۴\times۱/۰۵۵\times۱۰^{-۳۴}\times۱۰\right)^{\frac{۲}{۳}}=۲/۰۶\times۱۰^{-۲۳}$$

لذا $E_{\cdot}$ در مقایسه با E_e برای یک ذره‌ی کلاسیکی بسیار ناچیز است. بنابراین در مقیاس میکروسکوپی لحاظ کردن اثرات کوانتومی حایز اهمیت است.

تمرین ۴-۲۲

ترازهای انرژی و تابع موج‌های یک سیستم دو ذره‌ای به جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ را که برهم کنش آنها با پتانسیل چاه مربعی نامتناهی زیر توصیف می‌شود، پیدا کنید:

$$V(x_i)=\begin{cases}۰ & ۰\le x_i\le a,\\ +\infty & \text{هر جای دیگر}\end{cases}$$

x_i موقعیت i اُمین ذره است (یعنی x_i، بیانگر $x_۱$ یا $x_۲$ است).

حل:

در اینجا هامیلتونی به‌صورت زیر است:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}_1^2}{2m_1}+\frac{\hat{P}_2^2}{2m_2}+V\left(\hat{X}_1,\hat{X}_2\right)$$

همان‌طور که در متن کتاب توضیح داده شده است، با تعاریف زیر:

$$P=P_1+P_2\ ,\quad X=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{M}$$

$$p=\frac{m_2P_1-m_1P_2}{M}\ ,\quad x=x_1-x_2$$

$$M=m_1+m_2\ ,\quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

خواهیم داشت:

$$\hat{H}=\frac{p^2}{2M}+\frac{P^2}{2\mu}+V\left(x\right)$$

به طوری‌که:

$$V\left(x\right)=\begin{cases}0 & ;\quad 0\le x\le a\\ +\infty & ;\quad \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

لذا ویژه توابع هامیلتونی عبارتند از:

$$\psi\left(x_1,x_2\right)=\psi\left(X,x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{\pm ikx}$$

که در آن k عددی حقیقی با طیفی پیوسته و n عدد صحیح مثبت است و انرژی برابر است با:

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2M}+\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

هامیلتونی سیستم به‌صورت زیر است:

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}_1^2}{2m_1}+\frac{\hat{P}_2^2}{2m_2}+V\left(\hat{x}_1\right)+V\left(\hat{x}_2\right)=\frac{P_1^2}{2m_1}+V\left(x_1\right)+\frac{P_2^2}{2m_2}+V\left(x_2\right)=H_1+H_2$$

به‌طور کلی هرگاه بتوان هامیلتونی را به‌شکل $\hat{H}=\sum_i H_i$ نوشت در این صورت انرژی سیستم E و ویژه توابع $\psi\left(x_1,x_2,\ldots x_1^{\cdot},\ldots\right)$ آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$E=\sum_i E_i$$

$$\psi\left(x_1,x_2,\ldots x_1^{\cdot},\ldots\right)=\psi_1\left(x_1\right)\psi_2\left(x_2\right)\ldots\psi_i\left(x_1^{\cdot}\right)\ldots$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

که در آن E_i انرژی مربوط به ذره‌ی iاُم و $\psi_i(x_i)$ ویژه تابع هامیلتومی مربوط به ذره‌ی iاُم است.

پس در اینجا:

$$\psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{a}\right)\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{a}\right)$$

$$E_{n_1,n_2}=E_{n_1}+E_{n_2}=\frac{n_1^2\pi^2\hbar^2}{2m_1a^2}+\frac{n_2^2\pi^2\hbar^2}{2m_2a^2}$$

که در این روابط n_1 و n_2 اعداد صحیح مثبت هستند.

تمرین ۴-۲۳

ذره‌ای به جرم m تحت پتانسیل دافع دلتا $V(x)=V_0\delta(x)$ است که در آن $V_0>0$ (V_0 دارای بعد انرژی × فاصله است). ضرایب بازتاب و عبور، R و T را بیابید.

حل:

معادله‌ی شرودینگر بیانگر آنست که معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر ویژه تابع انرژی $\psi(x)$ به صورت زیر است:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\big(E-V_0\delta(x)\big)\psi(x)=0$$

با فرض $x\neq 0$ داریم:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0$$

با تعریف $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$ داریم:

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{ikx}+Be^{-ikx} & ;\ x\le 0\\ Ce^{ikx} & ;x\ge 0\end{cases}$$

از پیوستگی $\psi(x)$ در $x=0$ داریم:

$$A+B=C$$

از گسستگی مشتق $\psi(x)$ در $x=0$ داریم:

$$\int_{x=0^-}^{x=0^+}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)dx-\frac{2mE}{\hbar^2}\int_{x=0^-}^{x=0^+}dx-\frac{2mV_0}{\hbar^2}\int_{x=0^-}^{x=0^+}\delta(x)\psi(x)dx=0$$

یا

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left[\frac{d\psi}{dx}\right]_{x=0^-}^{x=0^+} + 0 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0) = 0$$

$$ikC - ik(A-B) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}C$$

در نتیجه:

$$ik(A+B) - ik(A-B) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}(A+B)$$

از حل این معادله نتیجه می‌شود:

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{\frac{ik\hbar^2}{mV_0^2} - 1}$$

در نتیجه:

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{1}{\frac{k^2\hbar^2}{m^2V_0^4} + 1} = \frac{m^2V_0^4}{k^2\hbar^2 + m^2V_0^4}$$

$$T = 1 - R = \frac{k^2\hbar^2}{k^2\hbar^2 + m^2V_0^4}$$

Quark

تمرین ۴-۲۴

ذره‌ای به جرم m به‌وسیله‌ی پتانسیل دلتای دوگانه $V(x) = V_0\delta(x-a) + V_0\delta(x+a)$ که در آن، $V_0 > 0$ است پراکنده می‌شود.

(آ) ضریب عبور را برای ذره در انرژی $E > 0$ پیدا کنید.

(ب) هنگامی که V_0 خیلی بزرگ باشد (یعنی، $V_0 \to \infty$)، انرژی‌های متناظر با حالت تشدید (یعنی $T = 1$) را پیدا کنید و آن‌ها را با انرژی‌های یک چاه پتانسیل مربعی نامتناهی به پهنای $2a$ مقایسه کنید.

حل:

(آ)

با توجه به معادله‌ی شرودینگر، ویژه تابع هامیلتونی در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V_0\delta(x-a) - V_0\delta(x+a)\right)\psi(x) = 0$$

به‌جز در $x = \pm a$ داریم:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0$$

با تعریف $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$ داریم:

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{ikx}+Be^{-ikx} & ; \quad x\le -a\\ Ce^{ikx}+De^{-ikx} & ; \quad -a\le x\le +a\\ Ee^{ikx} & ; \quad x\ge a\end{cases}$$

حال شرط مرزی پیوستگی تابع موج در $x=\pm a$ را اعمال می‌کنیم:

$$Ae^{-ika}+Be^{ika}=Ce^{-ika}+De^{ika} \qquad *$$

$$Ce^{ika}+De^{-ika}=Ee^{ika}$$

از گسستگی تابع موج در $x=\pm a$ داریم:

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=-a+\varepsilon}-\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=-a-\varepsilon}=\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(-a)$$

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=a+\varepsilon}-\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=a-\varepsilon}=\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(+a)$$

یا به‌طور معادل:

$$ik\left(Ce^{-ika}-De^{ika}\right)-ik\left(Ae^{-ika}-Be^{ika}\right)=\frac{2mV_0}{\hbar^2}\left(Ae^{-ika}+Be^{ika}\right) \qquad **$$

$$ikEe^{ika}-ik\left(Ce^{ika}-De^{-ika}\right)=\frac{2mV_0}{\hbar^2}Ee^{ika}$$

معادله‌ی اخیر را بازنویسی می‌کنیم:

$$ik\left(Ce^{ika}-De^{-ika}\right)=Ee^{ika}\left(ik-\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)$$

از طرفی داریم:

$$ik\left[Ce^{ika}+De^{-ika}\right]=ikEe^{ika}$$

از جمع و تفریق دو رابطه‌ی اخیر داریم:

$$C=\left(1+\frac{imV_0}{k\hbar^2}\right)E \qquad , D=\frac{-imV_0}{k\hbar^2}e^{2ika}E$$

این روابط را در رابطه‌ی $**$ جایگزین می‌کنیم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$Ee^{-ika}+\frac{imV_0}{k\hbar^2}Ee^{-ika}+\frac{imV_0}{k\hbar^2}e^{2ika}E-Ae^{-ika}+Be^{ika}=\frac{-2imV_0}{k\hbar^2}Ae^{-ika}-\frac{2imV_0}{k\hbar^2}Be^{ika}$$

یا:

$$Be^{ika}\left(1+\frac{2imV_0}{k\hbar^2}\right)=Ae^{-ika}\left(1-\frac{2imV_0}{k\hbar^2}\right)-E\left(e^{-ika}+\frac{imV_0}{k\hbar^2}e^{-ika}+\frac{imV_0}{k\hbar^2}e^{2ika}\right)$$

مقدار B را از رابطه‌ی اخیر یافته و در رابطه‌ی * جایگزین می‌کنیم:

$$Ae^{-ika}+Ae^{-ika}\frac{1-\frac{2imV_0}{k\hbar^2}}{1+\frac{2imV_0}{k\hbar^2}}-E\frac{e^{-ika}+\frac{imV_0}{k\hbar^2}e^{-ika}+\frac{imV_0}{k\hbar^2}e^{2ika}}{1+\frac{2imV_0}{k\hbar^2}}=$$

$$\left(1+\frac{imV_0}{k\hbar^2}\right)Ee^{-ika}-\frac{imV_0}{k\hbar^2}e^{2ika}E$$

در نتیجه:

$$\frac{E}{A}=\frac{1}{1-\left(\frac{mV_0}{k\hbar^2}\right)^2+\left(\frac{mV_0}{k\hbar^2}\right)^2\cos(4ka)+i\frac{mV_0}{k\hbar^2}\left(2+\frac{mV_0}{k\hbar^2}\sin(4ka)\right)}$$

$$T=\left|\frac{E}{A}\right|^2=\frac{1}{1+4\left(\frac{mV_0}{k\hbar^2}\right)^2\left[\frac{mV_0}{k\hbar^2}\sin(2ka)+\cos(2ka)\right]}$$

تمرین ۴-۲۵

ذره‌ای به جرم m را درنظر بگیرید که تحت پتانسیل دلتای پاد متقارن

$$V(x)=V_0\delta(x+a)-V_0\delta(x-a)$$

قرار دارد $(V_0>0)$.

(آ) نشان دهید که همواره یک و فقط یک حالت مقید وجود دارد و عبارت مربوط به انرژی را بیابید.

(ب) ضریب عبور T را پیدا کنید.

حل:

(آ)

از معادله‌ی شرودینگر داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\Big(E-V_0\delta(x+a)+V_0\delta(x-a)\Big)\psi(x)=0$$

به‌جز در $x=\pm a$ داریم:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-\frac{2m}{\hbar^2}|E|\psi(x)=0$$

چون به دنبال حالات مقید هستیم، انرژی E را منفی در نظر گرفته‌ایم. با تعریف $k^2=\frac{2m|E|}{\hbar^2}$ داریم:

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{kx} & ;\quad x\le -a\\ Be^{kx}+Ce^{-kx} & ;\quad -a\le x\le a\\ De^{-kx} & ;\quad x\ge a\end{cases}$$

از پیوستگی تابع موج در $x=\pm a$ داریم:

$$ae^{-ka}=Be^{-ka}+Ce^{ka} \qquad *$$

$$Be^{ka}+Ce^{-ka}=De^{-ka}$$

با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل شرودینگر، گسستگی $\frac{d\psi(x)}{dx}$ در $x=\pm a$ نتیجه می‌دهد که:

$$\psi'(-a+\varepsilon)-\psi'(-a-\varepsilon)=\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(-a)$$

$$\psi'(a+\varepsilon)-\psi'(a-\varepsilon)=-\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(a)$$

یا:

$$k\left(Be^{-ka}-Ce^{ka}\right)-kAe^{-ka}=\frac{2mV_0}{\hbar^2}Ae^{-ka} \qquad **$$

$$-kDe^{-ka}-k\left(Be^{ka}-Ce^{-ka}\right)=\frac{-2mV_0}{\hbar^2}De-ka$$

از معادله‌ی اخیر نتیجه می‌شود که:

$$k\left(be^{ka}-Ce^{-ka}\right)=De^{-ka}\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}-k\right)$$

از طرفی:

$$k\left(Be^{ka}+Ce^{-ka}\right)=kDe^{-ka}$$

از جمع و تفریق دو رابطه‌ی اخیر داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$B=\frac{mV_0}{k\hbar^2}e^{-2ka}D \quad , \quad C=\left(1-\frac{mV_0}{k\hbar^2}\right)D$$

این روابط را در رابطه‌ی ** جایگزین می‌کنیم:

$$Ae^{-ka}\left(1+\frac{2mV_0}{k\hbar^2}\right)=\left[\frac{mV_0}{k\hbar^2}e^{-2ka}-\left(1-\frac{mV_0}{k\hbar^2}\right)e^{ka}\right]D$$

با توجه به رابطه‌ی * داریم:

$$\frac{\frac{mV_0}{k\hbar^2}e^{-2ka}-\left(1-\frac{mV_0}{k\hbar^2}\right)e^{ka}}{1+\frac{2mV_0}{k\hbar^2}}D=\frac{mVv_0}{k\hbar^2}e^{-2ka}D+\left(1-\frac{mV_0}{k\hbar^2}\right)e^{ka}D$$

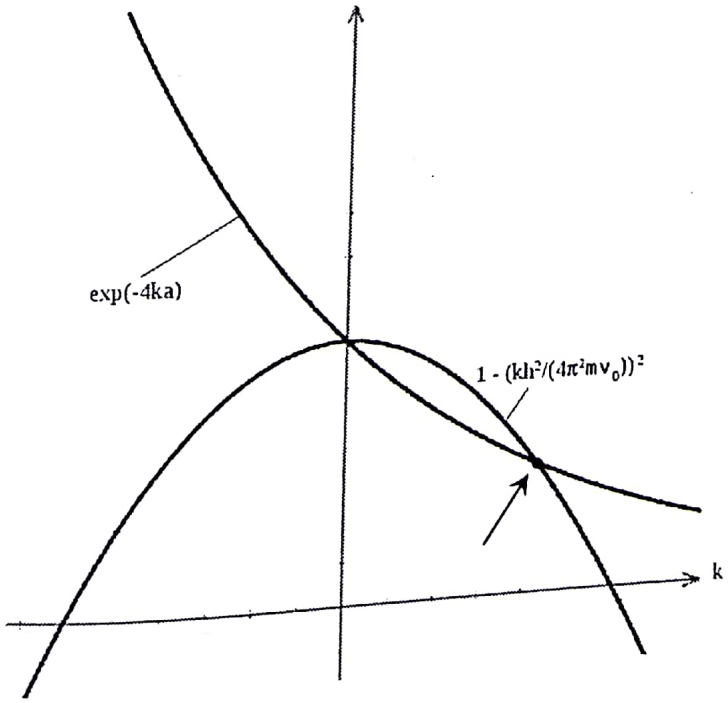
یا:

$$\frac{mv_0}{k\hbar^2}Ve^{-2ka}-e^{ka}+\frac{mV_0}{k\hbar^2}e^{ka}=\frac{mV_0}{k\hbar^2}e^{-2ka}+2\left(\frac{mV_0}{k\hbar^2}\right)^2e^{-2ka}+e^{ka}-\frac{mV_0}{k\hbar^2}e^{ka}$$
$$+\frac{2mV_0}{k\hbar^2}e^{ka}-2\left(\frac{mV_0}{k\hbar^2}\right)^2e^{ka}$$

از ساده سازی این معادله نتیجه می‌شود که:

$$1-\left(\frac{k\hbar^2}{mV_0}\right)^2=e^{-4ka}$$

از حل این معادله به روش عددی و یا رسم نمودار، فقط یک مقدار برای k به‌دست می‌آید و طبق رابطه‌ی $E=-\frac{k^2\hbar^2}{2m}$ تنها یک مقدار برای E حاصل می‌شود.



Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۴-۲۶

ذره‌ای به جرم m در معرض پتانسیل دلتای

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x\le 0\\ V_0\delta(x-a) & x>0\end{cases}$$

قرار دارد که در آن $V_0>0$.

(آ) توابع موج متناظر با حالت‌های $a>x>0$ و $x>a$ را بیابید.

(ب) ضریب عبور را پیدا کنید.

حل:

چون برای $x\le 0$ پتانسیل نامتناهی است لذا تابع موج برای این ناحیه صفر است. برای ناحیه $x\ge 0$ تابع موج $\psi(x)$ در معادله‌ی زیر (که از معادله‌ی شرودینگر استخراج می‌شود) صدق می‌کند:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\big(E-V_0\delta(x-a)\big)\psi(x)=0$$

به‌جز در ناحیه‌ی $x\neq a$ داریم:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0$$

با فرض مثبت بودن E و با تعریف $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$؛ داریم:

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & ;\quad x\le 0\\ C\sin kx & ;\quad 0\le x\le a\\ Ae^{-ikx}+Be^{ikx} & ;\quad x\ge a\end{cases}$$

در اینجا فرض کرده‌ایم که ذره از سمت راست بر پتانسیل فرود می‌آید و در ضمن، شرط صفر بودن $\psi(x)$ در $x=0$ را نیز لحاظ کرده‌ایم.

حال شرط مرزی پیوستگی $\psi(x)$ در $x=a$ را اعمال می‌کنیم:

$$C\sin ka=Ae^{-ika}+Be^{ika}$$

از گسستگی مشتق تابع موج در $x=a$ داریم:

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=a^+}-\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=a^-}=\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(a)$$

یا:

$$ik\left(-Ae^{-ika}+Be^{ika}\right)-KC\cos ka=\frac{2mV_0}{\hbar^2}\left(Ae^{-ika}+Be^{ika}\right)=\frac{2mV_0}{\hbar^2}C\sin ka$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

با استفاده از رابطه‌ی $B e^{ika} = C \sin ka - A e^{-ika}$ ؛ داریم:

$$ik\left(-A e^{-ika} + C \sin ka - A e^{-ika}\right) - K C \cos ka = \frac{۲mV_۰}{\hbar^۲} C \sin ka$$

یا:

$$-۲iA e^{-ika} = C\left(e^{-ika} + \frac{۲mV_۰}{k\hbar^۲} \sin ka\right)$$

یا:

$$\frac{C}{A} = \frac{-۲i}{۱ + \frac{۲mV_۰}{k\hbar^۲} e^{ika} \sin ka}$$

با توجه به‌اینکه:

$$\psi(x) = C \sin kx = \frac{C}{۲i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \; ; \; ۰ \le x \le a$$

پس ضریب عبور T عبارتست از:

$$T = \frac{\frac{\hbar k}{m}\frac{|C|^۲}{۴}}{\frac{\hbar k}{m}|A|^۲} = \frac{۱}{۴}\frac{|C|^۲}{|A|^۲}$$

پس:

$$T = \frac{۱}{۴}\frac{۴}{\left(۱ + \frac{۲mV_۰}{k\hbar^۲} e^{ika} \sin ka\right)\left(۱ + \frac{۲mV_۰}{k\hbar^۲} e^{-ika} \sin ka\right)} = \frac{۱}{۱ + ۴\left(\frac{mV_۰}{k\hbar^۲}\right)^۲ \sin^۲(ka) + \frac{۲mV_۰}{k\hbar^۲} \sin(۲ka)}$$

تمرین ۴-۲۷

ذره‌ای به جرم m علاوه‌بر این که به حرکت در یک چاه پتانسیل مربعی نامتناهی به اندازه‌ی $۲a$ با دیوارهایی در $x = -a$ و $x = a$ محدود شده، در معرض یک پتانسیل دلتای جاذب به‌صورت زیر قرار گرفته است:

$$V(x) = \begin{cases} V_۰\delta(x) & -a < x < a \\ \infty & \text{هر جای دیگر} \end{cases}$$

که $V_۰ > ۰$ است.

(آ) تابع موج ذره متناظر با جواب زوج را وقتی $E > ۰$ است بیابید.

(ب) ترازهای انرژی متناظر با جواب زوج را بیابید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

(آ) در ناحیه‌ی $|x| \geq a$ واضح است که به‌دلیل نامتناهی بودن پتانسیل، $\psi(x)$ باید صفر باشد. در ناحیه‌ی $-a \leq x \leq a$ داریم:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\big(E - V_0\delta(x)\big)\psi(x) = 0$$

با فرض $x \neq 0$ داریم:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0$$

که در رابطه‌ی فوق $K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ می‌باشد. شرط صفر بودن $\psi(x)$ در $x = \pm a$ ایجاب می‌کند که:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & ; \ |x| \geq a \\ A\sin k(x+a) & ; \ -a \leq x \leq 0 \\ B\sin k(x-a) & ; \ 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

چون به‌دنبال جواب‌های زوج هستیم پس: $B = -A$.

از گسستگی مشتق تابع موج در $x = 0$ داریم:

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0^+} - \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0^-} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0)$$

$$Ak\cos ka - Ak\cos ka = \frac{2mV_0}{\hbar^2}A\sin ka$$

یا:

$$\tan ka = -\frac{k\hbar^2}{mV_0}$$

رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ای است که از حل آن، انرژی به‌دست می‌آید. در ضمن A را نیز می‌توان از شرط بهنجارش یافت:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,dx = \int_{-a}^{0}A^2\sin^2 k(x+a)\,dx + \int_{0}^{a}A^2\sin^2 k(x-a)\,dx$$

$$= \frac{A^2}{2}\left\{\int_{-a}^{0}\big[1-\cos 2k(x+a)\big]dx + \int_{0}^{a}\big[1-\cos 2k(x-a)\big]dx\right\}$$

$$= \frac{A^2}{2}\left(a - \frac{1}{2k}\big[\sin 2k(x+a)\big]_{-a}^{0} + a - \frac{1}{2k}\big[\sin 2k(x-a)\big]_{0}^{a}\right) = \frac{A^2}{2}\left(2a - \frac{2}{2k}\sin(2ka)\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پس:

$$A=\left[a-\frac{۱}{۲k}\sin\left(۲ka\right)\right]^{-\frac{۱}{۲}}$$

تمرین ۴-۲۸

ذره‌ای به جرم m ضمن محدود بودن به حرکت در یک چاه پتانسیل مربعی نامتناهی به اندازه $۲a$ با دیواره‌هایی در $x=-a$ و $x=+a$، در معرض یک پتانسیل دلتای جاذب:

$$V(x)=\begin{cases} V_{۰}\delta(x) & -a<x<a \\ \infty & \text{هر جای دیگر} \end{cases}$$

قرار دارد که در آن $V_{۰}>۰$.

(آ) تابع موج ذره را که متناظر با جواب‌های فرد است برای حالتی که $E>۰$ بیابید.

(ب) ترازهای انرژی متناظر با جواب‌های فرد را بیابید.

حل:

با توجه به تمرین ۴-۲۷ چون به‌دنبال جواب‌های فرد هستیم، داریم:

$$\psi(x)=\begin{cases} ۰ & ; \quad |x|\geq a \\ A\sin k\left(x+a\right) & ; \quad -a\leq x\leq a \\ a\sin\left(x-a\right) & ; \quad ۰\leq x\leq a \end{cases}$$

از طرفی:

$$Ak\cos ka-ak\cos ka=\frac{۲mV_{۰}}{\hbar^{۲}}A\sin ka$$

پس:

یا:

$$\sin ka=۰$$

درنتیجه:

$$ka=n\pi \qquad ; \qquad n=۱,۲,\cdots$$

و:

$$E_{n}=\frac{n^{۲}\pi^{۲}\hbar^{۲}}{۲ma^{۲}}$$

$$A=\sqrt{\frac{۱}{a}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۴-۲۹

ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که تحت اثر یک پتانسیل دلتای جاذب

$$V(x)=\begin{cases}-V_{\circ}\delta(x) & x>-a\\ \infty & x<-a\end{cases}$$

در حال حرکت است و در آن $V_{\circ}>\circ$ است. درباره‌ی وجود حالت‌های مقید برحسب $V_{\circ}$ و a بحث کنید.

حل:

برای ناحیه‌ی $x\le -a$ به‌دلیل نامتناهی بودن پتانسیل، تابع موج باید صفر باشد و برای ناحیه‌ی $x\ge -a$ داریم:

$$\frac{d^{۲}\psi}{dx^{۲}}+\frac{۲m}{\hbar^{۲}}\left(E+V_{\circ}\delta\left(x\right)\right)\psi\left(x\right)=\circ$$

به‌ازای $x\neq\circ$ با فرض منفی بودن انرژی داریم:

$$\frac{d^{۲}\psi\left(x\right)}{dx^{۲}}-k^{۲}\psi\left(x\right)=\circ$$

که در اینجا $k=\sqrt{\frac{۲m\left|E\right|}{\hbar^{۲}}}$ می‌باشد. با اعمال شرط مرزی $\psi\left(-a\right)=\psi\left(+\infty\right)=\circ$ داریم:

$$\psi\left(x\right)=\begin{cases}\circ & ; \quad x\le -a\\ A\sinh k\left(x+a\right) & ; -a\le x\le \circ\\ B\,e^{-kx} & ; \quad x\ge \circ\end{cases}$$

از پیوستگی $\psi\left(x\right)$ در $x=\circ$ داریم:

$$A\sinh\left(ka\right)=B$$

از گسستگی مشتق تابع موج در $x=\circ$ داریم:

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=\circ^{+}}-\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x-\circ^{-}}=\frac{-۲mV_{\circ}}{\hbar^{۲}}\psi\left(\circ\right)$$

$$-k\,B-Ak\cos h\left(ka\right)=-\frac{۲mV_{\circ}}{\hbar^{۲}}B=-\frac{۲mV_{\circ}}{\hbar^{۲}}A\sin h\left(ka\right)$$

یا:

$$-kA\sin h\left(ka\right)-Ak\cosh\left(ka\right)=-\frac{۲mV_{\circ}}{\hbar^{۲}}a\sin h\left(ka\right)$$

یا:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

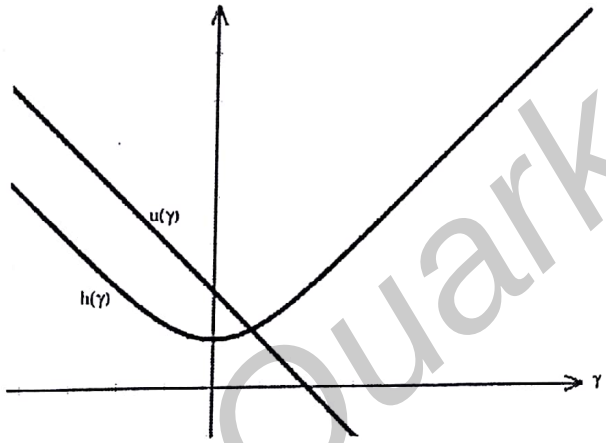
$$\cot h(ka) = \frac{۲mV_۰}{k\hbar^۲} - ۱$$

با تعریف $\gamma = ka$ داریم:

$$\gamma \cot h\gamma = \frac{۲mV_۰a}{\hbar^۲} - \gamma$$

ویژه مقادیر انرژی از تقاطع منحنی‌های $h(\gamma) = \gamma \cot h\gamma$ و $u(\gamma) = \frac{۲mV_۰a}{\hbar^۲} - \gamma$ به‌دست می‌آید.

همانطوری که در شکل نشان داده شده است اگر $a < \frac{۲mV_۰}{\hbar^۲}$ هیچ حالت مقیدی وجود نخواهد داشت، چون دو منحنی $h(\gamma)$ و $u(\gamma)$ هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند. اما اگر $a > \frac{۲mV_۰}{\hbar^۲}$، منحنی‌ها فقط یک بار همدیگر را قطع می‌کنند و بنابراین یک حالت مقید وجود خواهد داشت.



Quark

تمرین ۴-۳۰

سیستمی متشکل از دو نوسانگر هماهنگ یکسان (با یک بسامد زاویه‌ای ω) را در نظر بگیرید.

(آ) ترازهای انرژی را در حالتی که نوسانگرها مستقل از هم (غیربرهم‌کنشی) هستند پیدا کنید.

(ب) ترازهای انرژی را در حالتی که نوسانگرها به‌وسیله‌ی یک برهم کنش $-\lambda \hat{X}_۱\hat{X}_۲$ جفت شده‌اند بیابید که در آن λ یک ثابت است.

پ) فرض کنید که $\lambda \ll m\omega^۲$ (حد جفت‌شدگی ضعیف)، آنگاه یک عبارت تقریبی از مرتبه‌ی اول $\lambda/m\omega^۲$ برای انرژی به دست آمده در قسمت ب بیابید.

حل:

(آ)

هامیلتونی سیستم به شکل زیر است:

$$H = H_۱ + H_۲ = \frac{\hat{P}_۱^۲}{۲m} + \frac{۱}{۲}mw^۲\hat{X}_۱^۲ + \frac{\hat{P}_۲^۲}{۲m} + \frac{۱}{۲}mw^۲\hat{X}_۲^۲$$

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پس انرژی سیستم عبارتست از:

$$E_{n_1,n_2}=\hbar w\left(n_1+\frac{1}{2}\right)+\hbar w\left(n_2+\frac{1}{2}\right)=\hbar w\left(n_1+n_2+1\right)$$

که در رابطه‌ی فوق n_1 و n_2 اعداد صحیح نامنفی هستند.

(ب)

در این حالت، هامیلتونی سیستم به صورت زیر است:

$$H=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2}mw^2\hat{X}_1^2-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{1}{2}mw^2\hat{X}_2^2-\lambda\hat{X}_1\hat{X}_2$$

با تعریف:

$$X=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\ ,\ y=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}$$

داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}\ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}\ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{+1}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ \Rightarrow$$

$$\hat{x}^2+\hat{y}^2=\frac{\hat{X}_1^2+\hat{X}_2^2+2\hat{X}_1\hat{X}_2}{2}+\frac{\hat{X}_1^2+\hat{X}_2^2-2\hat{X}_1\hat{X}_2}{2}=\hat{X}_1^2=\hat{X}_2^2$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{X}_1\hat{X}_2=\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{2}}=\frac{\hat{x}^2-\hat{y}^2}{2}$$

پس:

$$H=\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{2}mw^2\left(\hat{x}^2+\hat{y}^2\right)-\frac{\lambda}{2}\left(\hat{x}^2-\hat{y}^2\right)$$

$$=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}mx^2\left(w^2-\frac{\lambda}{m}\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}my^2\left(w^2+\frac{\lambda}{m}\right)$$

در نتیجه انرژی سیستم عبارتست از:

$$E=\hbar\sqrt{w^2-\frac{\lambda}{m}}\left(n_1+\frac{1}{2}\right)+\hbar\sqrt{w^2+\frac{\lambda}{m}}\left(n_2+\frac{1}{2}\right)$$

که در این رابطه، n_1 و n_2 اعداد صحیح نامنفی هستند.

(پ)

به ازای مقادیر کوچک x داریم:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$$

پس به ازای $\frac{\lambda}{mw^2}\ll 1$ خواهیم داشت:

$$E=\hbar\left(n_1+\frac{1}{2}\right)w\sqrt{1-\frac{\lambda}{mw^2}}+\hbar\left(n_2+\frac{1}{2}\right)w\sqrt{1+\frac{\lambda}{mw^2}}$$

$$\simeq\hbar\left(n_1+\frac{1}{2}\right)w\left(1-\frac{1}{2}\frac{\lambda}{mw^2}\right)+\hbar\left(n_2+\frac{1}{2}\right)w\left(1+\frac{1}{2}\frac{\lambda}{mw^2}\right)$$

$$=\hbar w\left(n_1+n_2+\frac{\lambda}{2mw^2}\left(n_2-n_1\right)+1\right)$$

تمرین ۴-۳۱

ذره‌ای در ابتدا در حالت پایه‌ی خود درون یک جعبه‌ی پتانسیل یک بعدی بی‌نهایت با دیواره‌هایی در $x=0$ و $x=a$ قرار دارد. اگر دیواره‌ی $x=a$ ناگهان به $x=3a$ منتقل شود، احتمال یافتن ذره را در موارد زیر محاسبه کنید:

(آ) حالت پایه‌ی جعبه‌ی جدید

(ب) نخستین حالت برانگیخته‌ی جعبه‌ی جدید

(پ) احتمال یافتن ذره در نخستین حالت برانگیخته‌ی جعبه‌ی جدید، با فرض این‌که ذره ابتدا در اولین

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حالت برانگیخته‌ی جعبه‌ی قدیم باشد.

حل:

(آ)

حالت پایه‌ی جعبه‌ی قدیمی عبارتست از:

$$\psi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

اما حالت پایه‌ی جعبه‌ی جدید عبارتست از:

$$\phi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{3a}}\sin\left(\frac{\pi x}{3a}\right)$$

اگر تعریف کنیم:

$$C_1=\int_0^a \phi_1^*(x)\psi_1(x)\,dx$$

احتمال مطلوب عبارتست از:

$$P_1=|C_1|^2$$

حال به یافتن C_1 می‌پردازیم:

$$C_1=\int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{3a}}\left(\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi x}{3a}\right)dx=\frac{1}{a\sqrt{3}}\int_0^a\left[\cos\left(\frac{2\pi x}{3a}\right)-\cos\left(\frac{4\pi x}{3a}\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{3}}\left\{\frac{3a}{2\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{3a}\right)\right]_0^a-\frac{3a}{4\pi}\left[\sin\left(\frac{4\pi x}{3a}\right)\right]_0^a\right\}=\frac{1}{a\sqrt{3}}\left[\frac{3a}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}-\frac{3a}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{3}}\left(\frac{3a}{2\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3a}{4\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{6+3}{8\pi}=\frac{9}{8\pi}$$

$$P_1=\left(\frac{9}{8\pi}\right)^2=\frac{81}{64\pi^2}$$

(ب)

در اینجا داریم:

$$P_2=|C_2|^2$$

به‌طوری که:

$$C_2=\int_0^a \phi_2^*(x)\psi_1(x)dx=\int_0^a\sqrt{\frac{2}{3a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{3a}\right)\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx=\frac{1}{a\sqrt{3}}\int_0^a\left[\cos\left(\frac{\pi x}{3a}\right)-\cos\left(\frac{5\pi x}{3a}\right)\right]dx$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{۱}{a\sqrt{۳}}\left\{\frac{۳a}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{۳a}\right)\right]_۰^a - \frac{۳a}{۵\pi}\left[\sin\left(\frac{۵\pi x}{۳a}\right)\right]_۰^a\right\} = \frac{۱}{a\sqrt{۳}}\left(\frac{۳a}{\pi}\sin\frac{\pi}{۳} - \frac{۳a}{۵\pi}\sin\frac{۵\pi}{۳}\right)$$

$$= \frac{۱}{a\sqrt{۳}}\left(\frac{۳a}{\pi}\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۳a}{۵\pi}\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۳a}{a\sqrt{۳}}\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}\left(۱+\frac{۱}{۵}\right) = \frac{۳}{۲\pi}\frac{۶}{۵} = \frac{۹}{۵\pi}$$

پس:

$$P_۲ = \frac{۸۱}{۲۵\pi^۲}$$

(پ)

در اینجا داریم:

$$P_۲ = |C_۲|^۲$$

به‌طوری‌که:

$$C_۲ = \int_۰^a \phi_۲^*(x)\psi_۲(x)dx = \int_۰^a \sqrt{\frac{۲}{۳a}}\sin\left(\frac{۲\pi x}{۳a}\right)\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{۲\pi x}{a}\right)dx$$

$$= \frac{۱}{a\sqrt{۳}}\int_۰^a\left[\cos\left(\frac{۴\pi x}{۳a}\right) - \cos\left(\frac{۸\pi x}{۳a}\right)\right]dx = \frac{۱}{a\sqrt{۳}}\left[\frac{۳a}{۴\pi}\sin\left(\frac{۴\pi x}{۳a}\right) - \frac{۳a}{۸\pi}\sin\left(\frac{۸\pi x}{۳a}\right)\right]_۰^a$$

$$= \frac{۱}{a\sqrt{۳}}\left(\frac{۳a}{۴\pi}\frac{-\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۳a}{۸\pi}\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۱}{a\sqrt{۳}}\frac{-۹a\sqrt{۳}}{۱۶\pi} = \frac{-۹}{۱۶\pi}$$

$$P_۲ = \left(\frac{-۹}{۱۶\pi}\right)^۲ = \frac{۸۱}{۲۵۶\pi^۲}$$

تمرین ۴-۳۲

ذره‌ای در ابتدا در حالت پایه‌ی خود و در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک بعدی $\hat{V}(x) = \frac{۱}{۲}k\hat{x}^۲$ قرار دارد. اگر ثابت فنر ناگهان دو برابر شود، احتمال یافتن ذره را در حالت پایه‌ی پتانسیل جدید محاسبه کنید.

حل:

با توجه به اینکه در نوسانگر هارمونیک $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$، بنابراین اگر k دو برابر شود مقدار w، $\sqrt{۲}$ برابر خواهد شد. اگر حالت پایه‌ی قدیم را با $\psi_۰(x)$ و حالت پایه‌ی جدید را با $\phi_۰(x)$ نشان دهیم، داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\psi_{۰}(x)=\left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{\frac{۱}{۴}}\exp\left(\frac{-mwx^{۲}}{۲\hbar}\right),\quad \phi_{۰}(x)=\left(\frac{mw\sqrt{۲}}{\pi\hbar}\right)^{\frac{۱}{۴}}\exp\left(\frac{-mw\sqrt{۲}x^{۲}}{۲\hbar}\right)$$

اگر تعریف کنیم:

$$C_{۰}=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{۰}^{*}(x)\psi_{۰}(x)dx$$

در این صورت احتمال مطلوب برابر است با:

$$P_{۰}=|C_{۰}|^{۲}$$

حال $C_{۰}$ را می‌یابیم:

$$C_{۰}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{\frac{۱}{۲}}۲^{\frac{۱}{۸}}\exp\left[\frac{-mw\left(۱+\sqrt{۲}\right)x^{۲}}{۲\hbar}\right]dx$$

$$=۲^{\frac{۱}{۸}}\left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{\frac{۱}{۲}}\left[\frac{۲\hbar\pi}{mw\left(۱+\sqrt{۲}\right)}\right]^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۱}{۸}}\left(\frac{۲}{۱+\sqrt{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

پس:

$$P_{۰}=\frac{۲\times۲^{\frac{۱}{۴}}}{۱+\sqrt{۲}}=۲^{\frac{۹}{۴}}\left(\sqrt{۲}-۱\right)\simeq ۰/۹۶$$

Quark

تمرین ۴-۳۳

الکترونی را در چاه پتانسیل بی‌نهایت

$$V(x)=\begin{cases}۰ & ۰<x<a\\ +\infty & \text{هر جای دیگر}\end{cases}$$

قرار دارد که درآن $a=۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{m}$

(آ) ترازهای انرژی پایین‌ترین سه حالت، را (برحسب eV) و طول موج‌های متناظر با الکترون را محاسبه کنید.

(ب) بسامد تابشی را که سبب می‌شود الکترون از تراز انرژی پایه به سومین تراز انرژی برانگیخته بجهد، محاسبه کنید.

(پ) هنگامی که الکترون به تراز پایه‌ی خود برمی‌گردد، بسامدهای فوتون‌های گسیل شده چه مقدار هستند؟

(ت) چگالی‌های احتمال را برای این سه حالت مشخص و آن‌ها را رسم کنید.

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

(آ)

برای ذره در جعبه‌ی انرژی E_n، ویژه توابع ϕ_n و طول موج λ_n از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\phi_n = \sqrt{\frac{۲}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad , \quad E_n = \frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲} \quad , \quad \lambda_n = \frac{۲a}{n}$$

پس:

$$E_۱ = \frac{\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲} = \frac{\pi^۲\hbar^۲c^۲}{۲mc^۲a^۲} = \frac{۱۰\times\left(۱۹۷/۳۲۷\,\text{eV.nm}\right)^۲}{۲\times۰/۵۱۱\times۱۰^۶\,\text{eV}\times\left(۱۰^{-۱}\,\text{nm}\right)^۲} \simeq ۳۸/۱\text{eV}$$

$$E_۲ = ۴E_۱ = ۱۵۲/۴\text{eV} \quad , \quad E_۳ = ۹E_۱ = ۳۴۲/۹\text{eV}$$

$$\lambda_۱ = ۲a = ۲\times۱۰^{-۱۰}\,\text{m} = ۲\text{Å} \quad , \quad \lambda_۲ = \frac{\lambda_۱}{۲} = ۱\text{Å} \quad , \quad \lambda_۳ = \frac{\lambda_۱}{۳} = \frac{۲}{۳}\text{Å}$$

(ب)

فرکانس مطلوب از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$w = \frac{E_۴ - E_۱}{\hbar}$$

پس:

$$w = \frac{۱۶E_۱ - E_۱}{\hbar} = \frac{۱۵E_۱}{\hbar} = \frac{۱۵\times۳۸/۱\text{eV}}{\frac{۱۹۷/۳۲۷\,\text{eV.nm}}{c}} = \frac{۱۵\times۳۸/۱\times۳\times۱۰^۸\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{۱۹۷/۳۲۷\times۱۰^{-۹}\,\text{m}} \simeq ۸/۷\times۱۰^{۱۷}\,\text{Hz}$$

(پ)

فرکانس فوتون گسیل شده از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$w_{n\to۱} = \frac{E_n - E_۱}{\hbar} = \frac{\left(n^۲-۱\right)E_۱}{\hbar} = ۵/۸\left(n^۲-۱\right)\times۱۰^{۱۶}\,\text{Hz}$$

(ت)

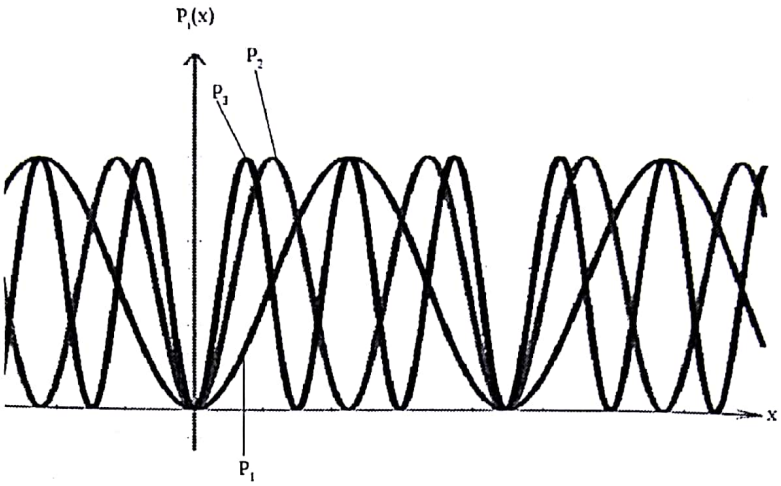
چگالی احتمال برای هر تابع موج اختیاری $\psi(x)$ برابر است با:

$$P = \left|\psi(x)\right|^۲ \quad \Rightarrow \quad P_۱ = \left|\psi_۱(x)\right|^۲ = \frac{۲}{a}\sin^۲\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$P_۲ = \left|\psi_۲(x)\right|^۲ = \frac{۲}{a}\sin^۲\left(\frac{۲\pi x}{a}\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$P_۳ = \left|\psi_۳(x)\right|^۲ = \frac{۲}{a}\sin^۲\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)$$



تمرین ۴-۳۴

الکترونی را در نظر بگیرید که محدود به حرکت در یک چاه مربعی نامتناهی با پهنای $a = ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{m}$ است.

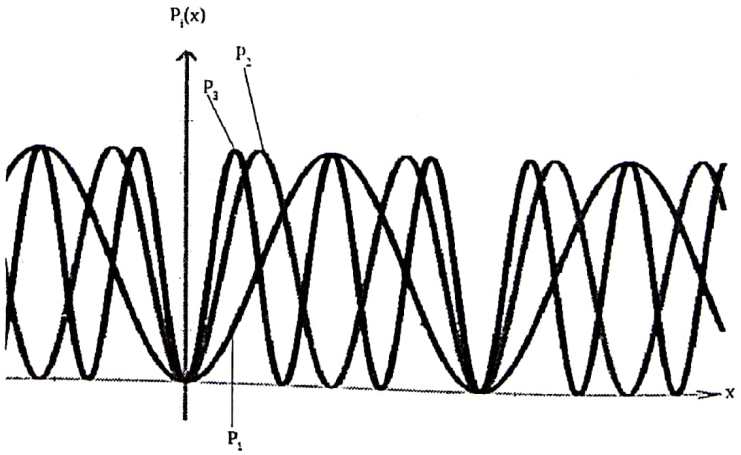
(آ) مقادیر دقیق انرژی را برای پایین‌ترین یازده حالت (برحسب eV) بیابید.

(ب) معادله‌ی شرودینگر را به صورت عددی حل کنید و انرژی‌های پایین‌ترین یازده حالت را بیابید و آن‌ها را با نتایج دقیق به‌دست آمده در قسمت (آ) مقایسه کنید. توابع موج پایین‌ترین پنج حالت را رسم کنید.

حل:

آ)

ب)



Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

فصل پنجم

اندازه حرکت زاویه‌ای

تمرین ۵-۱

(آ) روابط جابه‌جایی زیر را ثابت کنید.

$$\left[\hat{Y},\hat{L}_y\right]=0\ ,\ \left[\hat{Y},\hat{L}_z\right]=i\hbar\hat{X}\ ,\ \left[\hat{Y},\hat{L}_x\right]=-i\hbar\hat{Z}$$
$$\left[\hat{Z},\hat{L}_z\right]=0\ ,\ \left[\hat{Z},\hat{L}_x\right]=i\hbar\hat{Y}\ ,\ \left[\hat{Z},\hat{L}_y\right]=-i\hbar\hat{X}$$

(ب) با استفاده از جایگشت دوری xyz نتیجه‌های (آ) را برای نتیجه‌گیری عبارت‌هایی برای $\left[X,\hat{L}_x\right]$، $\left[\hat{X},\hat{L}_y\right]$ و $\left[\hat{X},\hat{L}_z\right]$ به‌کار ببرید.

(پ) نتایج (آ) و (ب) را برای محاسبه‌ی $\left[\hat{R}^2,\hat{L}_x\right]$، $\left[\hat{R}^2,\hat{L}_y\right]$ و $\left[\hat{R}^2,\hat{L}_z\right]$ به‌کار ببرید، که در آن $\hat{R}^2=\hat{X}^2+\hat{Y}^2+\hat{Z}^2$.

حل:

مستقیماً به سراغ محاسبات می‌رویم:

(آ)

$$\left[\hat{Y},\hat{L}_y\right]=\left[\hat{Y},\hat{Z}\hat{P}_x-\hat{X}\hat{P}_z\right]=\left[\hat{Y},\hat{Z}\hat{P}_x\right]-\left[\hat{Y},\hat{X}\hat{P}_z\right]$$
$$=\left[\hat{Y},\hat{Z}\right]\hat{P}_x+\hat{Z}\left[\hat{Y},\hat{P}_x\right]-\left[\hat{Y},\hat{X}\right]\hat{P}_z-\hat{X}\left[\hat{Y},\hat{P}_z\right]=0$$

به‌همین ترتیب:

$$\left[\hat{Z},\hat{L}_z\right]=0$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left[\hat{Y},\hat{L}_z\right]=\left[\hat{Y},\hat{X}\hat{P}_y-\hat{Y}\hat{P}_x\right]=\left[\hat{Y},\hat{X}\hat{P}_y\right]-\left[\hat{Y},\hat{Y}\hat{P}_x\right]$$
$$=\left[\hat{Y},\hat{X}\right]\hat{P}_y+\hat{X}\left[\hat{Y},\hat{P}_y\right]-\left[\hat{Y},\hat{Y}\right]\hat{P}_x-\hat{Y}\left[\hat{Y},\hat{P}_x\right]=\hat{X}\left[\hat{Y},\hat{P}_y\right]=i\hbar\hat{X}$$

به‌همین ترتیب:

$$\left[\hat{Z},\hat{L}_x\right]=i\hbar\hat{Y}$$
$$\left[\hat{Y},\hat{L}_x\right]=\left[\hat{Y},\hat{Y}\hat{P}_z-\hat{Z}\hat{P}_y\right]=\left[\hat{Y},\hat{Y}\hat{P}_z\right]-\left[\hat{Y},\hat{Z}\hat{P}_y\right]$$
$$=\left[\hat{Y},\hat{Y}\right]\hat{P}_z+\hat{Y}\left[\hat{Y},\hat{P}_z\right]-\left[\hat{Y},\hat{Z}\right]P_y-\hat{Z}\left[\hat{Y},\hat{P}_y\right]=-\hat{Z}\left[\hat{Y},\hat{P}_y\right]=-i\hbar\hat{Z}$$

به‌همین ترتیب:

$$\left[\hat{Z},\hat{L}_y\right]=-i\hbar\hat{X}$$

(ب)

$$\left[\hat{X},\hat{L}_x\right]=0$$
$$\left[\hat{X},\hat{L}_y\right]=i\hbar\hat{Z}$$
$$\left[\hat{X},\hat{L}_z\right]=-i\hbar\hat{Y}$$

(پ)

$$\left[\hat{R}^2,\hat{L}_x\right]=\left[\hat{X}^2+\hat{Y}^2+\hat{Z}^2,\hat{L}_x\right]=\left[\hat{X}^2,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{Y}^2,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{Z}^2,\hat{L}_x\right]$$
$$=\left[\hat{Y}^2,\hat{L}_x\right]+\left[Z^2,\hat{L}_x\right]=\hat{Y}\left[\hat{Y},\hat{L}_x\right]+\left[\hat{Y},\hat{L}_x\right]\hat{Y}+\hat{Z}\left[\hat{Z},\hat{L}_x\right]+\left[\hat{Z},\hat{L}_x\right]\hat{Z}$$
$$=\hat{Y}\left(-i\hbar\hat{Z}\right)+\left(-i\hbar\hat{Z}\right)\hat{Y}+\hat{Z}\left(i\hbar\hat{Y}\right)+\left(i\hbar\hat{Y}\right)\hat{Z}=0$$

و به‌همین ترتیب:

$$\left[\hat{R}^2,\hat{L}_y\right]=\left[\hat{R}^2,\hat{L}_z\right]=0$$

تمرین ۵-۲

(آ) روابط جابه‌جایی زیر را ثابت کنید.

$$\left[\hat{P}_y,\hat{L}_y\right]=0\ ,\ \left[\hat{P}_y,\hat{L}_z\right]=i\hbar\hat{P}_x\ ,\ \left[\hat{P}_y,\hat{L}_x\right]=-i\hbar\hat{P}_z$$
$$\left[\hat{P}_z,\hat{L}_z\right]=0\ ,\ \left[\hat{P}_z,\hat{L}_x\right]=i\hbar\hat{P}_y\ ,\ \left[\hat{P}_z,\hat{L}_y\right]=-i\hbar\hat{P}_x$$

(ب) نتایج (آ) را برای $\left[\hat{P}_x,\hat{L}_x\right]$، $\left[\hat{P}_x,\hat{L}_y\right]$، و $\left[\hat{P}_x,\hat{L}_z\right]$ با استفاده از یک جایگشت دوری به‌کار ببرید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ) نتایج (آ) و (ب) را برای محاسبه $\left[\hat{P}^2,\hat{L}_x\right]$، $\left[\hat{P},\hat{L}_y\right]$ و $\left[\hat{P}^2,\hat{L}_z\right]$ به‌کار ببرید که در آن $\hat{P}^2=\hat{P}_x^2+\hat{P}_y^2+\hat{P}_z^2$.

حل: مستقیماً به سراغ محاسبات می‌رویم:

(آ)

$$\left[\hat{P}_y,\hat{L}_y\right]=\left[\hat{P}_y,\hat{Z}\hat{P}_x-\hat{X}\hat{P}_z\right]=\left[\hat{P}_y,\hat{Z}\hat{P}_x\right]-\left[\hat{P}_y,\hat{X}\hat{P}_z\right]$$
$$=\left[\hat{P}_y,\hat{Z}\right]\hat{P}_x+\hat{Z}\left[\hat{P}_y,\hat{P}_x\right]-\left[\hat{P}_y,\hat{X}\right]\hat{P}_z-\hat{X}\left[\hat{P}_y,\hat{P}_z\right]=0$$

و به‌همین ترتیب:

$$\left[\hat{P}_z,\hat{L}_z\right]=i\hbar\hat{P}_y$$
$$\left[\hat{P}_y,\hat{L}_z\right]=\left[\hat{P}_y,\hat{X}\hat{P}_y-\hat{Y}\hat{P}_x\right]=\left[\hat{P}_y,\hat{X}\hat{P}_y\right]-\left[\hat{P}_y,\hat{Y}\hat{P}_x\right]$$
$$=\left[\hat{P}_y,\hat{X}\right]\hat{P}_y+\hat{X}\left[\hat{P}_y,\hat{P}_y\right]-\left[\hat{P}_y,\hat{Y}\right]\hat{P}_x-\hat{Y}\left[\hat{P}_y,\hat{P}_x\right]=-\left[\hat{P}_y,\hat{Y}\right]\hat{P}_x=+i\hbar\hat{P}_x$$

و به‌همین ترتیب:

$$\left[\hat{P}_z,\hat{L}_x\right]=0$$
$$\left[\hat{P}_y,\hat{L}_x\right]=\left[\hat{P}_y,\hat{Y}\hat{P}_z-\hat{Z}\hat{P}_y\right]=\left[\hat{P}_y,\hat{Y}\hat{P}_z\right]-\left[\hat{P}_y,\hat{Z}\hat{P}_y\right]$$
$$=\left[\hat{P}_y,\hat{Y}\right]\hat{P}_z+\hat{Y}\left[\hat{P}_y,\hat{P}_z\right]-\left[\hat{P}_y,\hat{Z}\right]\hat{P}_y-\hat{Z}\left[\hat{P}_y,\hat{P}_y\right]=\left[\hat{P}_y,\hat{Y}\right]\hat{P}_z=-i\hbar\hat{P}_z$$

و به‌همین ترتیب:

$$\left[\hat{P}_z,\hat{L}_y\right]=-i\hbar\hat{P}_x$$

(ب)

$$\left[\hat{P}_x,\hat{L}_x\right]=0$$
$$\left[\hat{P}_x,\hat{L}_y\right]=i\hbar\hat{P}_z$$
$$\left[\hat{P}_x,\hat{L}_z\right]=-i\hbar P_y$$

(پ)

$$\left[\hat{P}^2,\hat{L}_x\right]=\left[\hat{P}_x^2+\hat{P}_y^2+P_z^2,\hat{L}_x\right]=\left[\hat{P}_x^2,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{P}_y^2,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{P}_z^2,\hat{L}_x\right]$$
$$=\hat{P}_y\left[\hat{P}_y,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{P}_y,\hat{L}_x\right]\hat{P}_y+\hat{P}_z\left[\hat{P}_z,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{P}_z,\hat{L}_x\right]\hat{P}_z$$
$$=\hat{P}_y\left(-i\hbar\hat{P}_z\right)+\left(-i\hbar\hat{P}_z\right)\hat{P}_y+\hat{P}_z\left(i\hbar\hat{P}_y\right)+\left(i\hbar\hat{P}_y\right)\hat{P}_z=0$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

و به همین ترتیب:

$$\left[\hat{P}^2, \hat{L}_y\right] = \left[\hat{P}^2, \hat{L}_z\right] = 0$$

تمرین ۵-۳

اگر $\hat{L}_\pm$ و $\hat{R}_\pm$ به‌وسیله‌ی $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ و $\hat{R}_\pm = \hat{X} \pm i\hat{Y}$ تعریف شوند، جابه‌جاگرهای زیر را اثبات کنید:

(آ) $\left[\hat{L}_\pm, \hat{R}_\pm\right] = \pm 2\hbar\hat{Z}$

(ب) $\left[\hat{L}_\pm, \hat{R}_\pm\right] = 0$.

حل:

با استفاده از نتایج تمرین ۵-۱ داریم:

$$\left[\hat{L}_\pm, \hat{R}_\pm\right] = \left[L_x \pm i\hat{L}_y, \hat{X} \pm i\hat{Y}\right] = \left[\hat{L}_x, \hat{X}\right] \pm i\left[\hat{L}_x, \hat{Y}\right] \pm i\left[\hat{L}_y, \hat{X}\right] - \left[\hat{L}_y, \hat{Y}\right]$$
$$= \pm i\left[\hat{L}_x, \hat{Y}\right] \pm i\left[\hat{L}_y, \hat{X}\right] = \pm i\left(i\hbar\hat{Z} - i\hbar\hat{Z}\right) = 0$$

$$\left[\hat{L}_\pm, \hat{R}_\mp\right] = \left[\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y, \hat{X} \mp i\hat{Y}\right] = \mp i\left[\hat{L}_x, \hat{Y}\right] \pm i\left[\hat{L}_y, \hat{X}\right] = \mp i\left(i\hbar\hat{Z}\right) \pm i\left(-i\hbar\hat{Z}\right)$$
$$= \pm\hbar\hat{Z} \pm \hbar\hat{Z} = \pm 2\hbar\hat{Z}$$

تمرین ۵-۴

اگر $\hat{L}_\pm$ و $\hat{R}_\pm$ به‌وسیله‌ی $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ و $\hat{R}_\pm = \hat{X} \pm i\hat{Y}$ تعریف شوند، جابه‌جاگرهای زیر را اثبات کنید:

(آ) $\left[\hat{L}_\pm, \hat{Z}\right] = \mp\hbar\hat{R}_\pm$

(ب) $\left[\hat{L}_z, \hat{R}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{R}_\pm$

(پ) $\left[\hat{L}_z, \hat{Z}\right] = 0$.

حل:

با استفاده از نتایج تمرین ۵-۱ داریم:

$$\left[\hat{L}_\pm, \hat{Z}\right] = \left[\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y, \hat{Z}\right] = \left[\hat{L}_x, \hat{Z}\right] \pm i\left[\hat{L}_y, \hat{Z}\right]$$
$$= -i\hbar\hat{Y} \pm i\left(i\hbar\hat{X}\right) = \mp\hbar\left(\hat{X} \pm i\hat{Y}\right) = \mp\hbar\hat{R}_\pm$$

$$\left[\hat{L}_z, \hat{R}_\pm\right] = \left[\hat{L}_z, \hat{X} \pm i\hat{Y}\right] = \left[\hat{L}_z, \hat{X}\right] \pm i\left[\hat{L}_z, \hat{Y}\right]$$
$$= i\hbar\hat{Y} \pm i\left(-i\hbar\hat{X}\right) = \pm\hbar\left(\hat{X} \pm i\hat{Y}\right) = \pm\hbar\hat{R}_\pm$$

$$\left[\hat{L}_z, \hat{Z}\right] = \left[\hat{X}\hat{P}_y - \hat{Y}\hat{P}_x, \hat{Z}\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۵-۵

دو رابطه‌ی مقابل را اثبات کنید: $\hat{\vec{R}}.\hat{\vec{L}}=0$ و $\hat{\vec{P}}.\hat{\vec{L}}=0$.

حل:

$$\hat{\vec{R}}.\hat{\vec{L}}=\hat{X}\hat{L}_x+\hat{Y}\hat{L}_y+\hat{Z}\hat{L}_z=\hat{X}\left(\hat{Y}\hat{P}_z-\hat{Z}\hat{P}_y\right)+\hat{Y}\left(\hat{Z}\hat{P}_x-\hat{X}\hat{P}_z\right)+\hat{Z}\left(\hat{X}\hat{P}_y-\hat{Y}\hat{P}_x\right)$$
$$=\left(\hat{X}\hat{Y}-\hat{Y}\hat{X}\right)\hat{P}_z+\left(\hat{Z}\hat{X}-\hat{X}\hat{Z}\right)\hat{P}_y+\left(\hat{Y}\hat{Z}-\hat{Z}\hat{Y}\right)\hat{P}_x$$
$$=\left[\hat{X},\hat{Y}\right]\hat{P}_z+\left[\hat{Z},\hat{X}\right]\hat{P}_y+\left[\hat{Y},\hat{Z}\right]\hat{P}_x=0$$
$$\hat{\vec{P}}.\hat{\vec{L}}=\hat{P}_x\hat{L}_x+\hat{P}_y\hat{L}_y+\hat{P}_z\hat{L}_z=\hat{P}_x\left(\hat{Y}\hat{P}_z-\hat{Z}\hat{P}_y\right)+\hat{P}_y\left(\hat{Z}\hat{P}_x-\hat{X}\hat{P}_z\right)+\hat{P}_z\left(\hat{X}\hat{P}_y-\hat{Y}\hat{P}_x\right)$$
$$=\hat{P}_x\hat{Y}\hat{P}_z-\hat{P}_x\hat{Y}\hat{P}_z-\hat{P}_x\hat{Z}\hat{P}_y+\hat{P}_x\hat{Z}\hat{P}_y-\hat{P}_y\hat{X}\hat{P}_z+\hat{P}_y\hat{X}\hat{P}_z=0$$

تمرین ۵-۶

هامیلتونی ناشی از برهم‌کنش ذره‌ای با اسپین $\vec{S}$ با یک میدان مغناطیسی با $\hat{H}=-\hat{S}.\hat{B}$ داده می‌شود که در آن $\vec{S}$ اسپین است. جابه‌جاگر $\left[\vec{S},\hat{H}\right]$ را محاسبه کنید.

حل:

ابتدا $\left[\hat{S}_x,\hat{H}\right]$ را حساب می‌کنیم:

$$\left[\hat{S}_x,\hat{H}\right]=-\left[\hat{S}_x,\hat{\vec{S}}.\hat{\vec{B}}\right]=-\left[\hat{S}_x,\hat{S}_xB_x+\hat{S}_yB_y+\hat{S}_zB_z\right]$$
$$=-\left[\hat{S}_x,\hat{S}_xB_x\right]-\left[\hat{S}_x,\hat{S}_yB_y\right]-\left[\hat{S}_x,\hat{S}_zB_z\right]$$
$$=-\left[\hat{S}_x,\hat{S}_x\right]B_x-\hat{S}_x\left[\hat{S}_x,B_x\right]-\left[\hat{S}_x,\hat{S}_y\right]B_y-\hat{S}_y\left[\hat{S}_x,B_y\right]-\left[\hat{S}_x,S_z\right]B_z-\hat{S}_z\left[\hat{S}_x,B_z\right]$$

چون $\vec{B}$ در حالت کلی تابعی از x، y، z و t است، لذا:

$$\left[\hat{S}_x,B_x\right]=\left[\hat{S}_x,B_y\right]=\left[\hat{S}_x,B_z\right]=0$$

پس:

$$\left[\hat{S}_x,\hat{H}\right]=-\left[\hat{S}_x,\hat{S}_y\right]B_y-\left[\hat{S}_x,\hat{S}_z\right]B_z=-i\hbar\hat{S}_zB_y+i\hbar\hat{S}_yB_z=i\hbar\left(\hat{S}_yB_z-\hat{S}_zB_y\right)=i\hbar\left(\hat{\vec{S}}\times\vec{B}\right)_x$$

به همین ترتیب داریم:

$$\left[\hat{S}_y,\hat{H}\right]=i\hbar\left(\hat{\vec{S}}\times\hat{\vec{B}}\right)_y$$
$$\left[\hat{S}_z,\hat{H}\right]=i\hbar\left(\hat{\vec{S}}\times\hat{\vec{B}}\right)_z$$

پس:

$$\left[\hat{\vec{S}},\hat{H}\right]=i\hbar\hat{\vec{S}}\times\hat{\vec{B}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۵-۷

رابطه‌ی زیر را ثابت کنید:

$$\left[\hat{L}_z, \cos\varphi\right] = i\hbar \sin\varphi$$

که در آن φ زاویه‌ی سمتی است.

حل:

برای محاسبه $\left[\hat{L}_z, \cos\phi\right]$، اثر آن را روی تابع موج خوشرفتار $\psi(r,\theta,\phi)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\left[\hat{L}_z, \cos\phi\right]\psi(r,\theta,\phi) = \hat{L}_z\left(\cos\phi\,\psi(r,\theta,\phi)\right) - \cos\phi\left(\hat{L}_z\psi(r,\theta,\phi)\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\,\psi(r,\theta,\phi) - \cos\phi\,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[-\sin\phi\,\psi(r,\theta,\phi) + \cos\phi\,\frac{\partial\psi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi} - \cos\phi\,\frac{\partial\psi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right]$$

$$= \frac{-\hbar}{i}\sin\phi\,\psi(r,\theta,\phi)$$

پس:

$$\left\{\left[\hat{L}_z, \cos\phi\right] - i\hbar\sin\phi\right\}\psi(r,\theta,\phi) = 0$$

چون $\psi(r,\theta,\phi)$ کاملاً دلخواه است، پس:

$$\left[\hat{L}_z, \cos\phi\right] - i\hbar\sin\phi = 0$$

یا:

$$\left[\hat{L}_z, \cos\phi\right] = i\hbar\sin\phi$$

تمرین ۵-۸

رابطه‌ی زیر را ثابت کنید:

$$\left[\hat{L}_z, \sin(2\varphi)\right] = 2i\hbar\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)$$

که در آن φ زاویه‌ی سمتی است. (*راهنمایی:* $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C}$)

حل:

مانند تمرین قبل عمل می‌کنیم:

$$\left[\hat{L}_z, \sin(2\phi)\right]\psi(r,\theta,\phi) = L_z\left(\sin(2\phi)\,\psi(r,\theta,\phi)\right) - \sin 2\phi\left(L_z\psi(r,\theta,\phi)\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\sin(2\phi)\,\psi(r,\theta,\phi)\right] - \sin(2\phi)\,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{\hbar}{i}\left[۲\cos\left(۲\phi\right)\psi\left(r,\theta,\phi\right) + \sin\left(۲\phi\right)\frac{\partial\psi\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial\phi} - \sin\left(۲\phi\right)\frac{\partial\psi\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial\phi}\right]$$

$$= -۲i\hbar\cos\left(۲\phi\right)\psi\left(r,\theta,\phi\right) = ۲i\hbar\left(\sin^{۲}\phi - \cos^{۲}\phi\right)\psi\left(r,\theta,\phi\right)$$

پس:

$$\left[\hat{L}_z, \sin\left(۲\phi\right)\right] = ۲i\hbar\left(\sin^{۲}\phi - \cos^{۲}\phi\right)$$

تمرین ۵-۹

با استفاده از ویژگی‌های $\hat{J}_+$ و $\hat{J}_-$، $|j,\pm j\rangle$ و $|j,\pm m\rangle$ را به‌صورت تابعی از اثر $\hat{J}_\pm$ به‌ترتیب روی حالت‌های $|j,\pm m\rangle$ و $|j,\pm j\rangle$ محاسبه کنید.

حل:

می‌دانیم:

$$J_+\left|j,m\right\rangle = \hbar\sqrt{\left(j-m\right)\left(j+m+۱\right)}\left|j,m+۱\right\rangle = \hbar\sqrt{\frac{\left(j-m\right)!\left(j+m+۱\right)!}{\left(j-m-۱\right)!\left(j+m\right)!}}\left|j,m+۱\right\rangle$$

پس:

$$J_+^{۲}\left|j,m\right\rangle = \hbar\sqrt{\frac{\left(j-m\right)!\left(j+m+۱\right)!}{\left(j-m-۱\right)!\left(j+m\right)!}}\hbar\sqrt{\frac{\left(j-m-۱\right)!\left(j+m+۲\right)!}{\left(j-m-۲\right)!\left(j+m+۱\right)!}}\left|j,m+۲\right\rangle$$

$$= \hbar^{۲}\sqrt{\frac{\left(j-m\right)!\left(j+m+۲\right)!}{\left(j+m\right)!\left(j-m-۲\right)!}}\left|j,m+۲\right\rangle$$

$$J_+^{۳}\left|j,m\right\rangle = \hbar^{۳}\sqrt{\frac{\left(j-m\right)!\left(j+m+۲\right)!}{\left(j+m\right)!\left(j-m-۲\right)!}\frac{\left(j-m-۲\right)!\left(j+m+۳\right)!}{\left(j-m-۳\right)!\left(j+m+۲\right)!}}\left|j,m+۳\right\rangle$$

$$= \hbar^{۳}\sqrt{\frac{\left(j-m\right)!\left(j+m+۳\right)!}{\left(j+m\right)!\left(j-m-۳\right)!}}\left|j,m+۳\right\rangle$$

$$J_+^{N}\left|j,m\right\rangle = \hbar^{N}\sqrt{\frac{\left(j-m\right)!\left(j+m+N\right)!}{\left(j+m\right)!\left(j-m-N\right)!}}\left|j,m+N\right\rangle \qquad *$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$J_+^{j-m}\left|j,m\right\rangle=\hbar^{j-m}\sqrt{\frac{(j-m)!(j+m+j-m)!}{(j+m)!(j-m-j+m)!}}\left|j,m+j-m\right\rangle$$
$$=\hbar^{j-m}\sqrt{\frac{(j-m)!(۲j)!}{(j+m)!}}\left|j,j\right\rangle$$

پس:

$$\left|j,j\right\rangle=\hbar^{m-j}\sqrt{\frac{(j+m)!}{(۲j)!(j-m)!}}\;J_+^{j-m}\left|j,m\right\rangle$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$J_-\left|j,m\right\rangle=\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+۱)}\left|j,m-۱\right\rangle=\hbar\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m+۱)!}{(j-m)!(j+m-۱)!}}\left|j,m-۱\right\rangle$$

$$J_-^۲\left|j,m\right\rangle=\hbar^۲\sqrt{\frac{(j-m+۱)!(j+m)!}{(j-m)!(j+m-۱)!}\frac{(j-m+۲)!(j+m-۱)!}{(j-m+۱)!(j+m-۲)!}}\left|j,m-۲\right\rangle$$
$$=\hbar^۲\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m+۲)!}{(j-m)!(j+m-۲)!}}\left|j,m-۲\right\rangle$$

$$J_-^۳\left|j,m\right\rangle=\hbar^۳\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m+۲)!}{(j-m)!(j+m-۲)!}\frac{(j+m-۲)!(j-m+۳)!}{(j-m+۲)!(j+m-۳)!}}\left|j,m-۳\right\rangle$$

$$=\hbar^۳\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m+۳)!}{(j-m)!(j+m-۳)!}}\left|j,m-۳\right\rangle$$

$$J_-^N\left|j,m\right\rangle=\hbar^N\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m+N)!}{(j-m)!(j+m-N)!}}\left|j,m-N\right\rangle\qquad **$$

$$J_-^{j+m}\left|j,m\right\rangle=\hbar^{j+m}\sqrt{\frac{(j+m)!}{(j-m)!}\frac{(j-m+j+m)!}{(j+m-j-m)!}}\left|j,m-j-m\right\rangle$$

$$=\hbar^{j+m}\sqrt{\frac{(۲j)!(j+m)!}{(j-m)!}}\left|j,-j\right\rangle$$

پس:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left|j,-j\right\rangle=\hbar^{-j-m}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(2j)!(j+m)!}}J_-^{j+m}\left|j,m\right\rangle$$

از رابطه‌ی * داریم:

$$J_+^{j\pm m}\left|j,-j\right\rangle=\hbar^{j\pm m}\sqrt{\frac{(j+j)!(j-j+j\pm m)!}{(j-j)!(j+j-j\mp m)!}}\left|j,-j+j\pm m\right\rangle$$

$$=\hbar^{j\pm m}\sqrt{\frac{(2j)!(j\pm m)!}{(j\mp m)!}}\left|j,\pm m\right\rangle$$

پس:

$$\left|j,\pm m\right\rangle=\hbar^{-j\mp m}\sqrt{\frac{(j\mp m)!}{(2j)!(j\pm m)!}}J_+^{j\pm m}\left|j,-j\right\rangle$$

از رابطه‌ی ** نیز داریم:

$$J_-^{j\mp m}\left|j,+j\right\rangle=\hbar^{j\mp m}\sqrt{\frac{(j+j)!(j-j+j\mp m)!}{(j-j)!(j+j-j\pm m)!}}\left|j,j-j\pm m\right\rangle=\hbar^{j\mp m}\sqrt{\frac{(2j)!(j\mp m)!}{(j\pm m)!}}\left|j,\pm m\right\rangle$$

پس:

$$\left|j,\pm m\right\rangle=\hbar^{-j\pm m}\sqrt{\frac{(j\pm m)!}{(2j)!(j\mp m)!}}J^{j\mp m}\left|j,j\right\rangle$$

تمرین ۵-۱۰

عملگر $\hat{A}=\frac{1}{2}\left(\hat{J}_x\hat{J}_y+\hat{J}_y\hat{J}_x\right)$ را درنظر بگیرید.

(آ) مقدار چشم‌داشتی $\hat{A}$ و $\hat{A}^2$ را برحسب حالت $\left|j,m\right\rangle$ محاسبه کنید.

(ب) نتیجه‌ی (آ) را برای یافتن عبارت مربوط به $\hat{A}^2$ برحسب $\hat{J}^4$، $\hat{J}^2$، $\hat{J}_z^2$، $\hat{J}_+^4$ و $\hat{J}_-^4$ به‌کار ببرید.

حل:

(آ)

از تعریف داریم:

$$\left\langle\hat{A}\right\rangle=\left\langle j,m\left|\hat{A}\right|j,m\right\rangle=\left\langle j,m\left|\frac{1}{2}\left(\hat{J}_x\hat{J}_y+\hat{J}_y\hat{J}_x\right)\right|j,m\right\rangle$$

از رابطه‌ی ۵-۵۷ و ۵-۵۸ داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{J}_x\left|j,m\right\rangle=\frac{\hbar}{۲}\left[\sqrt{(j-m)(j+m+۱)}\left|j,m+۱\right\rangle+\sqrt{(j+m)(j-m+۱)}\left|j,m-۱\right\rangle\right]$$

$$J_y\left|j,m\right\rangle=\frac{\hbar}{۲i}\left[\sqrt{(j-m)(j+m+۱)}\left|j,m+۱\right\rangle-\sqrt{(j+m)(j-m+۱)}\left|j,m-۱\right\rangle\right]$$

از روابط اول نتیجه می‌شود که:

$$\left\langle j,m\right|J_x=\frac{\hbar}{۲}\left[\sqrt{(j-m)(j+m+۱)}\left\langle j,m+۱\right|+\sqrt{(j+m)(j-m+۱)}\left\langle j,m-۱\right|\right]$$

از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\left\langle j,m\right|J_xJ_y\left|j,m\right\rangle=\frac{\hbar^۲}{۴i}\left[(j-m)(j+m+۱)-(j+m)(j-m+۱)\right]$$

پس:

$$\left\langle j,m\right|J_yJ_x\left|j,m\right\rangle=\frac{\hbar^۲}{-۴i}\left[(j-m)(j+m+۱)-(j+m)(j-m+۱)\right]$$

پس:

$$\left\langle\hat{A}\right\rangle=\frac{۱}{۲}\left\langle j,m\right|\hat{J}_x\hat{J}_y+\hat{J}_y\hat{J}_x\left|j,m\right\rangle=۰$$

اما:

$$\left\langle\hat{A}^۲\right\rangle=\left\langle j,m\right|\hat{A}^۲\left|j,m\right\rangle$$

$$J_yJ_x\left|j,m\right\rangle=\frac{\hbar}{۲}\left[\sqrt{(j-m)(j+m+۱)}J_y\left|j,m+۱\right\rangle+\sqrt{(j+m)(j-m+۱)}J_y\left|j,m-۱\right\rangle\right]$$

$$=\frac{\hbar}{۲}\frac{\hbar}{۲i}\left\{\sqrt{(j-m)(j+m+۱)}\left[\sqrt{(j-m-۱)(j+m+۲)}\left|j,m+۲\right\rangle\right.\right.$$

$$\left.-\sqrt{(j+m+۱)(j-m)}\left|j,m\right\rangle\right]+\sqrt{(j+m)(j-m+۱)}$$

$$\left.\times\left[\sqrt{(j-m+۱)(j+m)}\left|j,m\right\rangle-\sqrt{(j+m-۱)(j-m+۲)}\left|j,m-۲\right\rangle\right]\right\}$$

$$=\frac{\hbar^۲}{۴i}\left[\sqrt{(j-m-۱)(j-m)(j+m+۱)(j+m+۲)}\left|j,m+۲\right\rangle+۲m\left|j,m\right\rangle\right.$$

$$\left.-\sqrt{(j+m)(j-m+۱)(j+m-۱)(j-m+۲)}\left|j,m-۲\right\rangle\right]$$

اما با توجه به $\left[J_x,J_y\right]=i\hbar J_z$ داریم:

$$\hat{A}=\frac{\hat{J}_y\hat{J}_x+i\hbar\hat{J}_z+\hat{J}_y\hat{J}_x}{۲}=\hat{J}_y\hat{J}_x+\frac{i\hbar}{۲}\hat{J}_z$$

$$\hat{A}=\left|j,m\right\rangle=\frac{\hbar^۲}{۴i}\left[\sqrt{(j-m-۱)(j-m)(j+m+۱)(j+m+۲)}\left|j,m+۲\right\rangle\right.$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$-\sqrt{(j+m)(j-m+1)(j+m-1)(j-m+2)}\,|j,m-2\rangle\Big]$$

$$\langle j,m|\hat{A}=\frac{\hbar^2}{-4i}\Big[\sqrt{(j-m-1)(j-m)(j+m+1)(j+m+2)}\,\langle j,m+2|$$
$$-\sqrt{(j+m)(j-m+1)(j+m-1)(j-m+2)}\,\langle j,m-2|\Big]$$

پس:

$$\langle\hat{A}^2\rangle=\frac{\hbar^4}{16}[(j-m-1)(j-m)(j+m+1)(j+m+2)+(j+m)(j-m+1)(j+m-1)(j-m+2)]$$
$$=\frac{\hbar^4}{16}\Big[\big(j^2-2mj+m^2-j+m\big)\big(j^2+2mj+m^2+3j+3m+2\big)$$
$$+\big(j^2+2mj+m^2-j-m\big)\big(j^2-2mj+m^2+3j-3m+2\big)\Big]$$
$$=\frac{\hbar^4}{16}\Big[j^4+2mj^3+m^2j^2+3j^3+3mj^2+2j^2-2mj^3-4m^2j^2-2m^3j-6mj^2-6m^2j$$
$$-4mj+m^2j^2+2m^3j+m^4+3m^2j+3m^3+2m^2-j^3-2mj^2-m^2j-3j^2-3mj$$
$$-2j+mj^2+2m^2j+m^3+3mj+3m^2+2m+j^4-2mj^3+m^2j^2+3j^3-3mj^2+2j^2$$
$$c+2mj^3-4m^2j^2+2m^3j+6mj^2-6m^2j+4mj+m^2j^2-2m^3j+m^4+3m^2j-3m^3$$
$$+2m^2-j^3+2mj^2-m^2j-3j^2+3mj-2j-mj^2+2m^2j-m^3-3mj+3m^2-2m\Big]$$
$$=\frac{2\hbar^4}{16}\Big(j^4+m^2j^2+3j^3+2j^2-4m^2j^2-6m^2j+m^2j^2+m^4+3m^2j+2m^2-j^3-m^2j$$
$$-3j^2-2j+2m^2j+3m^2\Big)=\frac{\hbar^4}{8}\Big(j^4-2m^2j^2+2j^3-j^2-2m^2j+m^4+5m^2-2j\Big)$$

تمرین ۵-۱۱

تابع موج زیر را درنظر بگیرید:

$$\psi(\theta,\varphi)=3\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}-2\big(1-\cos^2\theta\big)e^{2i\varphi}$$

(آ) $\psi(\theta,\varphi)$ را برحسب هماهنگ‌های کروی بنویسید.

(ب) عبارت به‌دست‌آمده در (آ) را برحسب مختصات دکارتی بنویسید.

(پ) آیا $\psi(\theta,\varphi)$ ویژه حالتی از $\hat{L}^2$ یا $\hat{L}_z$ است؟

(ت) احتمال اندازه‌گیری $2\hbar$ برای مؤلفه‌ی z اندازه حرکت زاویه‌ای مداری را بیابید.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

با توجه به اینکه:

$$Y_{۲,۱}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{۱۵}{۸\pi}}\,e^{i\varphi}\sin\theta\cos\theta \qquad ,\ Y_{۲,۲}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{۱۵}{۳۲\pi}}\,e^{۲i\varphi}\sin^{۲}\theta$$

پس:

$$\psi(\theta,\varphi)=-۳\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\,Y_{۲,۱}(\theta,\varphi)-۲\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\,Y_{۲,۲}(\theta,\varphi)$$

(ب)

برحسب مختصات کارتزین داریم:

$$\psi(x,y,z)=\frac{۳(x+iy)}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}+\frac{۲\left(x^{۲}-y^{۲}\pm ۲ixy\right)}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$$

(پ)

اثر $\hat{L}^{۲}$ را بر روی $\psi(\theta,\varphi)$ می‌یابیم:

$$\hat{L}^{۲}\psi(\theta,\varphi)=-۳\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\,\hat{L}^{۲}Y_{۲,۱}(\theta,\varphi)-۲\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\,\hat{L}^{۲}Y_{۲,۲}(\theta,\varphi)=۶\hbar^{۲}\psi(\theta,\varphi)$$

پس $\psi(\theta,\varphi)$ ویژه حالت $\hat{L}^{۲}$ است با ویژه مقدار $۶\hbar^{۲}$.

حال اثر $\hat{L}_z$ بر روی $\psi(\theta,\varphi)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}L_z\psi(\theta,\varphi)&=-۳\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\,\hat{L}_zY_{۲,۱}(\theta,\varphi)-۲\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\,\hat{L}_zY_{۲,۲}(\theta,\varphi)\\&=-۳\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\hbar\,Y_{۲,۱}(\theta,\varphi)-۲\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}(۲\hbar)Y_{۲,۲}(\theta,\varphi)\end{aligned}$$

پس $\psi(\theta,\varphi)$ ویژه حالت $\hat{L}_z$ نیست.

(ت)

با توجه به اینکه $\psi(\theta,\varphi)$ بهنجار نیست، پس احتمال مطلوب عبارت است از:

$$P_{m=۲}=\frac{\left(-۲\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\right)^{۲}}{\left(-۳\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\right)^{۲}+\left(-۲\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\right)^{۲}}=\frac{\frac{۴\times۳۲\pi}{۱۵}}{۹\times\frac{۸\pi}{۱۵}+۴\times\frac{۳۲\pi}{۱۵}}=۰/۶۴$$

تمرین ۵-۱۲

نشان دهید که $\hat{L}_z\left(\cos^{۲}\varphi-\sin^{۲}\varphi+۲i\sin\varphi\cos\varphi\right)=۲\hbar e^{۲i\varphi}$، که در آن φ زاویه‌ی سمتی است.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

$$\hat{L}_z\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi\right)=\hat{L}_z\left(\cos(2\varphi)+i\sin(2\varphi)\right)=L_z\left(e^{2i\varphi}\right)=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{2i\varphi}\right)$$
$$=2\hbar e^{2i\varphi}$$

تمرین ۵-۱۳

عبارت‌هایی برای هماهنگ‌های کروی

$$Y_{2,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{7/16\pi}\left(5\cos^2\theta-3\cos\theta\right)\quad\text{و}\quad Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{21/64\pi}\,\sin\theta\left(5\cos^2\theta-1\right)e^{\pm i\varphi}$$

برحسب مختصات دکارتی x، y و z بیابید.

حل:

با توجه به اینکه:

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$$

داریم:

$$Y_{2,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\left(\frac{5z^2}{r^2}-\frac{3z}{r}\right)=\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\frac{z}{r}\frac{5z^2-3r^2}{r^2}$$

$$Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\,\sin\theta\left(\cos\varphi\pm i\sin\varphi\right)\left(5\cos^2\theta-1\right)=\mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\left(\frac{x}{r}\pm i\frac{y}{r}\right)\left(\frac{5z^2}{r^2}-1\right)$$
$$=\mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\frac{\left(x\pm iy\right)\left(5z^2-r^2\right)}{r^3}$$

تمرین ۵-۱۴

(آ) نشان دهید که مقادیر چشمداشتی پی‌آیند، میان حالت‌های $|l\ m\rangle$، روابط $\langle\hat{L}_x\rangle=\langle\hat{L}_y\rangle=0$ و $\langle\hat{L}_x^2\rangle=\langle\hat{L}_y^2\rangle=\frac{1}{2}\left[l(l+1)\hbar^2-m^2\hbar^2\right]$ را برآورده می‌کنند.

(ب) نامساوی $\Delta L_x\Delta L_y\geq\hbar^2m/2$ را ثابت کنید که در آن $\Delta L_x=\sqrt{\langle L_x^2\rangle-\langle L_x\rangle^2}$.

حل:

(آ)

$$\langle\hat{L}_x\rangle=\langle l,m|\hat{L}_x|l,m\rangle=\left\langle l,m\left|\frac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right)\right|l,m\right\rangle=\frac{1}{2}\left[\langle l,m|\hat{L}_+|l,m\rangle+\langle l,m|\hat{L}_-|l,m\rangle\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{2} C^{+}_{lm} \langle l,m | l,m+1 \rangle + \frac{1}{2} C^{-}_{lm} \langle l,m | l,m-1 \rangle = 0$$

$$\langle \hat{L}_y \rangle = \langle l,m | \hat{L}_y | l,m \rangle = \left\langle l,m \left| \frac{1}{2i} (\hat{L}_+ - \hat{L}_-) \right| l,m \right\rangle = 0$$

اما از آنجا که جهت x و y هیچ ارجحیتی برهم ندارند، می‌توان گفت:

$$\langle \hat{L}_x^2 \rangle = \langle \hat{L}_y^2 \rangle$$

پس:

$$\langle L^2 \rangle = \langle l,m | L^2 | l,m \rangle = l(l+1)\hbar^2 = \langle l,m | \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 | l,m \rangle = 2\langle \hat{L}_x^2 \rangle + m^2\hbar^2$$

پس:

$$\langle \hat{L}_x^2 \rangle = \langle \hat{L}_y^2 \rangle = \frac{1}{2}\left[l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 \right]$$

(ب)

$$\Delta L_x = \sqrt{\langle L_x^2 \rangle - \langle L_x \rangle^2} = \sqrt{\langle L_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar \right]} = \Delta L_y$$

پس:

$$\Delta L_x \Delta L_y = (\Delta L_x)^2 = \frac{1}{2}\left[l(l+1) - m^2 \right]\hbar^2 \geq \frac{1}{2}\left[m(m+1) - m^2 \right]\hbar^2 = \frac{\hbar^2 m}{2}$$

Quark

تمرین ۵-۱۵

ذره‌ای به جرم m در انتهای یک میله‌ی صلب به‌طول R و جرم ناچیز ثابت شده‌است. انتهای دیگر میله در صفحه‌ی xy حول یک تکیه‌گاه واقع در مبدأ می‌چرخد که محور آن در جهت x است.

(آ) انرژی کل سیستم را برحسب اندازه حرکت زاویه‌ای L آن بنویسید.

(ب) معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان سیستم را بنویسید. (*راهنمایی*: در مختصات کروی، تنها φ تغییر می‌کند).

(پ) مسأله را برای ترازهای انرژی ممکن سیستم برحسب m و گشتاور لختی $I = mR^2$ حل کنید.

(ت) توضیح دهید چرا انرژی نقطه‌ای صفر وجود ندارد.

حل:

هامیلتونی این سیستم عبارت است از:

$$\hat{H} = \frac{L_z^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

معادله‌ی ویژه مقداری به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{-\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi)=E\psi(\varphi)$$

یا:

$$\frac{d^2\psi(\varphi)}{d\varphi^2}+\frac{2IE}{\hbar^2}\psi(\varphi)=0$$

با تعریف $k=\sqrt{\frac{2IE}{\hbar^2}}$ داریم:

$$\psi(\varphi)=e^{\pm ik\varphi}$$

چون تحت تبدیل $\varphi\to\varphi+2\pi$؛ $\psi(\varphi)$ نباید تغییر کند نتیجه می‌شود که k باید عدد صحیح باشد.

در نتیجه:

$$E_m=\frac{m^2\hbar^2}{2I}\quad,\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

از آنجا که حالت با انرژی صفر یک حالت فیزیکی قابل قبول است (این حالت معادل است با مـوردی که ذره بر روی محور zها قرار دارد) لذا انرژی نقطه‌ی صفر وجود ندارد.

تمرین ۵-۱۶

سیستمی را درنظر بگیرید که با حالت

$$\psi(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{8}}Y_{11}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{1}{8}}Y_{10}(\theta,\varphi)+A\,Y_{1-1}(\theta,\varphi)$$

توصیف می‌شود و در آن A یک ثابت حقیقی است.

(آ) A را طوری محاسبه کنید که $|\psi\rangle$ بهنجار باشد.

(ب) $\hat{L}_+\psi(\theta,\varphi)$ را بیابید.

(پ) مقادیر چشمداشتی $\hat{L}_x$ و $\hat{L}^2$ را در حالت $|\psi\rangle$ حساب کنید.

(ت) احتمال مربوط به اندازه‌گیری مقدار صفر برای مؤلفه‌ی z اندازه حرکت زاویه‌ای را بیابید.

(ث) $\langle\Phi|\hat{L}_z|\psi\rangle$ و $\langle\Phi|\hat{L}_-|\psi\rangle$ را محاسبه کنید که در آن

$$\Phi(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{8}{15}}Y_{21}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{4}{15}}Y_{10}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{3}{15}}Y_{2-1}(\theta,\varphi)$$

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

شرط بهنجارش $|\psi\rangle$ آن است که:

$$\langle\psi|\psi\rangle = ۱$$

پس:

$$\left(\sqrt{\frac{۳}{۸}}\right)^۲ + \left(\sqrt{\frac{۱}{۸}}\right)^۲ + |A|^۲ = ۱$$

لذا با فرض حقیقی و مثبت بودن A داریم:

$$A = \sqrt{\frac{۴}{۸}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(ب)

$$\begin{aligned}\hat{L}_+\psi(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{۳}{۸}}\hat{L}_+ Y_{۱۱}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{۱}{۸}}\hat{L}_+ Y_{۱۰}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{۴}{۸}}\hat{L}_+ Y_{۱-۱}(\theta,\varphi)\\ &= ۰ + \sqrt{\frac{۱}{۸}}\hbar\sqrt{(۱-۰)(۱+۰+۱)}Y_{۱۱}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{۴}{۸}}\hbar\sqrt{(۱+۱)(۱-۱+۱)}Y_{۱۰}\\ &= \hbar\left(\frac{۱}{۲}Y_{۱۱}(\theta,\varphi) + Y_{۱۰}(\theta,\varphi)\right)\end{aligned}$$

(پ)

$$\hat{\vec{L}}^۲ = \left\langle\psi\left|\hat{\vec{L}}^۲\right|\psi\right\rangle = \left\langle\psi\left|۲\hbar^۲\right|\psi\right\rangle = ۲\hbar^۲\langle\psi|\psi\rangle = ۲\hbar^۲$$

$$\left\langle\hat{L}_x\right\rangle = \left\langle\frac{۱}{۲}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right)\right\rangle = \frac{۱}{۲}\left[\langle\psi|L_+|\psi\rangle + \langle\psi|L_-|\psi\rangle\right] = \frac{۱}{۲}\left[\langle\psi|L_+|\psi\rangle + \langle\psi|L_+|\psi\rangle^*\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left(\langle\psi|L_+|\psi\rangle\right) = \hbar\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۸}} + \sqrt{\frac{۱}{۸}}\right)$$

(ت)

$$P_{m=۰} = \left(\sqrt{\frac{۱}{۸}}\right)^۲ = \frac{۱}{۸}$$

(ث)

$$L_z|\psi\rangle = \sqrt{\frac{۳}{۸}}L_z|۱,۱\rangle + \sqrt{\frac{۱}{۸}}L_z|۱,۰\rangle + \sqrt{\frac{۴}{۸}}L_z|۱,-۱\rangle$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \sqrt{\frac{۳}{۸}}\hbar\left|۱,۱\right\rangle + \sqrt{\frac{۱}{۸}}\cdot\hbar\left|۱,۰\right\rangle + \sqrt{\frac{۴}{۸}}\left(-\hbar\right)\left|۱,-۱\right\rangle = \hbar\left(\sqrt{\frac{۳}{۸}}\left|۱,۱\right\rangle - \sqrt{\frac{۴}{۸}}\left|۱,-۱\right\rangle\right)$$

پس:

$$\left\langle\phi\middle|L_z\middle|\psi\right\rangle = \sqrt{\frac{۸}{۱۵}}\hbar\sqrt{\frac{۳}{۸}} = \frac{\hbar}{\sqrt{۵}} = \frac{\hbar\sqrt{۵}}{۵}$$

$$L_-\left|\psi\right\rangle = \sqrt{\frac{۳}{۸}}L_-\left|۱,۱\right\rangle + \sqrt{\frac{۱}{۸}}L_-\left|۱,۰\right\rangle + \sqrt{\frac{۴}{۸}}L_-\left|۱,-۱\right\rangle = \sqrt{\frac{۳}{۸}}C^-_{۱,۱}\left|۱,۰\right\rangle + \sqrt{\frac{۱}{۸}}C^-_{۱,۰}\left|۱,-۱\right\rangle$$

$$\left\langle\phi\middle|L_-\middle|\psi\right\rangle = \sqrt{\frac{۴}{۱۵}}\sqrt{\frac{۳}{۸}}C^-_{۱,۱} = \sqrt{\frac{۱}{۱۰}}\hbar\sqrt{۱(۱+۱)-۱(۱-۱)} = \hbar\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

تمرین ۵-۱۷

(آ) با استفاده از روابط جابه‌جایی اندازه حرکت زاویه‌ای، اعتبار اتحاد (ژاکوبی) را نشان دهید:

$$\left[\hat{J}_x,\left[\hat{J}_y,\hat{J}_z\right]\right]+\left[\hat{J}_y,\left[\hat{J}_z,J_x\right]\right]+\left[\hat{J}_z,\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right]\right]=۰.$$

(ب) اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\left[\hat{J}_x^۲,\hat{J}_y^۲\right]=\left[\hat{J}_y^۲,\hat{J}_z^۲\right]=\left[\hat{J}_z^۲,\hat{J}_x^۲\right]$$

(پ) عبارت‌های $\hat{L}_-\hat{L}_+Y_{lm}(\theta,\varphi)$ و $\hat{L}_+\hat{L}_-Y_{lm}(\theta,\varphi)$ را محاسبه کنید و سپس جابه‌جاگر $\left[\hat{L}_+\hat{L}_-,\hat{L}_-\hat{L}_+\right]Y_{lm}(\theta,\varphi)$ را نتیجه بگیرید.

حل:

(آ)

از رابطه‌ی $\left[\hat{J}_i,\hat{J}_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$ استفاده می‌کنیم:

$$\left[\hat{J}_x,\left[\hat{J}_y,\hat{J}_z\right]\right]+\left[\hat{J}_y,\left[\hat{J}_z,\hat{J}_x\right]\right]+\left[\hat{J}_z,\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right]\right]=\left[\hat{J}_x,i\hbar\hat{J}_x\right]+\left[\hat{J}_y,i\hbar\hat{J}_y\right]+\left[\hat{J}_z,i\hbar\hat{J}_z\right]$$

$$= i\hbar\left[\hat{J}_x,\hat{J}_x\right]+i\hbar\left[\hat{J}_y,\hat{J}_y\right]+i\hbar\left[\hat{J}_z,\hat{J}_z\right]=۰$$

(ب)

می‌دانیم که:

$$\left[\hat{J}_i^۲,\hat{J}^۲\right]=۰$$

پس:

$$۰=\left[\hat{J}_i^۲,\hat{J}_i^۲+\hat{J}_j^۲+\hat{J}_k^۲\right]=\left[\hat{J}_i^۲,\hat{J}_j^۲\right]+\left[\hat{J}_i^۲,J_k^۲\right]$$

در نتیجه:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left[\hat{J}_i^2, \hat{J}_j^2\right] = \left[\hat{J}_k^2, \hat{J}_i^2\right]$$

یا به عبارتی:

$$\left[\hat{J}_x^2, \hat{J}_y^2\right] = \left[\hat{J}_z^2, \hat{J}_x^2\right] = \left[\hat{J}_y^2, \hat{J}_z^2\right]$$

(پ)

از روابط ۵-۲۹ و ۵-۳۰ داریم:

$$\hat{L}_+\hat{L}_- Y_{lm}(\theta,\varphi) = \left(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) = \left(l(l+1) - m^2 + m\right)\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\hat{L}_-\hat{L}_+ Y_{lm}(\theta,\varphi) = \left(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) = \left(l(l+1) - m^2 - m\right)\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

پس:

$$\begin{aligned}\left[L_+L_-, \hat{L}_-\hat{L}_+\right] Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \hat{L}_+\hat{L}_-\left(\hat{L}_-\hat{L}_+ Y_{lm}(\theta,\varphi)\right) - \hat{L}_-\hat{L}_+\left(\hat{L}_+\hat{L}_- Y_{lm}(\theta,\varphi)\right)\\ &= \hat{L}_+\hat{L}_-\left[\left(l(l+1) - m^2 - m\right)\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi)\right.\\ &\quad \left. - \hat{L}_-\hat{L}_+\left[\left(l(l+1) - m^2 + m\right)\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi)\right]\right.\\ &= \hbar^4\left\{\left[l(l+1) - m^2 - m\right]\left[l(l+1) - m^2 + m\right]\right.\\ &\quad \left. - \left[l(l+1) - m^2 + m\right]\left[l(l+1) - m^2 - m\right]\right\} Y_{lm}(\theta,\varphi) = 0\end{aligned}$$

تمرین ۵-۱۸

ذره‌ای را درنظر بگیرید که تابع موج آن عبارت است از:

$$\psi(x,y,z) = A\left[(x+z)y + z^2\right]/r^2 - A/3$$

و در آن A یک ثابت است.

(آ) آیا ψ ویژه حالتی از $\hat{L}^2$ است؟ اگر بله، ویژه مقدار متناظر چیست؟ آیا ψ ویژه حالت $\hat{L}_z$ نیز هست؟

(ب) ثابت A را طوری بیابید که ψ بهنجار باشد.

(پ) احتمال‌های مربوط به اندازه‌گیری مقدارهای گوناگون $\hat{L}_z$ و $\hat{L}^2$ را بیابید و سپس مقدار چشم‌داشتی $\hat{L}_z$ و $\hat{L}^2$ را محاسبه کنید.

(ت) $\hat{L}_\pm|\psi\rangle$ را محاسبه کنید و آن‌گاه $\langle\psi|\hat{L}_\pm|\psi\rangle$ را نتیجه بگیرید.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

$\psi(x,y,z)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\psi(x,y,z)=A\left(\frac{xy}{r^{۲}}+\frac{zy}{r^{۲}}+\frac{۳z^{۲}-r^{۲}}{۳r^{۲}}\right)$$

با توجه به جدول ۵-۲ داریم:

$$\frac{xy}{r^{۲}}=\frac{۱}{۴i}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\left(Y_{۲۲}-Y_{۲-۲}\right)\ ,\ \frac{yz}{r^{۲}}=\frac{-۱}{۲i}\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\left(Y_{۲۱}+Y_{۲-۱}\right)\ ,\ \frac{۳z^{۲}-r^{۲}}{r^{۲}}=\sqrt{\frac{۱۶\pi}{۵}}Y_{۲۰}$$

پس:

$$\psi(\theta,\varphi)=A\left[\frac{۱}{۴i}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\left(Y_{۲۲}-Y_{۲-۲}\right)-\frac{۱}{۳i}\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\left(Y_{۲۱}+Y_{۲-۱}\right)+\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱۶\pi}{۵}}Y_{۲,۰}\right]$$

لذا ψ ویژهٔ تابع $\hat{L}^{۲}$ است، زیرا:

$$\hat{L}^{۲}\psi(\theta,\varphi)=۲(۲+۱)\hbar^{۲}\psi(\theta,\varphi)=۶\hbar^{۲}\psi(\theta,\varphi)$$

و ویژه مقدار مربوطه $۶\hbar^{۲}$ می‌باشد. اما ψ ویژه تابع $\hat{L}_z$ نیست، زیرا:

$$\hat{L}_z\psi(\theta,\varphi)=A\left[\frac{۱}{۴i}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\left(۲\hbar Y_{۲۲}-(-۲\hbar)Y_{۲-۲}\right)-\frac{۱}{۳i}\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\left(\hbar Y_{۲۱}-\hbar Y_{۲-۱}\right)+\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱۶\pi}{۱۵}}(۰\hbar)Y_{۲۰}\right]$$

$$=A\hbar\frac{۱}{۲i}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\left(Y_{۲۲}+Y_{۲-۲}\right)$$

(ب)

شرط بهنجارش آنست که:

$$\langle\psi|\psi\rangle=۱$$

چون $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ها راست هنجار هستند، پس داریم:

$$۱=|A|^{۲}\left[\left|\frac{۱}{۴i}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\right|^{۲}+\left|\frac{-۱}{۴i}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\right|^{۲}+\left|\frac{-۱}{۳i}\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\right|^{۲}+\left|\frac{-۱}{۳i}\sqrt{\frac{۸\pi}{۱۵}}\right|^{۲}+\left|\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱۶\pi}{۱۵}}\right|^{۲}\right]$$

$$=|A|^{۲}\left(\frac{۲}{۱۶}\frac{۳۲\pi}{۱۵}+\frac{۲}{۹}\frac{۸\pi}{۱۵}+\frac{۱}{۹}\frac{۱۶\pi}{۱۵}\right)=\frac{۶۸\pi|A|^{۲}}{۱۳۵}$$

اگر A را حقیقی و مثبت فرض کنیم داریم:

$$A=\left(\frac{۱۳۵}{۶۸\pi}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ)

چون ψ ویژه تابع $\hat{L}^2$ با ویژه مقدار $6\hbar^2$ است لذا در اندازه‌گیری $\hat{L}^2$ فقط مقدار $6\hbar^2$ به‌دست می‌آید و احتمال آن نیز یک است. در اندازه‌گیری L_z یکی از مقادیر $m\hbar$ (که در آن $m=0,\pm1,\pm2$) با احتمالات زیر به‌دست می‌آید:

$$P_0=|A|^2\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{15}}\right)^2=\frac{135}{68\pi}\frac{16\pi}{135}=\frac{4}{17}$$

$$P_{\pm1}=|A|^2\left|\frac{1}{3i}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\right|^2=\frac{135}{68\pi}\frac{8\pi}{135}=\frac{2}{17}$$

$$P_{\pm2}=|A|^2\left|\frac{1}{4i}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\right|^2=\frac{135}{68\pi}\frac{32\pi}{16\times15}=\frac{9}{34}$$

مقدار چشمداشتی $\hat{L}^2$ همان $6\hbar^2$ است و در مورد $\langle\hat{L}_z\rangle$ داریم:

$$\langle\hat{L}_z\rangle=\langle\psi|\hat{L}_z|\psi\rangle=0\times\hbar P_0+\hbar P_1+(-\hbar)P_{-1}+2\hbar P_2+(-2\hbar)P_{-2}$$
$$=0\times\hbar\left(\frac{4}{17}\right)+\hbar\left(\frac{2}{17}\right)-\hbar\left(\frac{2}{17}\right)+2\hbar\left(\frac{9}{34}\right)-2\hbar\left(\frac{9}{34}\right)$$

پس:

$$\langle\hat{L}_z\rangle=0$$

(ت)

ابتدا به محاسبه‌ی $L_\pm|\psi\rangle$ می‌پردازیم. برای این منظور $|\psi\rangle$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle=-i\sqrt{\frac{9}{34}}|2,2\rangle+i\sqrt{\frac{9}{34}}|2,-2\rangle+i\sqrt{\frac{2}{17}}|2,1\rangle+i\sqrt{\frac{2}{17}}|2,-1\rangle+\sqrt{\frac{4}{17}}|2,0\rangle$$

پس با توجه به اینکه:

$$L_\pm|l,m\rangle=\hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\,|l,m\pm1\rangle$$

داریم:

$$L_+|\psi\rangle=+i\sqrt{\frac{9}{34}}\hbar\sqrt{(2+2)(2-2+1)}\,|2,-1\rangle+i\sqrt{\frac{2}{17}}\hbar\sqrt{(2-1)(2+1+1)}\,|2,2\rangle$$
$$+i\sqrt{\frac{2}{17}}\hbar\sqrt{(2+1)(2-1+1)}\,|2,0\rangle+\sqrt{\frac{4}{17}}\hbar\sqrt{(2-0)(2+0+1)}\,|2,1\rangle$$
$$=2i\sqrt{\frac{9}{34}}\hbar|2,-1\rangle+2i\sqrt{\frac{2}{17}}\hbar|2,2\rangle+2i\sqrt{\frac{3}{17}}\hbar|2,0\rangle+2\hbar\sqrt{\frac{6}{17}}|2,1\rangle$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$L_-|\psi\rangle = -i\sqrt{\frac{۹}{۳۴}}\hbar\sqrt{(۲+۲)(۲-۲+۱)}|۲,۱\rangle + i\sqrt{\frac{۲}{۱۷}}\hbar\sqrt{(۲+۱)(۲-۱+۱)}|۲,۰\rangle$$
$$+i\sqrt{\frac{۲}{۱۷}}\hbar\sqrt{(۲-۱)(۲+۱+۱)}|۲,-۲\rangle + \sqrt{\frac{۴}{۱۷}}\hbar\sqrt{(۲+۰)(۲-۰+۱)}|۲,-۱\rangle$$
$$= -۲i\sqrt{\frac{۹}{۳۴}}\hbar|۲,۱\rangle + ۲i\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}\hbar|۲,۰\rangle + ۲i\sqrt{\frac{۲}{۱۷}}\hbar|۲,-۲\rangle + ۲\hbar\sqrt{\frac{۶}{۱۷}}|۲,-۱\rangle$$

پس:

$$\langle\psi|L_+|\psi\rangle = ۲i\sqrt{\frac{۹}{۳۴}}\hbar\left(-i\sqrt{\frac{۲}{۱۷}}\right) + ۲i\sqrt{\frac{۲}{۱۷}}\hbar\left(i\sqrt{\frac{۹}{۳۴}}\right) + ۲i\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}\hbar\sqrt{\frac{۴}{۱۷}} + ۲\hbar\sqrt{\frac{۶}{۱۷}}\left(-i\sqrt{\frac{۲}{۱۷}}\right)$$
$$= \frac{۶\hbar}{۱۷} - \frac{۶\hbar}{۱۷} + \frac{۴i\sqrt{۳}\hbar}{۱۷} - \frac{۴i\sqrt{۳}\hbar}{۱۷} = ۰$$
$$\langle\psi|L_-|\psi\rangle = -۲i\sqrt{\frac{۹}{۳۴}}\hbar\left(-i\sqrt{\frac{۲}{۱۷}}\right) + ۲i\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}\hbar\sqrt{\frac{۴}{۱۷}} + ۲i\sqrt{\frac{۲}{۱۷}}\hbar\left(-i\sqrt{\frac{۹}{۳۴}}\right) + ۲\hbar\sqrt{\frac{۶}{۱۷}}\left(-i\sqrt{\frac{۲}{۱۷}}\right)$$
$$= \frac{-۶\hbar}{۱۷} + \frac{۴i\sqrt{۳}}{۱۷} + \frac{۶\hbar}{۱۷} - \frac{۴i\hbar\sqrt{۳}}{۱۷} = ۰$$

تمرین ۵-۱۹

سیستمی را درنظر بگیرید که در حالت زیر است:

$$\psi(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{۲}{۱۳}}Y_{۲,-۲} + \sqrt{\frac{۳}{۱۳}}Y_{۲,-۲} + \sqrt{\frac{۳}{۱۳}}Y_{۲,۰} + \sqrt{\frac{۳}{۱۳}}Y_{۲,۲} + \sqrt{\frac{۲}{۱۳}}Y_{۲,۲}$$

(آ) اگر $\hat{L}_z$ اندازه‌گیری شود، چه مقدارهایی و با چه احتمال‌هایی به‌دست خواهند آمد؟

(ب) اگر پس از اندازه‌گیری $\hat{L}_z$ مقدار $l_z = ۲\hbar$ را بیابیم، عدم قطعیت‌های ΔL_x و ΔL_y و حاصل‌ضرب آن‌ها $\Delta L_x \Delta L_y$ را بیابید.

(پ) $\langle\psi|\hat{L}_x|\psi\rangle$ و $\langle\psi|\hat{L}_y|\psi\rangle$ را بیابید.

حل:

(آ)

در اندازه‌گیری L_z یکی از مقادیر $m\hbar$ (که در آن $m = ۰, \pm۱, \pm۲$) با احتمالات زیر به‌دست می‌آید:

$$P_۰ = \left(\sqrt{\frac{۳}{۱۳}}\right)^۲ = \frac{۳}{۱۳}$$

$$P_{\pm۲} = \left(\sqrt{\frac{۳}{۱۳}}\right)^۲ = \frac{۳}{۱۳}$$

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$P_{\pm 2} = \left(\sqrt{\frac{2}{13}}\right)^2 = \frac{2}{13}$$

(ب)

چون در اندازه‌گیری L_z مقدار $2\hbar$ به‌دست آمده است لذا حالت سیستم به Y_{22} تغییر خواهد کرد. درنتیجه طبق تمرین ۵-۱۴ خواهیم داشت:

$$\Delta L_x \Delta L_y = \frac{\hbar^2}{2}\left[3(3+1) - 2^2\right] = 4\hbar^2$$

(پ)

ابتدا $\langle\psi|L_\pm|\psi\rangle$ را می‌یابیم.

$$L_\pm\psi = \sqrt{\frac{2}{13}}\hbar\sqrt{(3\pm 3)(3\mp 3+1)}\,Y_{3-3\pm 1} + \sqrt{\frac{3}{13}}\hbar\sqrt{(3\pm 2)(3\mp 2+1)}\,Y_{3-2\pm 1}$$
$$+\sqrt{\frac{3}{13}}\hbar\sqrt{(3\mp 0)(3\pm 0+1)}\,Y_{30\pm 1} + \sqrt{\frac{3}{13}}\hbar\sqrt{(3\mp 2)(3\pm 2+1)}\,Y_{32\pm 1}$$
$$+\sqrt{\frac{2}{13}}\hbar\sqrt{(3\mp 3)(3\pm 3+1)}\,Y_{33\pm 1}$$

پس:

$$\langle\psi|L_+|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{\frac{2}{13}}\hbar\sqrt{6} + \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\hbar\sqrt{6} = \frac{12}{13}\hbar$$
$$\langle\psi|L_-|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}\hbar\sqrt{6} + \sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{\frac{2}{13}}\hbar\sqrt{6} = \frac{12}{13}\hbar$$

پس:

$$\langle\psi|L_x|\psi\rangle = \left\langle\psi\left|\frac{1}{2}(L_+ + L_-)\right|\psi\right\rangle = \frac{2\times\frac{12}{13}\hbar}{2} = \frac{12}{13}\hbar$$
$$\langle\psi|L_y|\psi\rangle = \left\langle\psi\left|\frac{1}{2i}(L_+ - L_-)\right|\psi\right\rangle = 0$$

تمرین ۵-۲۰

(آ) ویژه مقدارهای انرژی یک چرخنده‌ی متقارن حول محور دوران را محاسبه کنید و تبهگنی هر تراز انرژی را بیابید (یعنی برای هر مقدار از عدد کوانتومی سمتی m، پیدا کنید که حالت $|l,m\rangle$ متناظر با همان انرژی وجود دارد). خاطرنشان می‌کنیم که هامیلتونی یک چرخنده‌ی متقارن - محور به‌صورت زیر است:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{H}=\frac{\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2}{2I_1}+\frac{\hat{L}_z^2}{2I_2}$$

که درآن I_1 و I_2 گشتاور *لختی* هستند.

(ب) از قسمت (آ) ویژه مقدارهای انرژی را برای ترازهای گوناگون $l=3$ نتیجه بگیرید.

(پ) در حالت یک چرخنده‌ی صلب (یعنی $I_1=I_2=I$) عبارت انرژی و رابطه‌ی تبهگنی متناظر را بیابید.

(ت) عدد کوانتومی مداری l و تبهگنی انرژی متناظر را برای یک چرخنده‌ی صلب که بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای کل آن $\sqrt{56}\hbar$ است محاسبه کنید.

حل:

(آ)

هامیلتونی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{H}=\frac{\hat{\vec{L}}^2-\hat{L}_z^2}{2I_1}+\frac{\hat{L}_z^2}{2I_2}=\frac{\hat{\vec{L}}^2}{2I_1}+\left(\frac{1}{2I_2}-\frac{1}{2I_1}\right)\hat{L}_z^2=\frac{\hat{\vec{L}}^2}{2I_1}+\frac{I_1-I_2}{2I_1I_2}\hat{L}_z^2$$

پس ویژه حالت‌های هامیلتونی همان ویژه حالت‌های همزمان $\hat{\vec{L}}^2$ و $\hat{L}_z$ یعنی $|l,m\rangle$ ها هستند. پس:

$$E_{l,m}=\frac{l(l+1)\hbar^2}{2I_1}+\frac{I_1-I_2}{2I_1I_2}m^2\hbar^2$$

واضح است که به ازای هر مقدار m برای یک l مشخص، حالت‌های $|l,\pm m\rangle$ دارای انرژی یکسانی بوده و تبهگن هستند.

(ب)

می‌دانیم که به ازای $l=3$، m مقادیر $0,\pm1,\pm2,\pm3$ را خواهد داشت. پس:

$$E_{3,m}=\frac{6\hbar^2}{I_1}+\frac{I_1-I_2}{2I_1I_2}m^2\hbar^2$$

و لذا:

$$E_{3,0}=\frac{6\hbar^2}{I_1}$$

$$E_{3,\pm1}=\frac{(11I_2+I_1)\hbar^2}{2I_1I_2}$$

$$E_{3,\pm2}=\frac{(8I_2+4I_1)\hbar^2}{2I_1I_2}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_{۲,\pm۲}=\frac{\left(۲I_۲+۹I_۱\right)\hbar^۲}{۲I_۱I_۲}$$

(پ)

در حالت $I_۱=I_۲$ داریم:

$$E_l=\frac{l\left(l+۱\right)\hbar^۲}{۲I_۱}$$

واضح است که به‌ازای هر l مشخص، تبهگنی $\left(۲l+۱\right)$ گانه داریم. زیرا به‌ازای هر l، m مقادیر $\pm l,\ldots,\pm۱,۰$ را اختیار می‌کند.

(ت)

با توجه به‌اینکه:

$$L^۲=l\left(l+۱\right)\hbar^۲$$

داریم:

$$۵۶\hbar^۲=l\left(l+۱\right)\hbar^۲$$

از رابطه‌ی اخیر واضح است که:

$$l=۷$$

بنابراین تبهگنی ۱۵گانه وجود دارد.

تمرین ۵-۲۱

سیستمی را درنظر بگیرید که اندازه حرکت زاویه‌ای کل آن $j=۱$ است. دراین‌جا می‌خواهیم $\hat{J}_y$ را اندازه بگیریم که ماتریس آن به صورت زیر است:

$$\hat{J}_y=\frac{\hbar}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۰ & -i & ۰\\ i & ۰ & -i\\ ۰ & i & ۰\end{pmatrix}$$

(آ) با اندازه‌گیری $\hat{J}_y$ چه مقدارهای ممکنی به‌دست خواهیم آورد؟

(ب)اگر سیستم در حالت $J_y=\hbar$ باشد $\left\langle \hat{J}_z\right\rangle$، $\left\langle \hat{J}_z^۲\right\rangle$ و ΔJ_z را محاسبه کنید.

(پ) قسمت (ب) را برای $\left\langle \hat{J}_x\right\rangle$، $\left\langle \hat{J}_x^۲\right\rangle$ و ΔJ_x تکرار کنید.

حل:

(آ)

واضح است که به‌ازای $j=۱$، J_y می‌تواند مقادیر $\pm\hbar$ و ۰ را اختیار کند.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

ابتدا حالت سیستم را که همان $\left|j_y=\hbar\right\rangle$ است به‌دست می‌آوریم:

برای این منظور تعریف می‌کنیم:

$$\left|j_y=\hbar\right\rangle=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

پس داریم:

$$J_y\left|j_y=\hbar\right\rangle=\hbar\left|j_y=\hbar\right\rangle$$

یا:

$$\frac{\hbar}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۰&-i&۰\\i&۰&-i\\۰&i&۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\hbar\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

در نتیجه:

$$-ib=a\sqrt{۲}$$

$$ia-ic=b\sqrt{۲}$$

$$ib=c\sqrt{۲}$$

این روابط همراه با شرط بهنجارش $\left\langle j_y=\hbar\middle|j_y=\hbar\right\rangle=۱$ نتیجه می‌دهند که:

$$\left|j_y=\hbar\right\rangle=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۱\\i\sqrt{۲}\\-۱\end{pmatrix}$$

پس:

$$\left\langle\hat{J}_z\right\rangle=\left\langle j_y=\hbar\middle|\hat{J}_z\middle|j_y=\hbar\right\rangle=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۱&-i\sqrt{۲}&-۱\end{pmatrix}\hbar\begin{pmatrix}۱&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&-۱\end{pmatrix}\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۱\\i\sqrt{۲}\\-۱\end{pmatrix}=۰$$

این نتیجه از ابتدا نیز قابل انتظار بود. زیرا همانطور که مقدار چشمداشتی $\hat{J}_y$ با استفاده از ویژه حالت‌های $\hat{J}_z$ صفر است باید مقدار چشمداشتی $\hat{J}_z$ با استفاده از ویژه حالت‌های $\hat{J}_y$ نیز صفر باشد.

به‌همین ترتیب و با توجه به تمرین ۵-۱۴ داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle \hat{j}_z^2 \rangle = \frac{1}{2}\left[1(1+1)\hbar^2 - 1^2\hbar^2\right] = \frac{\hbar^2}{2}$$

که این با محاسبه به روش زیر نیز قابل حل است:

$$\langle \hat{j}_z^2 \rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\sqrt{2} & -1\end{pmatrix}\hbar^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}$$

(پ)

مانند قسمت (ب) داریم:

$$\langle J_x \rangle = 0 \quad , \quad \langle J_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2}$$

و

$$\Delta J_x = \sqrt{\langle J_x^2 \rangle - \langle J_x \rangle^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2}$$

تمرین ۵-۲۲

$Y_{2\pm2}(\theta,\varphi)$ را با اعمال عملگرهای نردبانی $\hat{L}_\pm$ روی $Y_{2\pm1}(\theta,\varphi)$ محاسبه کنید.

حل:

با توجه به اینکه:

$$L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \quad \text{و} \quad Y_{2\pm1} = \mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)e^{\pm i\varphi}$$

داریم:

$$L_\pm Y_{2\pm1} = \pm\hbar e^{\pm i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\left(\mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)e^{\pm i\varphi}\right) = \pm\hbar e^{\pm i\varphi}\left(\mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\right)$$

$$\times\left[\cos\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)e^{\pm i\varphi} - 10\sin^2\theta\cos\theta\, e^{\pm i\varphi} \pm i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)\left(\pm i e^{\pm i\varphi}\right)\right]$$

$$= \mp\hbar e^{\pm 2i\varphi}\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\left(-10\sin^2\theta\cos\theta\right)$$

$$= \hbar\sqrt{(3\mp1)(3\pm1+1)}\,Y_{2\pm2}$$

تمرین ۵-۲۳

سیستمی با تکانه‌ی زاویه‌ای کل $j=1$ را درنظر بگیرید. می‌خواهیم اندازه‌گیری‌هایی روی

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{J}_z = \hbar \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

انجام دهیم:

(آ) مقدارهای ممکنی که با اندازه‌گیری $\hat{J}_z$ به‌دست خواهیم آورد چه هستند؟

(ب) $\langle \hat{J}_x \rangle$، $\langle \hat{J}_x^۲ \rangle$ و ΔJ_x را محاسبه کنید اگر سیستم در حالت $j_z = -\hbar$ باشد.

(پ) قسمت(ب) را برای $\langle \hat{J}_y \rangle$، $\langle \hat{J}_y^۲ \rangle$ و ΔJ_y تکرار کنید.

حل:

به طریق مشابه تمرین ۵-۲۱ داریم:

(آ)

در اندازه‌گیری J_z مقادیر $\pm\hbar$ و ۰ به‌دست می‌آیند.

(ب)

$$\langle J_x \rangle = ۰ \ , \ \langle J^۲{}_x \rangle = \frac{\hbar^۲}{۲} \ , \ \Delta J_x = \frac{\hbar\sqrt{۲}}{۲}$$

(پ)

$$\langle J_y \rangle = ۰ \ , \ \langle J_y^۲ \rangle = \frac{\hbar^۲}{۲} \ , \ \Delta J_y = \frac{\hbar\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرین ۵-۲۴

سیستمی را درنظر بگیرید که در حالت

$$\psi(x,y,z) = \frac{۱}{۴\sqrt{\pi}} \frac{z}{r} + \frac{۱}{\sqrt{۳\pi}} \frac{x}{r}$$

است.

(آ) $\psi(x,y,z)$ را برحسب هماهنگ‌های کروی بیان کنید. سپس $\hat{L}^۲\psi(x,y,z)$ و $\hat{L}_z\psi(x,y,z)$ را محاسبه کنید. آیا $\psi(x,y,z)$ یک ویژه حالت $\hat{L}^۲$ یا $\hat{L}_z$ است؟

(ب) $\hat{L}_\pm\psi(x,y,z)$ و $\langle\psi|\hat{L}_\pm|\psi\rangle$ را محاسبه کنید.

(پ) اگر اندازه‌گیری مؤلفه‌ی z تکانه زاویه‌ای مداری انجام شود، احتمال‌های متناظر با یافتن نتایج ۰، $\hbar$ و $-\hbar$ را بیابید.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

با توجه به جدول ۵-۲ داریم:

$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}(x,y,z)+\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\frac{-1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_{11}-Y_{1-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{12}}Y_{10}(x,y,z)-\frac{\sqrt{2}}{3}Y_{11}+\frac{\sqrt{2}}{3}Y_{1-1}$$

پس:

$$\hat{L}^2\psi(x,y,z)=1(1+1)\hbar^2\psi(x,y,z)=2\hbar^2\psi(x,y,z)$$

$$L_z\psi(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{12}}L_zY_{10}(x,y,z)-\frac{\sqrt{2}}{3}L_zY_{11}+\frac{\sqrt{2}}{3}L_zY_{1-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(0\hbar Y_{10})-\frac{\sqrt{2}}{3}(1\hbar Y_{11})+\frac{\sqrt{2}}{3}(-1\hbar Y_{1-1})=\frac{-\hbar\sqrt{2}}{3}Y_{11}-\frac{\hbar\sqrt{2}}{3}Y_{1-1}$$

واضح است که $\psi(x,y,z)$ ویژه حالت $\hat{L}^2$ است (با ویژه مقدار $2\hbar^2$) اما ویژه حالت $\hat{L}_z$ نیست.

(ب)

در ادامه با $\psi_N(x,y,z)$ که همان $\psi(x,y,z)$ بهنجار شده است کار می‌کنیم:

$$\psi_N(x,y,z)=N\psi(x,y,z)=\frac{6}{\sqrt{19}}\left(\frac{1}{\sqrt{12}}Y_{10}-\frac{\sqrt{2}}{3}Y_{11}+\frac{\sqrt{2}}{3}Y_{1-1}\right)=\sqrt{\frac{3}{19}}Y_{10}-\sqrt{\frac{8}{19}}Y_{11}+\sqrt{\frac{8}{19}}Y_{1-1}$$

حال به محاسبه‌ی $\hat{L}_\pm|\psi\rangle$ می‌پردازیم:

$$\hat{L}_\pm|\psi\rangle=\sqrt{\frac{3}{19}}\hbar\sqrt{(1\mp0)(1\pm0+1)}Y_{10\pm1}-\sqrt{\frac{8}{19}}\hbar\sqrt{(1\mp1)(1\pm1+1)}\hbar Y_{11\pm1}+\sqrt{\frac{8}{19}}\sqrt{(1\pm1)(1\mp1+1)}\hbar Y_{1-1\pm1}$$

پس:

$$L_+\psi(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{6}{19}}\hbar Y_{11}+\sqrt{\frac{16}{19}}Y_{10}\hbar$$

$$L_-\psi(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{6}{19}}\hbar Y_{1-1}-\sqrt{\frac{16}{19}}Y_{10}\hbar$$

و لذا:

$$\langle\psi|L_+|\psi\rangle=-\sqrt{\frac{8}{19}}\times\sqrt{\frac{6}{19}}\hbar+\sqrt{\frac{3}{19}}\times\sqrt{\frac{16}{19}}\hbar=0$$

$$\langle\psi|L_-|\psi\rangle=\sqrt{\frac{3}{19}}\times-\sqrt{\frac{16}{19}}\hbar+\sqrt{\frac{8}{19}}\times\sqrt{\frac{6}{19}}\hbar=0$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ)

$$P_{\circ} = \left(\sqrt{\frac{۳}{۱۹}}\right)^{۲} = \frac{۳}{۱۹}$$

$$P_{\pm ۱} = \left(\mp\sqrt{\frac{۸}{۱۹}}\right)^{۲} = \frac{۸}{۱۹}$$

تمرین ۵-۲۵

سیستمی را درنظر بگیرید که تابع موج آن با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$\psi(\theta,\varphi) = \frac{۱}{۲}Y_{\circ\circ}(\theta,\varphi) + \frac{۱}{\sqrt{۳}}Y_{۱۱}(\theta,\varphi) + \frac{۱}{۲}Y_{۱-۱}(\theta,\varphi) + \frac{۱}{\sqrt{۶}}Y_{۲۲}(\theta,\varphi)$$

(آ) آیا $\psi(\theta,\varphi)$ بهنجار است؟

(ب) آیا $\psi(\theta,\varphi)$ ویژه‌حالتی از $\hat{L}^{۲}$ یا $\hat{L}_z$ است؟

(پ) $\hat{L}_{\pm}\psi(\theta,\varphi)$ و $\langle\psi|\hat{L}_{\pm}|\psi\rangle$ را محاسبه کنید.

(ت) اگر اندازه‌گیری روی مؤلفه‌ی z تکانه‌ی زاویه‌ای مداری انجام شود، احتمال‌های متناظر با یافتن نتایج $\hbar, \circ, -\hbar$ و $۲\hbar$ را بیابید.

حل:

(آ)

$\psi(\theta,\varphi)$ بهنجار است زیرا:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^{۲} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right)^{۲} = ۱$$

(ب)

$\psi(\theta,\varphi)$ ویژه حالت $\hat{L}^{۲}$ است و نیز ویژه حالت $\hat{L}_z$، زیرا:

$$\hat{L}^{۲}\psi(\theta,\varphi) = \frac{۱}{۲}L^{۲}Y_{\circ\circ} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}L^{۲}Y_{۱۱} + \frac{۱}{۲}L^{۲}Y_{۱-۱} + \frac{۱}{\sqrt{۶}}L^{۲}Y_{۲۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\circ(\circ+۱)\hbar^{۲}Y_{\circ\circ} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}۱(۱+۱)\hbar^{۲}Y_{۱۱} + \frac{۱}{۲}۱(۱+۱)\hbar^{۲}Y_{۱-۱} + \frac{۱}{\sqrt{۶}}۲(۲+۱)\hbar^{۲}Y_{۲۲}$$

$$= \hbar^{۲}\left(\sqrt{۲}Y_{۱۱} + Y_{۱-۱} + \sqrt{۶}Y_{۲۲}\right)$$

$$\hat{L}_z\psi(\theta,\varphi) = \frac{۱}{۲}\circ\hbar Y_{\circ\circ} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}۱\hbar Y_{۱۱}(\theta,\varphi) + \frac{۱}{۲}(-۱\hbar)Y_{۱-۱} + \frac{۱}{\sqrt{۶}}(۲\hbar)Y_{۲۲}(\theta,\varphi)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \hbar\left[\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{11}(\theta,\varphi) - \frac{1}{2}Y_{1-1} + \sqrt{2}Y_{22}(\theta,\varphi)\right]$$

(پ)

ابتدا $\hat{L}_{\pm}|\psi\rangle$ را می‌یابیم:

$$L_{\pm}|\psi\rangle = \frac{1}{2}L_{\pm}Y_{00} + \frac{1}{\sqrt{3}}L_{\pm}Y_{11} + \frac{1}{2}L_{\pm}Y_{1,-1} + \frac{1}{\sqrt{6}}L_{\pm}Y_{22}$$

$$= \hbar\left(0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(1\mp1)(1\pm1+1)}Y_{1,1\pm1} + \frac{1}{2}\sqrt{(1\pm1)(1\mp1+1)}Y_{1,-1\pm1}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(2\mp2)(2\pm2+1)}Y_{2,2\pm1}\right)$$

پس:

$$\langle\psi|L_{\pm}|\psi\rangle = 0$$

(ت)

با توجه به اینکه Y_{lm}ها ویژه توابع $\hat{L}_z$ هستند لذا:

$$P_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$P_{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

تمرین ۵-۲۶

با استفاده از عبارت $\hat{L}_-$ در مختصات کروی دو رابطه‌ی زیر را اثبات کنید:

$$\left[\hat{L}_-, \cos\theta\right] = \hbar e^{-i\varphi}\sin\theta \quad \text{و} \quad \left[\hat{L}_-, e^{-i\varphi}\sin\theta\right] = 0$$

حل:

با توجه به اینکه:

$$\hat{L}_- = -\hbar e^{-i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

اثر $\left[L_-, e^{-i\varphi}\sin\theta\right]$ و $\left[\hat{L}_-, \cos\theta\right]$ را روی تابع موج دلخواه و خوش‌رفتار $\psi(\theta,\varphi)$ می‌یابیم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left[\hat{L}_-, e^{-i\varphi}\sin\theta\right]\psi(\theta,\varphi) = \left[-\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), e^{-i\varphi}\sin\theta\right]\psi(\theta,\varphi) =$$

$$-\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(e^{-i\varphi}\sin\theta\,\psi(\theta,\varphi)\right)$$

$$-e^{-i\varphi}\sin\theta\left[-\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right]\psi(\theta,\varphi)$$

$$= -\hbar e^{-i\varphi}\left[e^{-i\varphi}\left(\cos\theta\,\psi(\theta,\varphi) + \sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left. -i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\left(-ie^{-i\varphi}\right)\sin\theta\,\psi(\theta,\varphi) + e^{-i\varphi}\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$+\hbar e^{-2i\varphi}\sin\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)$$

$$= -\hbar e^{-2i\varphi}\left[\psi\cos\theta + \sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \psi\cos\theta - i\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right.$$

$$\left. -\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + i\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right] = 0$$

پس با توجه به اینکه $\psi(\theta,\varphi)$ کاملاً اختیاری است؛ لذا:

$$\left[\hat{L}_-, e^{-i\varphi}\sin\theta\right] = 0$$

حال $\left[\hat{L}_-, \cos\theta\right]\psi(\theta,\varphi)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left[\hat{L}_-, \cos\theta\right]\psi(\theta,\varphi) = \left[-\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \cos\theta\right]\psi(\theta,\varphi) = -\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\times\left(\cos\theta\,\psi(\theta,\varphi)\right) - \cos\theta\left(-\hbar e^{-i\varphi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi(\theta,\varphi)$$

$$= -\hbar e^{-i\varphi}\left[\left(-\sin\theta\psi(\theta,\varphi) + \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$+\hbar\cos\theta e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)$$

$$= -\hbar e^{-i\varphi}\left[-\psi\sin\theta + \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - i\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + i\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right]$$

$$= \left(\hbar e^{-i\varphi}\sin\theta\right)\psi$$

پس:

$$\left[\hat{L}_-, \cos\theta\right] = \hbar e^{-i\varphi}\sin\theta$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۵-۲۷

ذره‌ای را با اندازه حرکت زاویه‌ای $l=1$ درنظر بگیرید.

(آ) ویژه مقدارها و ویژه بردارهای $|1,m_x\rangle$ از $\hat{L}_x$ را بیابید.

(ب) حالت $|1,m_x=1\rangle$ را به‌عنوان یک برهم‌نهی خطی از ویژه حالت‌های $\hat{L}_z$ بیان کنید. (*راهنمایی:* نخست باید ویژه حالت‌های L_x را پیدا کنید و مشخص کنید کدام‌یک از آن‌ها متناظر با ویژه مقدار $m_x=1$ است. این ویژه بردار در پایه z بسط داده خواهد شد).

(پ) احتمال اندازه‌گیری $m_z=1$ هنگامی که ذره در ویژه حالت $|1,m_x=1\rangle$ است، چقدر می‌باشد؟ احتمال متناظر با اندازه‌گیری $m_z=0$ چیست؟

(ت) فرض کنید که اندازه‌گیری مؤلفه‌ی z اندازه حرکت زاویه‌ای انجام شود و نتیجه $m_z=1$ به‌دست آید. اکنون مؤلفه‌ی x تکانه‌ی زاویه‌ای را اندازه می‌گیریم. نتایج ممکن و احتمال‌های آن چه هستند؟

حل:

(آ)

با توجه به مسئله‌ی حل شده ۵-۸ در متن کتاب داریم:

$$m_x=0\ ,\ \pm\hbar$$

و نیز با توجه به اینکه $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $\varphi=0$ داریم:

$$|1,m_x=-1\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)\\ -\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{2}\\ \left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$|1,m_x=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\sin\frac{\pi}{2}\\ \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$|1,m_x=+1\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{2}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{2}\\ 1-\cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$|۱, m_x = +۱\rangle = \frac{۱}{۲}|۱,۱\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۲}}|۱,۰\rangle + \frac{۱}{۲}|۱,-۱\rangle$$

(پ)

$$P_{+۱} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

$$P_{۰} = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}$$

(ت)

در اندازه‌گیری m_z یکی از مقادیر ۰ یا ± ۱ حاصل می‌شود و احتمال متناظر با آنها در تشابه با قسمت (پ) عبارتند از:

$$P_{۰} = \frac{۱}{۲} \ , \ P_{\pm ۱} = \frac{۱}{۴}$$

تمرین ۵-۲۸

سیستمی را درنظر بگیرید که در ویژه حالت تکانه‌ی زاویه‌ای زیر $|l,m\rangle$ معلوم است:

$$|\psi\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۷}}|۱,-۱\rangle + A|۱,۰\rangle + \sqrt{\frac{۲}{۷}}|۱,۱\rangle$$

و در آن A یک ثابت حقیقی می‌باشد.

(آ) A را طوری محاسبه کنید که $|\psi\rangle$ بهنجار باشد.

(ب) مقادیر چشم‌داشتی $\hat{L}_x$، $\hat{L}_y$، $\hat{L}_z$ و $\hat{\vec{L}}^۲$ را در حالت $|\psi\rangle$ محاسبه کنید.

(پ) احتمال وابسته به اندازه‌گیری $\hbar$ برای مؤلفه‌ی z اندازه حرکت زاویه‌ای را بیابید.

(ت) $\langle ۱,m|\hat{L}_+^۲|\psi\rangle$ و $\langle ۱,m|\hat{L}_-^۲|\psi\rangle$ را محاسبه کنید.

حل:

(آ)

با توجه به‌اینکه $|l,m\rangle$ ها راست هنجار هستند داریم:

$$۱ = \langle\psi|\psi\rangle = \left(\frac{۱}{\sqrt{۷}}\right)^۲ + A^۲ + \left(\sqrt{\frac{۲}{۷}}\right)^۲ = \frac{۳}{۷} + A^۲$$

پس:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$A=\pm\frac{۲}{\sqrt{۷}}$$

(ب)

با توجه به‌اینکه $|l,m\rangle$ ها ویژه حالت‌های همزمان $\hat{\vec{L}}^{۲}$ و $\hat{L}_z$ هستند پس:

$$\left\langle \hat{\vec{L}}^{۲}\right\rangle = ۱(۱+۱)\hbar^{۲}=۲\hbar^{۲}$$

$$\left\langle \hat{L}_z\right\rangle = \left(\frac{۱}{\sqrt{۷}}\right)^{۲}(-\hbar)+\frac{۴}{۷}(۰\hbar)+\left(\sqrt{\frac{۲}{۷}}\right)^{۲}(+\hbar)=\frac{\hbar}{۷}$$

برای محاسبه‌ی $\left\langle \hat{L}_x\right\rangle$ و $\left\langle \hat{L}_y\right\rangle$ ابتدا $\left\langle L_{\pm}\right\rangle$ را می‌یابیم. برای این منظور از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$L_{\pm}|l,m\rangle=\hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+۱)}\,|l,m\pm ۱\rangle$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}L_{\pm}|\psi\rangle &= \frac{۱}{\sqrt{۷}}L_{\pm}|۱,-۱\rangle+AL_{\pm}|۱,۰\rangle+\sqrt{\frac{۲}{۷}}L_{\pm}|۱,۱\rangle\\ &=\hbar\Bigg[\frac{۱}{\sqrt{۷}}\sqrt{(۱\pm ۱)(۱\mp ۱+۱)}\,|۱,-۱\pm ۱\rangle+A\sqrt{(۱\mp ۰)(۱\pm ۰+۱)}\,|۱,۰\pm ۱\rangle\\ &\quad+\sqrt{\frac{۲}{۷}}\sqrt{(۱\mp ۱)(۱\pm ۱+۱)}\,|۱,۱\pm ۱\rangle\Bigg]\end{aligned}$$

$$\left\langle L_+\right\rangle=\langle\psi|L_+|\psi\rangle=\frac{\hbar\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}A+\hbar A\sqrt{۲}\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}=\hbar A\sqrt{\frac{۲}{۷}}\left(۱+\sqrt{۲}\right)$$

$$\left\langle L_-\right\rangle=\langle\psi|L_-|\psi\rangle=\hbar A\sqrt{۲}\frac{۱}{\sqrt{۷}}+\hbar\sqrt{\frac{۲}{۷}}\sqrt{۲}A=\hbar A\sqrt{\frac{۲}{۷}}\left(۱+\sqrt{۲}\right)$$

پس:

$$\left\langle \hat{L}_x\right\rangle=\frac{\left\langle L_+\right\rangle+\left\langle L_-\right\rangle}{۲}=\hbar A\sqrt{\frac{۲}{۷}}\left(۱+\sqrt{۲}\right)=\hbar\left(\pm\frac{۲}{\sqrt{۷}}\right)\sqrt{\frac{۲}{۷}}\left(۱+\sqrt{۲}\right)=\pm\frac{۲\sqrt{۲}\hbar}{۷}\left(۱+\sqrt{۲}\right)$$

$$\left\langle \hat{L}_y\right\rangle=\frac{\left\langle L_+\right\rangle-\left\langle L_-\right\rangle}{۲i}=۰$$

(پ)

$$P_{+۱}=\left(\sqrt{\frac{۲}{۷}}\right)^{۲}=\frac{۲}{۷}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ت)

$$\hat{L}_+^2|\psi\rangle=\hat{L}_+\left[\sqrt{\frac{2}{5}}\hbar|1,0\rangle+A\sqrt{2}|1,1\rangle\right]=\sqrt{\frac{2}{5}}\hbar\hbar\sqrt{(1-0)(1+0+1)}|1,1\rangle=\frac{2}{\sqrt{5}}\hbar^2|1,1\rangle$$

$$\hat{L}_-^2|\psi\rangle=\hat{L}_-\left[\hbar\sqrt{2}A|1,-1\rangle+\frac{2}{\sqrt{5}}\hbar|1,0\rangle\right]=\frac{2}{\sqrt{5}}\hbar\hbar\sqrt{(1+0)(1-0+1)}|1,-1\rangle=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\hbar^2|1,-1\rangle$$

بنابراین:

$$\langle 1,m|\hat{L}_+^2|\psi\rangle=\frac{2}{\sqrt{5}}\hbar^2\delta_{1,m}\quad,\quad\langle 1,m|\hat{L}_-^2|\psi\rangle=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\hbar^2\delta_{-1,m}$$

تمرین ۵-۲۹

ذره‌ای را با اندازه حرکت زاویه‌ای $j=3/2$ درنظر بگیرید.

(آ) ماتریس‌های نشان‌دهنده‌ی عملگرهای $\hat{J}^2$، $\hat{J}_x$، $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$ را در پایه‌ی $\left\{\left|3/2,m\right\rangle\right\}$ بیابید.

(ب) با استفاده از این ماتریس‌ها نشان دهید که $\hat{J}_x$، $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$ در جابه‌جاگر $\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right]=i\hbar\hat{J}_z$ صدق می‌کنند.

(پ) مقادیر میانگین $\hat{J}_x$ و $\hat{J}_x^2$ را برحسب حالت $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ محاسبه کنید.

(ت) $\Delta J_x\Delta J_y$ را برحسب حالت $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ محاسبه کنید و ثابت کنید که این حاصل‌ضرب در اصل عدم‌قطعیت هایزنبرگ صدق می‌کند.

حل:

(آ)

با توجه به‌اینکه:

$$\hat{J}^2\left|\frac{3}{2},m\right\rangle=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\hbar^2\left|\frac{3}{2},m\right\rangle=\frac{15}{4}\hbar^2\left|\frac{3}{2},m\right\rangle$$

$$J_z\left|\frac{3}{2},m\right\rangle=m\hbar\left|\frac{3}{2},m\right\rangle$$

لذا:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left\langle \frac{۳}{۲}, m' \middle| \hat{J}^۲ \middle| \frac{۳}{۲}, m \right\rangle = \frac{۱۵}{۴}\hbar^۲ \delta_{mm'}$$

$$\left\langle \frac{۳}{۲}, m' \middle| \hat{J}^۲ \middle| \frac{۳}{۲}, m \right\rangle = m\hbar\,\delta_{mm'}$$

پس:

$$\hat{\vec{J}}^۲ = \frac{۱۵}{۴}\hbar^۲ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{J}_z = \hbar \begin{pmatrix} \frac{۳}{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{-۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{-۳}{۲} \end{pmatrix}$$

و با توجه به رابطه‌ی ۵-۷۰ و ۵-۷۱ داریم:

$$\hat{J}_x = \frac{\hbar}{۲} \begin{pmatrix} ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۳} & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_y = \frac{\hbar}{۲i} \begin{pmatrix} ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ -\sqrt{۳} & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & ۰ & -\sqrt{۳} & ۰ \end{pmatrix}$$

(ب)

$$\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = \hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x = \frac{\hbar^۲}{۴i} \left[\begin{pmatrix} ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۳} & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ -\sqrt{۳} & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & ۰ & -\sqrt{۳} & ۰ \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ -\sqrt{۳} & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & ۰ & -\sqrt{۳} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ +\sqrt{۳} & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & +۲ & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ \end{pmatrix} \right]$$

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{\hbar^2}{4i}\left[\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{3} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 0 & -3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{-i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = i\hbar^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} = i\hbar \hat{J}_z$$

(ب)

واضح است که حالت داده‌شده درواقع همان $\left|\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right\rangle$ است؛ پس با توجه به روابط ۵-۲۰۲ و ۵-۲۰۸ داریم:

$$\langle \hat{J}_x \rangle = 0$$

$$\langle \hat{J}_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{1}{4}\right] = \frac{7}{4}\hbar^2$$

و یا با استفاده از نمایش ماتریسی داریم:

$$\langle \hat{J}_x \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \hat{J}_x^2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}(4+3) = \frac{7\hbar^2}{4}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ت)

با توجه به قسمت (پ) داریم:

$$\Delta J_x = \sqrt{\langle \hat{J}_x^2 \rangle - \langle \hat{J}_x \rangle^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar = \Delta J_y$$

پس:

$$\Delta J_x \Delta J_y = \frac{2}{4}\hbar^2$$

از طرفی:

$$\langle [\hat{J}_x, \hat{J}_y] \rangle = \langle i\hbar \hat{J}_z \rangle = i\hbar \langle \hat{J}_z \rangle = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hbar \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= i\hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar^2}{2}$$

بنابراین رابطه:

$$\Delta J_x \Delta J_x = \frac{2}{4}\hbar^2 \geq \frac{1}{2}\left|\langle [\hat{J}_x, \hat{J}_y] \rangle\right| = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{2} = \frac{\hbar^2}{4}$$

صحت اصل عدم قطعیت هایزنبرگ را تصدیق می‌کند.

تمرین ۵-۳۰

ماتریس‌های پاولی را درنظر بگیرید:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(آ) ثابت کنید که $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$ که در آن I، ماتریس واحد است. $\left(I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

(ب) جابه‌جاگرهای $[\sigma_x, \sigma_y]$، $[\sigma_x, \sigma_z]$ و $[\sigma_y, \sigma_z]$ را محاسبه کنید.

(پ) پاد جابه‌جایی $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x$ را محاسبه کنید.

(ت) نشان دهید $e^{i\theta\sigma_y} = I\cos\theta + i\sigma_y \sin\theta$ که در آن I ماتریس واحد است.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ث) عبارتی برای $e^{i\theta\sigma_z}$ در تشابه با عبارت σ_y استخراج کنید.

حل:

(آ)

با توجه به نمایش ماتریسی σ_i داریم:

$$\sigma_x^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_y^2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_z^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

پس:

$$\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=\hat{I}$$

(ب)

$$\left[\sigma_x,\sigma_y\right]=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2i&0\\0&-2i\end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=2i\sigma_z$$

$$\left[\sigma_x,\sigma_z\right]=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}=-2i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=-2i\sigma_y$$

$$\left[\sigma_y,\sigma_z\right]=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2i\\2i&0\end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=2i\sigma_x$$

پس:

$$\left[\sigma_i,\sigma_j\right]=2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

(پ)

$$\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

(ت)

در اینجا از بسط مک-لورن برای $e^{i\theta\sigma_y}$ استفاده می‌کنیم:

$$e^{i\theta\sigma_y}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i\theta\sigma_y\right)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(i\theta\sigma_y\right)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(i\theta\sigma_y\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

اما:

$$\left(\sigma_y\right)^{2k}=\left(\sigma_y^2\right)^k=I^k=I$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$(\sigma_y)^{2k+1} = (\sigma_y)^{2k}\sigma_y = I\sigma_y = \sigma_y$$

پس:

$$e^{i\theta\sigma_y} = I\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + i\sigma_y\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = I\cos\theta + i\sigma_y\sin\theta$$

(ث)

به‌طور مشابه:

$$e^{i\theta\sigma_y} = I\cos\theta + i\sigma_z\sin\theta$$

تمرین ۵-۳۱

ذره‌ای با اسپین $\frac{3}{2}$ را درنظر بگیرید که هامیلتونی آن عبارت است از

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}\left(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2\right) - \frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}\hat{S}_z^2$$

و در آن ε_0 ثابتی دارای بعد انرژی می‌باشد.

(آ) ماتریس هامیلتونی را بیابید و آن را برای یافتن ترازهای انرژی قطری کنید.

(ب) ویژه بردارها را پیدا کنید و ثابت کنید که ترازهای انرژی، تبهگن دوگانه‌اند.

حل:

با توجه به تمرین ۵-۲۹ داریم:

$$\hat{S}_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y^2 = \frac{-\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} -3 & 0 & +2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -7 & 0 & +2\sqrt{3} \\ +2\sqrt{3} & 0 & -7 & 0 \\ 0 & +2\sqrt{3} & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

پس داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{H}=\frac{\varepsilon_{\circ}}{۴}\begin{pmatrix}-۹ & ۰ & ۴\sqrt{۳} & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰ & ۴\sqrt{۳}\\ ۴\sqrt{۳} & ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۴\sqrt{۳} & ۰ & -۹\end{pmatrix}$$

اگر $|h\rangle$ ویژه حالت هامیلتونی با ویژه مقدار $\frac{\varepsilon_{\circ}}{۴}h$ باشد داریم:

$$\hat{H}|h\rangle=\frac{\varepsilon_{\circ}}{۴}h|h\rangle \qquad (*)$$

$$\left(\hat{H}-\frac{\varepsilon_{\circ}}{۴}h\hat{I}\right)|h\rangle=۰$$

از معادله‌ی اخیر نتیجه می‌شود که $|h\rangle$ درصورتی غیر صفر است که:

$$\det\left(\hat{H}-\frac{\varepsilon_{\circ}}{۴}h\hat{I}\right)=۰$$

پس:

$$۰=\begin{vmatrix}-۹-h & ۰ & ۴\sqrt{۳} & ۰\\ ۰ & -۱-h & ۰ & ۴\sqrt{۳}\\ ۴\sqrt{۳} & ۰ & -۱-h & ۰\\ ۰ & ۴\sqrt{۳} & ۰ & -۹-h\end{vmatrix}=(-۹-h)\begin{vmatrix}-۱-h & ۰ & ۴\sqrt{۳}\\ ۰ & -۱-h & ۰\\ ۴\sqrt{۳} & ۰ & -۹-h\end{vmatrix}+۴\sqrt{۳}\begin{vmatrix}۰ & -۱-h & ۴\sqrt{۳}\\ ۴\sqrt{۳} & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴\sqrt{۳} & -۹-h\end{vmatrix}$$

$$=(-۹-h)\left[-(۱+h)^{۲}(۹+h)+(۴\sqrt{۳})^{۲}(۱+h)\right]+۴\sqrt{۳}\left[-۴\sqrt{۳}(۱+h)(۹+h)+(۴\sqrt{۳})^{۲}\right]$$

$$=\left[(h+۹)(h+۱)-۴۸\right]^{۲}$$

در نتیجه:

$$h=-۵\pm۸=-۱۳,+۳$$

حال ویژه حالت‌های هامیلتونی را با تعریف $|h\rangle=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$ می‌یابیم.

برای مورد $h=-۱۳$ با توجه به رابطه‌ی (*) داریم:

$$-۹a+۴c\sqrt{۳}=-۱۳a$$

$$-b+۴d\sqrt{۳}=-۱۳b$$

$$۴a\sqrt{۳}-c=-۱۳c$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$۴b\sqrt{۳}-۹d=-۱۳d$$

از این روابط نتیجه می‌شود:

$$a=-c\sqrt{۳}$$
$$d=-b\sqrt{۳}$$

با اعمال شرط بهنجارش $|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+|d|^۲=۱$ نتیجه می‌شود که:

$$|h_۱=-۱۳\rangle=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۰\\۱\\۰\\-\sqrt{۳}\end{pmatrix}\quad,\quad|h_۲=-۱۳\rangle=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}-\sqrt{۳}\\۰\\۱\\۰\end{pmatrix}$$

به‌روشی مشابه برای مورد $h=۳$ داریم:

$$|h_۳=۳\rangle=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۰\\\sqrt{۳}\\۰\\۱\end{pmatrix}\quad,\quad|h_۴=۳\rangle=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۱\\۰\\\sqrt{۳}\\۰\end{pmatrix}$$

بنابراین $|h_i\rangle$ ها ویژه حالت‌های انرژی هستند که در این بین، $|h_۱\rangle$ و $|h_۲\rangle$ تبهگن با ویژه مقدار $-\frac{۱۳}{۴}\varepsilon_۰$ و $|h_۳\rangle$ و $|h_۴\rangle$ نیز تبهگن با ویژه مقدار $\frac{۳}{۴}\varepsilon_۰$ می‌باشند.

تمرین ۵-۳۲

ترازهای انرژی یک ذره با اسپین $\frac{۵}{۲}$ را بیابید که هامیلتونی آن

$$\hat{H}=\frac{\varepsilon_۰}{\hbar^۲}\left(\hat{S}_x^۲+\hat{S}_y^۲\right)+\frac{\varepsilon_۰}{\hbar}\hat{S}_z$$

است و در آن $\varepsilon_۰$ ثابتی دارای بعد انرژی می‌باشد. آیا این ترازهای انرژی تبهگن‌اند؟

حل:

با استفاده از رابطه‌ی $\hat{\vec{S}}^۲=\hat{S}_x^۲+\hat{S}_y^۲+\hat{S}_z^۲$ داریم:

$$\hat{H}=\frac{\varepsilon_۰}{\hbar^۲}\left(\hat{\vec{S}}^۲-\hat{S}_z^۲\right)+\frac{\varepsilon_۰}{\hbar}\hat{S}_z$$

با توجه به‌شکل هامیلتونی، ویژه حالت‌های آن $\left|\frac{۵}{۲},m\right\rangle$ ها هستند و ویژه مقادیر نیز عبارتند از:

$$E_m=\frac{\varepsilon_۰}{\hbar^۲}\left[\left(\frac{۵}{۲}\right)\left(\frac{۵}{۲}+۱\right)\hbar^۲-m^۲\hbar^۲\right]+\frac{\varepsilon_۰}{\hbar}m\hbar=\varepsilon_۰\left[\frac{۳۵}{۴}-m(m-۱)\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

به‌ازای مقادیر مختلف m یعنی $m=\pm\frac{۵}{۲},\pm\frac{۳}{۲},\pm\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$E_{\frac{۵}{۲}}=\varepsilon_{۰}\left(\frac{۳۵}{۴}-\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}\right)=۵\varepsilon_{۰}$$

$$E_{\frac{۳}{۲}}=\varepsilon_{۰}\left(\frac{۳۵}{۴}-\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)=۸\varepsilon_{۰}$$

$$E_{\frac{۱}{۲}}=\varepsilon_{۰}\left(\frac{۳۵}{۴}-\frac{۱}{۲}\times\frac{-۱}{۲}\right)=۹\varepsilon$$

$$E_{\frac{-۱}{۲}}=\varepsilon_{۰}\left(\frac{۳۵}{۴}+\frac{۱}{۲}\times\frac{-۳}{۲}\right)=۸\varepsilon_{۰}$$

$$E_{\frac{-۳}{۲}}=\varepsilon_{۰}\left(\frac{۳۵}{۴}+\frac{۳}{۲}\times\frac{-۵}{۲}\right)=۵\varepsilon_{۰}$$

$$E_{\frac{-۵}{۲}}=\varepsilon_{۰}\left(\frac{۳۵}{۴}+\frac{۵}{۲}\times\frac{-۷}{۲}\right)=۰$$

پس حالت‌های $\left|\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲}\right\rangle$ و $\left|\frac{۵}{۲},\frac{-۳}{۲}\right\rangle$ تبهگن با ویژه مقدار $۵\varepsilon_{۰}$ و $\left|\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}\right\rangle$ و $\left|\frac{۵}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle$ نیز تبهگن با ویژه مقدار $۸\varepsilon_{۰}$ هستند و حالت‌های $\left|\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle$ و $\left|\frac{۳}{۲},\frac{-۵}{۲}\right\rangle$ فاقد تبهگنی می‌باشند.

تمرین ۵-۳۳

الکترونی را درنظر بگیرید که جهت اسپین آن در صفحه‌ی xy واقع است.

(آ) ویژه مقدارها ($\lambda_۱$ و $\lambda_۲$) و ویژه حالت‌های ($|\lambda_۱\rangle$ و $|\lambda_۲\rangle$) عملگر اسپین الکترون، $\hat{\vec{S}}$، را بیابید.

(ب) با فرض این‌که حالت اولیه‌ی الکترون به‌صورت زیر باشد:

$$|\psi_{۰}\rangle=\frac{۱}{۳}|\lambda_۱\rangle+\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}|\lambda_۲\rangle$$

احتمال به‌دست آوردن مقدار $\hat{S}=\frac{-\hbar}{۲}$ را پس از اندازه‌گیری اسپین الکترون پیدا کنید.

حل:

(آ)

در واقع در اینجا با حالت خاصی از مسئله حل شده‌ی ۵-۵ در متن کتاب روبرو هستیم به طوری‌که:

$$\theta=\frac{\pi}{۲},\qquad ۰\le\varphi\le۲\pi$$

بنابراین:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$|\lambda\rangle=|\lambda_+\rangle=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{i\varphi}\end{pmatrix}$$

و

$$|\lambda_2\rangle=|\lambda_-\rangle=\begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ e^{i\varphi}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ e^{i\varphi}\end{pmatrix}$$

(ب)

$$P_{\frac{-1}{2}}=\left|\left\langle\frac{1}{2},\frac{-1}{2}|\psi_0\right\rangle\right|^2=\left|\langle\lambda_2|\psi_0\rangle\right|^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

تمرین ۵-۳۴

(آ) ویژه مقدارهای $(\lambda_1$ و $\lambda_2)$ و ویژه حالت‌های $(|\lambda_1\rangle$ و $|\lambda_2\rangle)$ مربوط به عملگر اسپین $\vec{S}$ یک الکترون وقتی $\vec{S}$ در راستای یک بردار یکه‌ی دلخواه $\vec{n}$ در صفحه‌ی yz قرار دارد را بیابید.

(ب) با فرض این‌که حالت اولیه‌ی الکترون به‌صورت زیر باشد:

$$|\psi_0\rangle=\frac{1}{2}|\lambda_1\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}|\lambda_2\rangle$$

احتمال به‌دست آوردن یک مقدار $\hat{S}=\frac{\hbar}{2}$ را پس از اندازه‌گیری اسپین الکترون پیدا کنید.

حل:

(آ)

در اینجا نیز با حالت خاصی از مسئله‌ی حل شده ۵-۵ روبرو هستیم به طوری‌که:

$$\varphi=\frac{\pi}{2}\quad,\quad 0\le\theta\le\pi$$

$$|\lambda_1\rangle=|\lambda_+\rangle=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ e^{\frac{i\pi}{4}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$|\lambda_2\rangle=|\lambda_-\rangle=\begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ e^{\frac{i\pi}{4}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$P_{\frac{1}{2}} = \left|\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \psi_0 \right\rangle\right|^2 = \left|\left\langle \lambda_1 \middle| \psi_0 \right\rangle\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

تمرین ۵-۳۵

ذره‌ای را با اسپین $\frac{3}{2}$ درنظر بگیرید. ماتریس مؤلفه‌ی اسپین را در راستای یک بردار یکه با جهت دلخواه $\vec{n}$ بیابید. ویژه مقدارها و ویژه بردارها را پیدا کنید. (راهنمایی:

$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi)\vec{i} + (\sin\theta\sin\varphi)\vec{j} + (\cos\theta)\vec{k}$$

حل:

در واقع در اینجا باید ویژه حالت‌ها و ویژه مقادیر عملگر $\hat{\vec{S}}.\vec{n}$ را بیابیم که در آن:

$$\vec{n} = \left(\sin\theta\cos\varphi\right)\vec{i} + \left(\sin\theta\sin\varphi\right)\vec{j} + \left(\cos\theta\right)\vec{k}$$

پس:

$$\hat{\vec{S}}.\vec{n} = \hat{S}_x \sin\theta\cos\varphi + \hat{S}_y \sin\theta\sin\varphi + \hat{S}_z \cos\theta$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi + \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\sin\theta\sin\varphi$$

$$+ \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\cos\theta$$

یا:

$$\hat{\vec{S}}.\vec{n} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 3\cos\theta & \sqrt{3}\sin\theta e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\sin\theta e^{i\varphi} & \cos\theta & 2\sin\theta e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 2\sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta & \sqrt{3}\sin\theta e^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\sin\theta e^{i\varphi} & -3\cos\theta \end{pmatrix}$$

اگر $\left|\frac{3}{2}, m\right\rangle$ ها را ویژه حالت‌های $\hat{\vec{S}}.\vec{n}$ با ویژه مقدار $\frac{m\hbar}{2}$ در نظر بگیریم داریم:

$$\hat{\vec{S}}.\vec{n}\left|\frac{3}{2}, m\right\rangle = \frac{m\hbar}{2}\left|\frac{3}{2}, m\right\rangle \qquad (*)$$

یا:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left(\hat{\vec{S}}.\vec{n}-\frac{m\hbar}{۲}\right)\left|\frac{۳}{۲},m\right\rangle=۰$$

برای آنکه $\left|\frac{۳}{۲},m\right\rangle$ها غیر صفر باشند لازم است که:

$$\det\left(\hat{\vec{S}}.\vec{n}-\frac{m\hbar}{۲}\right)=۰$$

بدیهی است که حل معادله‌ی فوق به $m=\pm۳,\pm۱$ منجر می‌شود.

اگر $\left|\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}\right\rangle$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\left|\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}\right\rangle=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

در این‌صورت از رابطه‌ی (*) نتیجه می‌شود که:

$$۳a\cos\theta+b\sqrt{۳}\sin\theta\,e^{-i\varphi}=۳a$$

$$a\sqrt{۳}\sin\theta\,e^{i\varphi}+b\cos\theta+۲c\sin\theta\,e^{-i\varphi}=۳b$$

$$۲b\sin\theta\,e^{i\varphi}-c\cos\theta+d\sqrt{۳}\sin\theta\,e^{-i\varphi}=۳c$$

$$c\sqrt{۳}\sin\theta\,e^{i\varphi}-۳d\cos\theta=۳d$$

از حل این دستگاه معادلات نتیجه می‌شود که:

$$a=\frac{b\sin\theta\,e^{-i\varphi}}{\sqrt{۳}\left(۱-\cos\theta\right)}=\frac{c\left(۱+\cos\theta\right)e^{-۲i\varphi}}{\sqrt{۳}\left(۱-\cos\theta\right)}=\frac{d\left(۱+\cos\theta\right)^{۲}e^{-۳i\varphi}}{\sin\theta\left(۱-\cos\theta\right)}$$

با اعمال شرط بهنجارش $|a|^{۲}+|b|^{۲}+|c|^{۲}+|d|^{۲}=۱$، $\left|\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}\right\rangle$ تا حد یک عامل فاز دلخواه عبارتست از:

$$\left|\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}\right\rangle=\frac{\left(۱+\cos\theta\right)\sqrt{۱+\cos\theta}}{۳}\begin{pmatrix}۱\\\dfrac{\sqrt{۳}\left(۱-\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{i\varphi}\\\dfrac{\sqrt{۳}\left(۱-\cos\theta\right)e^{۲i\varphi}}{۱+\cos\theta}\\\dfrac{\sin\theta\,e^{۳i\varphi}\left(۱-\cos\theta\right)}{\left(۱+\cos\theta\right)^{۲}}\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

به‌طور مشابه با تعریف:

$$\left|\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

داریم:

$$۳a\cos\theta+b\sqrt{۳}\sin\theta e^{-i\varphi}=a$$

$$a\sqrt{۳}\sin\theta e^{i\varphi}+b\cos\theta+۲c\sin\theta e^{-i\varphi}=b$$

$$۲b\sin\theta-c\cos\theta+d\sqrt{۳}\sin\theta e^{-i\varphi}=c$$

$$c\sqrt{۳}\sin\theta e^{i\varphi}-۳d\cos\theta=d$$

که نتیجه می‌دهد:

$$a=\frac{b\sqrt{۳}e^{-i\varphi}\sin\theta}{\left(۱-۳\cos\theta\right)}=\frac{-\sqrt{۳}c\left(۱+\cos\theta\right)e^{-۲i\varphi}}{۱+۳\cos\theta}=\frac{-d\left(\cos\theta+۱\right)e^{-۳i\varphi}}{\sin\theta}$$

با اعمال شرط بهنجارش $|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+|d|^۲=۱$، $\left|\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle$ تا حد یک عامل فاز دلخواه عبارتست از:

$$\left|\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle=\frac{۳\left(۱+\cos\theta\right)\sqrt{۱-\cos\theta}}{-۹\cos^۳\theta+۶\cos^۲\theta-\cos\theta+۸}\begin{pmatrix}۱\\\dfrac{\left(۱-۳\cos\theta\right)e^{i\varphi}}{\sqrt{۳}\sin\theta}\\\dfrac{-e^{۲i\varphi}\left(۳\cos\theta+۱\right)}{\sqrt{۳}\left(۱+\cos\theta\right)}\\\dfrac{-\sin\theta e^{۳i\varphi}}{\cos\theta+۱}\end{pmatrix}$$

به‌طریق مشابه می‌توان حالت‌های $\left|\frac{۳}{۲},\pm\frac{۱}{۲}\right\rangle$ را نیز یافت.

تمرین ۵-۳۶

نشان دهید که:

$$\left[\hat{J}_x\hat{J}_y,\hat{J}_z\right]+\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\hat{J}_z\right]=i\hbar\left(\hat{J}_x^۲-۲\hat{J}_y^۲+\hat{J}_z^۲\right).$$

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

با توجه به روابط:

$$\left[\hat{A},\hat{B},\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C}+\hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]$$
$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]=\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$$

داریم:

$$\begin{aligned}\left[\hat{J}_x\hat{J}_y,\hat{J}_z\right]+\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\hat{J}_z\right]&=\hat{J}_x\left[\hat{J}_y,\hat{J}_z\right]+\left[\hat{J}_x,\hat{J}_z\right]\hat{J}_y+\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right]\hat{J}_z+\hat{J}_y\left[\hat{J}_x,\hat{J}_z\right]\\&=\hat{J}_x\left(i\hbar J_x\right)+\left(-i\hbar\right)\hat{J}_y\hat{J}_y+\left(i\hbar\hat{J}_z\right)\hat{J}_z+\hat{J}_y\left(-i\hbar\hat{J}_y\right)\\&=i\hbar\left(\hat{J}_x^2-2\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2\right)\end{aligned}$$

تمرین ۵-۳۷

ویژه مقدارهای عملگرهای $\hat{\vec{L}}^2$ و $\hat{L}_z$ را برای هریک از حالت‌های زیر پیدا کنید:

(آ) $Y_{21}(\theta,\varphi)$

(ب) $Y_{2-2}(\theta,\varphi)$

(پ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[Y_{22}(\theta,\varphi)+Y_{2-2}(\theta,\varphi)\right]$

(ت) $Y_{40}(\theta,\varphi)$

حل:

(آ)

برای یافتن ویژه مقادیر $\hat{\vec{L}}^2$ و $\hat{L}_z$، اثر آنها را بر روی حالت‌های داده شده می‌یابیم.

$$L^2Y_{21}(\theta,\varphi)=2(2+1)\hbar^2Y_{21}(\theta,\varphi)=6\hbar^2Y_{21}(\theta,\varphi)$$
$$L_zY_{21}(\theta,\varphi)=1\hbar Y_{21}(\theta,\varphi)=\hbar Y_{21}(\theta,\varphi)$$

پس ویژه مقادیر $\hat{L}^2,\hat{L}_z$ به‌ترتیب $\hbar,6\hbar^2$ هستند.

(ب)

برای این حالت، ویژه مقدار $\hat{L}^2$، $12\hbar^2$ و ویژه مقدار $\hat{L}_z$، $-2\hbar$ است.

(پ)

$$\begin{aligned}\hat{L}^2\frac{1}{\sqrt{2}}\left[Y_{22}(\theta,\varphi)+Y_{2-2}(\theta,\varphi)\right]&=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{L}^2Y_{22}(\theta,\varphi)+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{L}^2Y_{2-2}(\theta,\varphi)\\&=12\hbar^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{22}(\theta,\varphi)+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{2-2}(\theta,\varphi)\right)\end{aligned}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{L}_z \frac{1}{\sqrt{2}}\left[Y_{22}(\theta,\varphi)+Y_{2-2}(\theta,\varphi)\right]=2\hbar\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{22}(\theta,\varphi)-\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{2-2}(\theta,\varphi)\right)$$

پس حالت داده شده، ویژه حالت $\hat{L}^2$ با ویژه مقدار $12\hbar^2$ است ولی ویژه حالت $\hat{L}_z$ نیست.

(ت)

حالت داده شده، ویژه حالت $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ با ویژه مقدار $2\hbar^2$ و صفر است.

تمرین ۵-۳۸

با استفاده از رابطه‌های کلی زیر:

$$|\psi_x\rangle_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\pm\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right],\quad |\psi_y\rangle_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\pm i\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right]$$

معادله‌های ویژه مقداری زیر را ثابت کنید:

$$\hat{S}_x|\psi_x\rangle_\pm=\pm\frac{\hbar}{2}|\psi_x\rangle_\pm\quad,\quad \hat{S}_y|\psi_y\rangle_\pm=\pm\frac{\hbar}{2}|\psi_y\rangle_\pm$$

حل:

با توجه به‌اینکه:

$$\hat{S}_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$$

$$|\psi_x\rangle_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\pm i\end{pmatrix}$$

لذا داریم:

$$\hat{S}_x|\psi_x\rangle_\pm=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\pm1\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\pm1\\1\end{pmatrix}=\pm\frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\pm1\end{pmatrix}=\pm\frac{\hbar}{2}|\psi_x\rangle_\pm$$

و

$$\hat{S}_y|\psi_y\rangle_\pm=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\pm i\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\pm1\\i\end{pmatrix}=\pm\frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\pm i\end{pmatrix}=\pm\frac{\hbar}{2}|\psi\rangle_\pm$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

فصل ششم

مسأله‌های سه بُعدی

تمرین ۶-۱

ذره‌ای بدون اسپین به جرم m محدود به حرکت در صفحه‌ی xy تحت اثر پتانسیل نوسانگر هماهنگ $\hat{V}(x,y)=\frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}^2+\hat{y}^2\right)$ برای همه‌ی مقادیر x و y است.

(آ) نشان دهید که هامیلتونی $\hat{H}$ این ذره را می‌توان به صورت جمع دو هامیلتونی یک‌بعدی آشنای $\hat{H}_x$ و $\hat{H}_y$ نوشت. سپس نشان دهید که $\hat{H}$ با $\hat{L}_z=\hat{X}\hat{P}_y-\hat{Y}\hat{P}_x$ جابه‌جا می‌شود.

(ب) عبارتی برای ترازهای انرژی $E_{n_xn_y}$ بیابید.

(پ) انرژی‌های پایین‌ترین چهار تراز و تبهگنی‌های متناظر آن‌ها را بیابید.

(ت) تبهگنی g_n حالت برانگیخته‌ی nاُم را به‌صورت تابعی از عدد کوانتومی $n\left(n=n_x+n_y\right)$ بیابید.

(ث) اگر بردار حالت n اُمین حالت برانگیخته $\langle xy|n\rangle=\langle x|n_x\rangle\langle y|n_y\rangle=\psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)$ با $|n\rangle=|n_x\rangle|n_y\rangle$ باشد، مقدار چشمداشتی عملگر $\hat{A}=\hat{x}^4+\hat{y}^2$ را در حالت $|n\rangle$ به‌صورت تابعی از اعداد کوانتومی n_x و n_y محاسبه کنید.

حل:

این پتانسیل دو بعدی شامل دو پتانسیل مستقل یک بُعدی است.

۱. نوسانگر هارمونیک در امتداد محور x

۲. نوسانگر هارمونیک در امتداد محور y

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پس انرژی توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$E_{n_x n_y} = \hbar w\left(n_x + \frac{۱}{۲}\right) + \hbar w\left(n_y + \frac{۱}{۲}\right) = \hbar w\left(n_x + n_y + ۱\right)$$

اما برای محاسبه‌ی $\left[\hat{H}, \hat{L}_z\right]$ داریم:

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_z\right] = \left[\frac{\hat{P}^۲}{۲m} + \hat{V}\left(\hat{x}, \hat{y}\right), \hat{L}_z\right] = \left[\frac{\hat{P}^۲}{۲m} + \frac{۱}{۲}mw^۲\hat{x}^۲ + \frac{۱}{۲}mw^۲\hat{y}^۲, \hat{L}_z\right]$$

$$= \frac{۱}{۲m}\left[\hat{P}^۲, \hat{L}_z\right] + \frac{۱}{۲}mw^۲\left[\hat{x}^۲, \hat{L}_z\right] + \frac{۱}{۲}mw^۲\left[\hat{y}^۲, \hat{L}_z\right]$$

با توجه به حل ارائه شده در تمرین (۵-۱) داریم:

$$\left[\hat{P}^۲, \hat{L}_z\right] = ۰, \left[\hat{x}^۲, \hat{L}_z\right] = ۰, \left[\hat{y}^۲, \hat{L}_z\right] = ۰$$

لذا:

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_z\right] = ۰$$

چهار حالت با پایین‌ترین انرژی عبارتند از:

$E_{n_x+n_y=۰} = E_{۰۰} = \hbar w$; بدون تبهگنی

$E_{n_x+n_y=۱} = E_{۰۱} = E_{۱۰} = ۲\hbar w$; تبهگنی دوگانه

$E_{n_x+n_y=۲} = E_{۱۱} = E_{۲۰} = E_{۰۲} = ۳\hbar w$; تبهگنی سه‌گانه

$E_{n_x+n_y=۳} = E_{۲۰} = E_{۰۳} = E_{۱۲} = E_{۲۱} = ۴\hbar w$; تبهگنی چهارگانه

بنابراین g_n، تبهگنی مربوط به حالت برانگیخته nاُم، عبارتست از:

$$g_n = n + ۱$$

برای محاسبه‌ی مقدار چشمداشتی عملگر $\hat{A}$ با استفاده از حالت $|n\rangle$ داریم:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle_n = \left\langle n_y \middle| \left\langle n_x \middle| \hat{x}^۴ \middle| n_x \right\rangle \middle| n_y \right\rangle + \left\langle n_x \middle| \left\langle n_y \middle| \hat{y}^۲ \middle| n_y \right\rangle \middle| n_x \right\rangle$$

$$= \left\langle n_y \middle| n_y \right\rangle \left\langle n_x \middle| \hat{x}^۴ \middle| n_x \right\rangle + \left\langle n_x \middle| n_x \right\rangle \left\langle n_y \middle| \hat{y}^۲ \middle| n_y \right\rangle$$

$$= \left\langle n_x \middle| \hat{x}^۴ \middle| n_x \right\rangle + \left\langle n_y \middle| \hat{y}^۲ \middle| n_y \right\rangle = \left\langle n_x \middle| \hat{x}^۴ \middle| n_x \right\rangle + \frac{\hbar}{۲mw}\left(۲n_y + ۱\right)$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی ۴-۱۸۴ داریم:

$$|\alpha\rangle = \hat{x}^۲|n_x\rangle = \frac{\hbar}{۲mw}\left(\hat{a}_x^۲ + a_x^{\dagger ۲} + ۲\hat{a}_x^{\dagger}\hat{a}_x + ۱\right)|n_x\rangle$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{\hbar}{۲mw}\left(\sqrt{n_x}\sqrt{n_x - ۱}\right)\left|n_x - ۲\right\rangle + \sqrt{n_x + ۱}\sqrt{n_x + ۲}\left|n_x + ۲\right\rangle + \left(۲n_x + ۱\right)\left|n_x\right\rangle\Big)$$

$$\left\langle n_x \left| \hat{x}^۴ \right| n_x \right\rangle = \left\langle \alpha | \alpha \right\rangle = \left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^۲ \left(n_x^۲ - n_x + n_x^۲ + ۳n_x + ۲ + ۴n_x^۲ + ۴n_x + ۱\right)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^۲ \left(۶n_x^۲ + ۶n_x + ۳\right)$$

پس:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle_n = \left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^۲ \left(۶n_x^۲ + ۶n_x + ۳\right) + \frac{\hbar}{۲mw}\left(۲n_y + ۱\right)$$

تمرین ۶-۲

ذره‌ای به جرم m در صفحه‌ی xy در پتانسیل

$$V(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}m\omega^۲y^۲ & ۰ < x < a \quad \text{برای همه } y\text{ها} \\ +\infty & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

حرکت می‌کند.

(آ) معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان را برای این ذره بنویسید و آن را به مجموعه‌ای از معادلات یک‌بُعدی آشنا، ساده کنید.

(ب) ویژه توابع بهنجار شده و ویژه مقدارهای انرژی را بیابید.

حل:

با توجه به معادله‌ی شرودینگر:

$$\hat{H}\psi(x,y) = E\psi(x,y)$$

لذا $\psi(x,y)$ در همه جا صفر است مگر در ناحیه‌ی $۰ < x < a$ و برای این ناحیه داریم:

$$\left(\frac{\hat{P}_x^۲}{۲m} + \frac{\hat{P}_y^۲}{۲m} + \frac{۱}{۲}mw^۲y^۲\right)\psi(x,y) = E\psi(x,y)$$

با تعریف:

$$\psi(x,y) = X(x)Y(y)$$

داریم:

$$Y(y)\frac{\hat{p}_x^۲}{۲m}X(x) + X(x)\left(\frac{\hat{P}_y^۲}{۲m} + \frac{۱}{۲}mw^۲\hat{y}^۲\right)Y(y) = EX(x)Y(y)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

با تقسیم طرفین رابطه‌ی فوق بر $X(x)Y(y)$ داریم:

$$\frac{۱}{X(x)}\frac{\hat{P}_x^۲}{۲m}X(x)+\frac{۱}{Y(y)}\left(\frac{P_y^۲}{۲m}+\frac{۱}{۲}mw^۲\hat{y}^۲\right)Y(y)=E$$

این معادله منجر می‌شود به دو معادله‌ی زیر:

$$\frac{P_x^۲}{۲m}X(x)=E_xX(x)$$

و

$$\left(\frac{P_y^۲}{۲m}+\frac{۱}{۲}mw^۲\hat{y}^۲\right)Y(y)=E_yY(y)$$

به‌طوری که:

$$E=E_x+E_y$$

واضح است که:

$$X_{n_x}(x)=\sqrt{\frac{۲}{x}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right),\quad Y_{n_y}(y)=\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,۲^{۲n_y}n_y!y_۰}}e^{\frac{-y^۲}{۲y_۰^۲}}H_{n_y}\left(\frac{y}{y_۰}\right)$$

و بنابراین:

$$\psi_{n_xn_y}(x,y)=\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right)\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,۲^{۲n_y}n_y!y_۰}}e^{\frac{-y^۲}{۲y_۰^۲}}H_{n_y}\left(\frac{y}{y_۰}\right)$$

و

$$E_{n_xn_y}=\frac{n_x^۲\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}+\hbar w\left(n_y+\frac{۱}{۲}\right)$$

تمرین ۶-۳

ذره‌ای به جرم m در صفحه‌ی xy در چاه مستطیلی دوبُعدی زیر:

$$V(x,y)=\begin{cases}۰ & ۰<x<a\ ,۰<y<b\\ +\infty & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

حرکت می‌کند. با ساده‌سازی معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان به مجموعه‌ای از معادلات یک‌بُعدی آشناتر، توابع موج و ترازهای انرژی این ذره را بیابید.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

در واقع پتانسیل داده شده شامل دو پتانسیل یک بُعدی مستقل است:

۱. ذره در جعبه در امتداد محور x با دیواره‌های واقع در $x=0$ و $x=a$

۲. ذره در جعبه در امتداد محور y با دیواره‌های واقع در $y=0$ و $y=b$

پس:

$$\psi_{n_x n_y}(x,y)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right)\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{n_y\pi y}{b}\right)$$

$$E_{n_x n_y}=\frac{n_x^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}+\frac{n_y^2\pi^2\hbar^2}{2mb^2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}\right)$$

تمرین ۶-۴

پتانسیل نوسانگر هماهنگ سه‌بُعدی ناهمسانگرد زیر را درنظر بگیرید:

$$V(x,y)=\frac{1}{2}m\left(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2\right)$$

(آ) ترازهای انرژی را برحسب ω_x، ω_yو ω_z محاسبه کنید.

(ب) $\left[\hat{H},\hat{L}_z\right]$ را حساب کنید. آیا انتظار دارید توابع موج، ویژه توابع $\hat{L}^2$ باشند؟

(پ) پایین‌ترین سه تراز انرژی را برای حالت $\omega_x=\omega_y=2\omega/3$ بیابید و تبهگنی هر تراز را مشخص کنید.

حل:

(آ)

پتانسیل سه بُعدی داده شده در این مسأله در واقع شامل سه پتانسیل یک بُعدی مستقل است:

۱. نوسانگر هارمونیک با فرکانس w_x در امتداد محور x

۲. نوسانگر هارمونیک با فرکانس w_y در امتداد محور y

۳. نوسانگر هارمونیک با فرکانس w_z در امتداد محور z

بنابراین:

$$E_{n_x n_y n_z}=\hbar w_x\left(n_x+\frac{1}{2}\right)+\hbar w_y\left(n_y+\frac{1}{2}\right)+\hbar w_z\left(n_z+\frac{1}{2}\right)$$

(ب)

با توجه به تمرین ۵-۱ و ۵-۲ و حل ارائه شده برای آنها داریم:

$$\left[\hat{x}^2,\hat{L}_z\right]=\left[\hat{y}^2,\hat{L}_z\right]=\left[\hat{z}^2,\hat{L}_z\right]=0$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

و

$$\left[\hat{P}^2, \hat{L}_z\right] = 0$$

بنابراین:

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_z\right] = \frac{1}{2m}\left[\hat{P}^2, \hat{L}_z\right] + \frac{1}{2}mw_x^2\left[\hat{x}^2, \hat{L}_z\right] + \frac{1}{2}mw_y^2\left[\hat{y}^2, \hat{L}_z\right] + \frac{1}{2}mw_z^2\left[\hat{z}^2, \hat{L}_z\right] = 0$$

از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_z^2\right] = 0$$

و به‌طور مشابه:

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_x^2\right] = \left[\hat{H}, \hat{L}_y\right] = 0$$

پس:

$$\left[\hat{H}, \hat{\vec{L}}^2\right] = \left[\hat{H}, \hat{L}_x^2 + L_y^2 + \hat{L}_z^2\right] = 0$$

چون $\hat{\vec{L}}^2, \hat{H}$ با هم جابه‌جا می‌شوند لذا ویژه توابع غیرتبهگن $\hat{H}$، ویژه توابع $\hat{\vec{L}}^2$ نیز خواهند بود.

(پ)

با فرض $w = \frac{2w_z}{3} = w_x = w_y$ داریم:

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar w\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar w\left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\hbar w\left(n_z + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \hbar w\left(n_x + n_y + \frac{3}{2}n_z + \frac{7}{4}\right) = \hbar w\left(n + \frac{7}{4}\right) = E_n$$

که در رابطه‌ی فوق $n = n_x + n_y + \frac{3}{2}n_z$ می‌باشد. بنابراین سه تراز با پایین‌ترین انرژی عبارتند از:

$E_0 = E_{000} = \frac{7}{4}\hbar w$; بدون تبهگنی

$E_1 = E_{100} = E_{010} = \frac{11}{4}\hbar w$; تبهگنی دوگانه

$E_{\frac{3}{2}} = E_{001} = \frac{13}{4}\hbar w$; بدون تبهگنی

تمرین ۶-۵

ذره‌ای بدون اسپین و به جرم m را درنظر بگیرید که محدود به حرکت تحت اثر پتانسیل سه‌بُعدی زیر است:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0 & 0<x<a, 0<y<a, 0<z<b \\ +\infty & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

(آ) عبارتی برای ترازهای انرژی $E_{n_x n_y n_z}$ و توابع موج متناظر آن‌ها بیابید.

(ب) اگر $a=2b$ باشد، انرژی‌های پایین‌ترین پنج تراز انرژی و تبهگنی‌های آن‌ها را بیابید.

حل:

(آ)

در واقع پتانسیل داده شده شامل سه پتانسیل مستقل یک بعدی است:

۱. ذره در جعبه در امتداد محور x با دیواره‌های واقع در $x=0$ و $x=a$

۲. ذره در جعبه در امتداد محور y با دیواره‌های واقع در $y=0$ و $y=a$

۳. ذره در جعبه در امتداد محور z با دیواره‌های واقع در $z=0$ و $z=b$

بنابراین:

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right)\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_y\pi y}{a}\right)\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{n_z\pi z}{b}\right)$$

$$E_{n_x n_y n_z}=\frac{\hbar^2\pi^2 n_x^2}{2ma^2}+\frac{\hbar^2\pi^2 n_y^2}{2ma^2}+\frac{\hbar^2\pi^2 n_z^2}{2mb^2}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{a^2}+\frac{n_z^2}{b^2}\right)$$

(ب)

اگر $a=2b$ آنگاه:

$$E_{n_x n_y n_z}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{4b^2}+\frac{n_y^2}{4b^2}+\frac{n_z^2}{b^2}\right)=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m(4b^2)}\left(n_x^2+n_y^2+4n_z^2\right)=\frac{\hbar^2\pi^2}{8mb^2}n^2=E_n$$

به‌طوری‌که:

$$n^2=n_x^2+n_y^2+4n_z^2$$

پس پنج حالت با پایین‌ترین انرژی عبارتند از:

$$E_{\sqrt{6}}=E_{111}=\frac{6\hbar^2\pi^2}{8mb^2} \quad ; \quad \text{بدون تبهگنی}$$

$$E_2=E_{211}=E_{121}=\frac{9\hbar^2\pi^2}{8mb^2} \quad ; \quad \text{تبهگنی دوگانه}$$

$$E_{\sqrt{12}}=E_{221}=\frac{12\hbar^2\pi^2}{8mb^2} \quad ; \quad \text{بدون تبهگنی}$$

$$E_{\sqrt{14}}=E_{311}=E_{131}=\frac{14\hbar^2\pi^2}{8mb^2} \quad ; \quad \text{تبهگنی دوگانه}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_{\sqrt{۱۷}} = E_{۲۲۱} = E_{۲۳۱} = \frac{۱۷h^۲\pi^۲}{۸mb^۲} \quad ; \quad \text{تبهگنی دوگانه}$$

تمرین ۶-۶

ذره‌ای به جرم m در پتانسیل سه‌بعدی زیر حرکت می‌کند:

$$V(x,y,z) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}m\omega^۲z^۲ & ۰<x<a, ۰<y<a \ , z>۰ \\ +\infty & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(آ) معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان را برای این ذره بنویسید و آن را به مجموعه‌ای از معادلات یک‌بُعدی آشنا ساده کنید. آن‌گاه توابع موج بهنجار $\psi_{n_xn_yn_z}(x,y,z)$ را بیابید.

(ب) ویژه مقدارهای مجاز انرژی این ذره را بیابید و نشان دهید که می‌توان آن‌ها را به‌صورت $E_{n_xn_yn_z} = E_{n_xn_y} + E_{n_z}$ نوشت.

(پ) پایین‌ترین چهار تراز انرژی را در صفحه‌ی xy (یعنی $E_{n_xn_y}$) و تبهگنی‌ها متناظر آن‌ها را بیابید.

حل:

(آ)

با توجه به معادله‌ی شرودینگر:

$$\left[\frac{\hat{\vec{p}}^۲}{۲m} + \hat{V}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})\right]\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)$$

$\psi(x,y,z)$ فقط در ناحیه‌ی $۰<x<a, ۰<y<a, z>۰$ غیرصفر است و در خارج از این ناحیه به علت نامتناهی بودن پتانسیل؛ صفر است. برای ناحیه‌ی مذکور با تعریف $\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ داریم:

$$\left(\frac{\hat{p}_x^۲}{۲m} + \frac{\hat{p}_y^۲}{۲m} + \frac{\hat{p}_z^۲}{۲m} + \frac{۱}{۲}m\omega^۲\hat{z}^۲\right)X(x)Y(y)Z(z) = EX(x)Y(y)Z(z)$$

در نتیجه:

$$YZ\frac{\hat{p}_x^۲}{۲m}X + XZ\frac{\hat{p}_y^۲}{۲m}Y + XY\left(\frac{\hat{p}_z^۲}{۲m} + \frac{۱}{۲}m\omega^۲\hat{z}^۲\right)Z(z) = EXY(y)Z(z)$$

با تقسیم طرفین رابطه‌ی اخیر بر XYZ داریم:

$$\frac{۱}{X}\frac{\hat{p}_x^۲}{۲m}X + \frac{۱}{Y}\frac{\hat{p}_y^۲}{۲m}Y + \frac{۱}{Z}\left(\frac{\hat{p}_z^۲}{۲m} + \frac{۱}{۲}m\omega^۲\hat{z}^۲\right)Z(z) = E$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

در نتیجه:

$$\frac{\hat{P}_x^2}{2m}X = E_x X, \frac{\hat{P}_y^2}{2m}Y = E_y Y, \left(\frac{\hat{P}_z^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2\hat{z}^2\right)Z(z) = E_z Z$$

به‌طوری‌که:

$$E = E_x + E_y + E_z$$

واضح است که:

$$X_{n_x}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right) \; ; \; n_x = 1,2,....$$

$$Y_{n_y}(y) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_y\pi y}{a}\right) \; ; \; n_y = 1,2,...$$

و جواب $Z(z)$ همان جواب نوسانگر هارمونیک است. اما چون تابع موج باید در $z = 0$ صفر شود، لذا فقط جواب‌های با پاریته فرد قابل قبول هستند یعنی:

$$Z_{n_z}(z) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n_z! z_0}} e^{\frac{-z^2}{2z_0^2}} H_{n_z}\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad ; \quad n_z = 1,3,5,...$$

لذا:

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right)\sin\frac{n_y\pi y}{a}Z_{n_z}(z); \quad n_x = 1,2,... \; , n_y = 1,2,... \; , n_z = 1,3,5,...$$

(ب)

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{n_x^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + \frac{n_y^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + \hbar w\left(n_z + \frac{1}{2}\right) = E_{n_x n_y} + E_{n_z}$$

به‌طوری‌که:

$$E_{n_x n_y} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(n_x^2 + n_y^2\right) \quad , \quad E_{n_z} = \hbar w\left(n_z + \frac{1}{2}\right)$$

(پ)

با تعریف:

$$E_n = E_{n_x n_y} = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

که در آن $n^2 = n_x^2 + n_y^2$ می‌باشد. چهار حالت با پایین‌ترین انرژی در صفحه‌ی xy عبارتند از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_{\sqrt{۲}} = E_{۱۱} = \frac{۲\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲} \quad ; \quad \text{بدون تبهگنی}$$

$$E_{\sqrt{۵}} = E_{۱۲} = E_{۲۱} = \frac{۵\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲} \quad ; \quad \text{تبهگنی دوگانه}$$

$$E_{\sqrt{۸}} = E_{۲۲} = \frac{۸\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲} \quad ; \quad \text{بدون تبهگنی}$$

$$E_{\sqrt{۱۰}} = E_{۲۱} = E_{۱۲} = \frac{۱۰\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲} \quad ; \quad \text{تبهگنی دوگانه}$$

تمرین ۶-۷

ذره‌ای به جرم m در پتانسیل $V(x,y,z)=V_۱(x,y)+V_۲(z)$ حرکت می‌کند که در آن

$$V_۱(x,y)=\frac{۱}{۲}m\omega^۲\left(x^۲+y^۲\right) \text{ و } V_۲(z)=\begin{cases} ۰ & ۰\le z\le a \\ +\infty & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(آ) ترازهای انرژی و تابع موج این ذره را محاسبه کنید.

(ب) اکنون $V_۲(z)$ را خاموش کنیم (یعنی m تنها در معرض $V_۱(x,y)$ قرار دارد) تبهگنی g_n تراز انرژی nاُم را محاسبه کنید (توجه کنید که $n=n_x+n_y$).

حل:

(آ)

پتانسیل داده شده را می‌توان به‌صورت مجموع سه پتانسیل مشکل یک بُعدی نوشت:

۱. نوسانگر هارمونیک یک بعدی با فرکانس w در امتداد محور x

۲. نوسانگر هارمونیک یک بعدی با فرکانس w در امتداد محور y

۳. ذره در جعبه در امتداد محور z با دیواره‌های واقع در $z=۰$ و $z=a$.

پس طبق بحثی که در متن کتاب وجود دارد داریم:

$$\psi_{n_xn_yn_z}=X_{n_x}(x)Y_{n_y}(y)\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{n_z\pi z}{a}\right)$$

به‌طوری‌که $X_{n_x}(x)$ و $Y_{n_y}(y)$ ویژه توابع نوسانگر هماهنگ یک بعدی با فرکانس w به‌ترتیب در امتداد محورهای x و y هستند و:

$$E_{n_xn_yn_z}=\hbar w\left(n_x+\frac{۱}{۲}\right)+\hbar w\left(n_y+\frac{۱}{۲}\right)+\frac{\hbar^۲\pi^۲n_z^۲}{۲ma^۲}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

اگر $V_۲(z)$ خاموش شود در این‌صورت در امتداد محور z، ذره آزاد خواهد شد و خواهیم داشت:

$$E_{n_x n_y}(k_z) = \hbar w(n_x + n_y + ۱) + \frac{\hbar^۲ k_z^۲}{۲m}$$

که در اینجا k_z هر مقدار حقیقی را می‌تواند اختیار کند. بنابراین کلیه‌ی حالت‌های $\psi_{n_x n_y}(\pm k_z; x, y, z)$ که در مورد آنها $n_x + n_y = n$ باشد، تبهگن هستند و دارای انرژی:

$$E_{n_x n_y}(k_z) = \hbar w(n + ۱) + \frac{\hbar^۲ k_z^۲}{۲m}$$

می‌باشند. پس تبهگنی مربوط به سطح انرژی nاُم عبارتست از:

$$g_n = ۲(n + ۱)$$

تمرین ۶-۸

یک اتم مئونی را درنظر بگیرید که شامل هسته‌ای با z پروتون (بدون نوترون) و یک مئون منفی در حال حرکت حول آن است. بار مئون $e-$ و جرم آن ۲۰۷ برابر جرم الکترون است، $(m_\mu = ۲۰۷ m_e)$.
برای یک اتم مئونی با $Z = ۶$ موارد زیر را محاسبه کنید:

(آ) شعاع نخستین مدار بور

(ب) انرژی‌های حالت پایه، اولین و دومین حالت برانگیخته

(پ) بسامد وابسته به گذارهای

$$n_i = ۲ \to n_f = ۱ \qquad n_i = ۳ \to n_f = ۱ \qquad n_i = ۳ \to n_f = ۲$$

حل:

(آ)

طبق رابطه‌ی مربوط به شعاع داریم:

$$r_n = \frac{۴\pi\varepsilon_۰ \hbar^۲}{\mu e^۲} n^۲$$

که در آن:

$$\frac{۱}{\mu} = \frac{۱}{m_{\mu_۰}} + \frac{۱}{m_p}$$

در واقع می‌توان نوشت:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$r_n = \frac{۴\pi\varepsilon_۰\hbar^۲ n^۲}{m_e e^۲}\frac{m_e}{\mu} \simeq ۰/۰۰۵۴ n^۲ a_۰$$

که در این رابطه $a_۰$ شعاع بور است که مقداری برابر ۰/۰۵۳nm دارد بنابراین:

$$r_۱ = ۰/۰۰۵۴ \times ۰/۰۵۳\text{nm} \simeq ۲/۹ \times ۱۰^{-۱۲}\text{m}$$

(ب)

طبق رابطه‌ی ۶-۱۵۱ داریم:

$$E_n = -\frac{m_\mu \left(Ze^۲\right)^۲}{۲\hbar^۲}\frac{۱}{n^۲} = \frac{-۲۰۷ \times ۱۳/۶\text{eV}}{n^۲} = \frac{-۲۸۱۵/۲\text{eV}}{n^۲}$$

بنابراین اگر انرژی حالت پایه، اولین حالت برانگیخته و دومین حالت برانگیخته را به‌ترتیب با E_g، E_{fe} و E_{se} نشان دهیم، داریم:

$$E_g = \frac{-۲۸۱۵/۲\text{eV}}{۲} = -۲۸۱۵/۲\text{eV}$$

$$E_{fe} = \frac{E_g}{۴} = -۷۰۳/۸\text{eV}$$

$$E_{se} = \frac{E_g}{۹} = -۳۱۲/۸\text{eV}$$

(پ)

w_{if} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w_{if} = \frac{E_i - E_f}{\hbar} = \frac{E_g}{\hbar}\left(\frac{۱}{n_i^۲} - \frac{۱}{n_f^۲}\right) = ۴۲/۸ \times ۱۰^{۱۷}\left(\frac{۱}{n_f^۲} - \frac{۱}{n_i^۲}\right)\text{Hz}$$

پس:

$$w_{۲۱} = \frac{۳}{۴} \times ۴۲/۸ \times ۱۰^{۱۷}\text{Hz} = ۳۲/۱ \times ۱۰^{۱۷}\text{Hz}$$

$$w_{۳۱} = \frac{۸}{۹} \times ۴۲/۸ \times ۱۰^{۱۷}\text{Hz} = ۳۸ \times ۱۰^{۱۷}\text{Hz}$$

$$w_{۳۲} = \frac{۵}{۳۶} \times ۴۲/۸ \times ۱۰^{۱۷}\text{Hz} = ۶ \times ۱۰^{۱۷}\text{Hz}$$

تمرین ۶-۹

اتم هیدروژنی دارای تابع موج $\Psi_{nlm}(\vec{r})$ است که در آن $n=۴$، $l=۳$ و $m=۳$.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ) بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون حول پروتون چه‌قدر است؟
(ب) زاویه‌ی میان بردار اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و محور z چه‌قدر است؟ آیا با ثابت نگه‌داشتن l می‌توان با تغییر n یا m این زاویه را کاهش داد؟ مفهوم فیزیکی این نتیجه چیست؟
(پ) شکل‌های تابع شعاعی و احتمال یافتن الکترون در فاصله‌ی r از پروتون را رسم کنید.

حل:

(آ)

$\hat{\vec{L}}^2$ را بر روی تابع موج داده شده اثر می‌دهیم:

$$\hat{\vec{L}}^2\,\psi_{۴۳۲}(\vec{r}) = ۳(۳+۱)\hbar^2\psi_{۴۳۲}(\vec{r}) = ۱۲\hbar^2\psi_{۴۳۲}(\vec{r})$$

بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون حول پروتون $\sqrt{۱۲}\hbar$ است.

(ب)

در حالت کلی اگر تابع موج توصیف کننده‌ی سیستم، ویژه تابع مشترک $\hat{\vec{L}}^2$ و $\hat{L}_z$ با ویژه مقادیر $l(l+۱)\hbar^2$ و $m\hbar$ باشد دراین‌صورت α زاویه‌ی بین بردار اندازه حرکت زاویه‌ای و محور zها از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \frac{L_z}{|\vec{L}|} = \frac{m\hbar}{\hbar\sqrt{l(l+۱)}} = \frac{m}{\sqrt{l(l+۱)}} \qquad (*)$$

در اینجا چون $l = ۳$ و $m = ۳$ است لذا:

$$\cos\alpha = \frac{۳}{\sqrt{۳\times۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس:

$$\alpha = \frac{\pi}{۶}$$

طبق رابطه‌ی (*) واضح است که برای یک l ثابت، با تغییر n، α تغییر نمی‌کند اما با افزایش m، α کاهش می‌یابد.

(پ)

طبق رابطه‌ی ۶-۱۷۰ داریم:

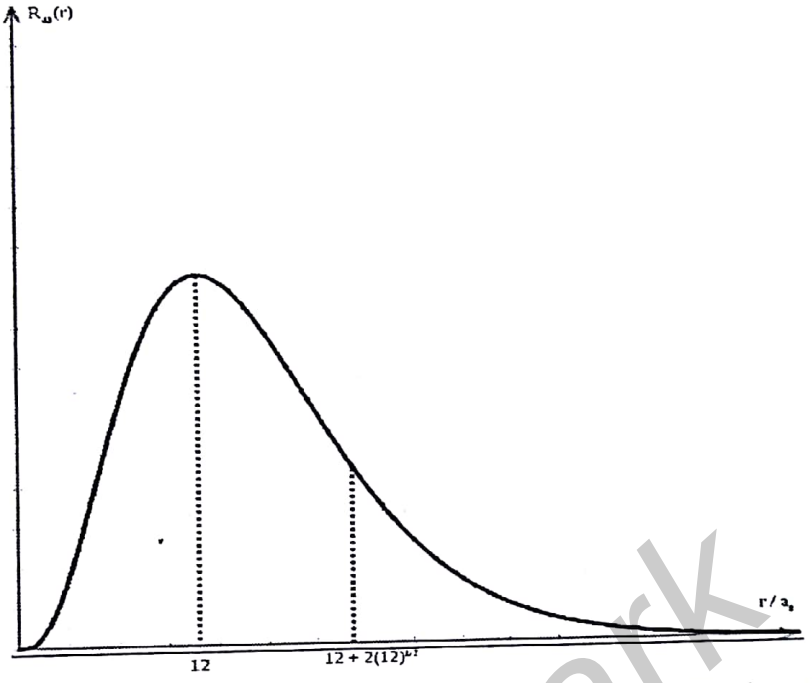
$$R_{۴۳}(r) = -\left(\frac{۲}{۴a_۰}\right)^{\frac{۳}{۲}}\sqrt{\frac{(۴-۳-۱)!}{۲\times۴(۵!)^3}}\left(\frac{۲r}{۴a_۰}\right)^3 e^{-\frac{r}{۴a_۰}}L_۷^۷\left(\frac{۲r}{۴a_۰}\right)$$

اما با توجه به‌اینکه $L_۷^۷ = -۷!$ می‌باشد لذا:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$R_{۴۲}(r)=C\left(\frac{r}{a_{\circ}}\right)^{۲}e^{\frac{-r}{۴a_{\circ}}}$$

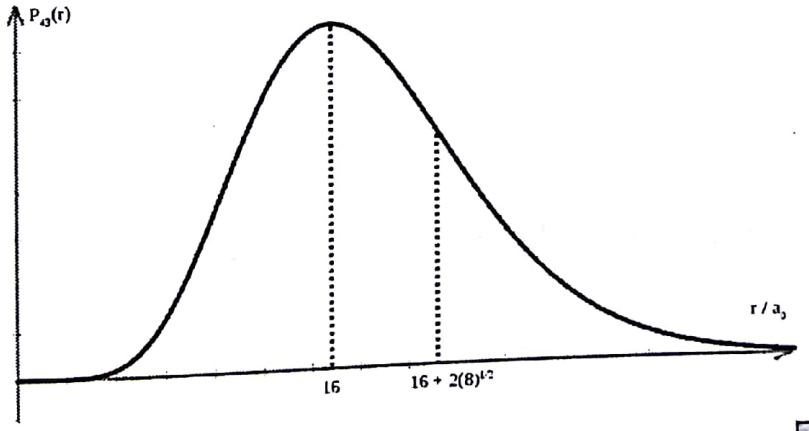
که در این رابطه، C مقدار ثابت مثبتی است. بنابراین:



از طرفی طبق رابطه‌ی ۶-۲۶۴ نیز داریم:

$$P_{۴۲}(r)=C'\left(\frac{r}{a_{\circ}}\right)^{۸}e^{\frac{-r}{۲a_{\circ}}}$$

که در این رابطه نیز C' مقدار ثابت مثبتی است. بنابراین:



تمرین ۶-۱۰

الکترونی در اتم هیدروژن در ویژه حالت انرژی زیر است:

$$\Psi_{۲۱-۱}(r,\theta,\varphi)=Nre^{-r/۲a_{\circ}}Y_{۱-۱}(\theta,\varphi)$$

(آ) N ثابت بهنجارش را بیابید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب) احتمال یافتن الکترون در واحد حجم در $r=a_0$، $\theta=45^\circ$ و $\varphi=60^\circ$ چیست؟

(پ) احتمال یافتن الکترون در واحد بازه‌ی شعاعی (dr) در $r=2a_0$ چیست؟ (باید انتگرال روی θ و φ در $r=2a_0$ گرفته شود).

(ت) اگر اندازه‌گیری‌های $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ انجام شوند نتایج چه خواهند بود؟

حل:

(آ)

برای یافتن N از شرط بهنجارش استفاده می‌کنیم که عبارتست از:

$$\int_W \left|\psi_{21-1}\right|^2 dv = 1$$

پس:

$$1 = |N|^2 \int_0^{+\infty} r^2 e^{\frac{-r}{a_0}} r^2 dr \int_W \left|Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right|^2 d\Omega = |N|^2 \int_0^{+\infty} r^4 e^{\frac{-r}{a_0}} dr$$

$$= \left[-a_0 e^{\frac{-r}{a_0}} \left(r^4 + 4a_0 r^3 + 12a_0^2 r^2 + 24a_0^3 r + 24a_0^4\right)\right]_0^{+\infty} |N|^2 = 24a_0^5 |N|^2$$

پس با فرض حقیقی و مثبت بودن N داریم:

$$N = \frac{1}{\sqrt{24a_0^5}} = \frac{1}{2a_0^2\sqrt{6a_0}}$$

منظور از W در $\int_{W_0}$، تمام فضا می‌باشد.

(ب)

چگالی احتمال در واقع همان $\rho = \left|\psi_{21-1}\right|^2$ می‌باشد. پس:

$$\rho\left(r=a_0,\theta=45^\circ,\varphi=60^\circ\right) = \left[N^2 r^2 e^{\frac{-r}{a_0}} \left|Y_{1-1}(\theta,\varphi)\right|^2\right]_{r=a_0,\theta=45^\circ,\varphi=60^\circ}$$

$$= \frac{1}{24a_0^5} a_0^2 e^{-\frac{a_0}{a_0}} \left(\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin 45^\circ\right)^2 = \frac{1}{24a_0^2 e} \frac{3}{8\pi} \frac{1}{2} = \frac{1}{128\pi e a_0^2}$$

(پ)

طبق رابطه‌ی ۶-۱۷۸ داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$P_{۲۱}(r)=r^{۲}\left|R_{۲۱}(r)\right|^{۲}=N^{۲}r^{۴}e^{\frac{-r}{a_{۰}}}$$

پس:

$$P_{۲۱}(۲a_{۰})=\frac{(۲a_{۰})^{۴}}{۲۴a_{۰}^{۵}}e^{\frac{۲a_{۰}}{a_{۰}}}=\frac{۲}{۳a_{۰}e^{۲}}$$

(د)

در اندازه‌گیری $\hat{L}^{۲}$ و $\hat{L}_{z}$ به‌ترتیب مقادیر $۲\hbar^{۲}$ و $-\hbar$ حاصل می‌شود.

تمرین ۶-۱۱

اتم هیدروژنی را درنظر بگیرید که در حالت پایه‌ی خود است؛ تابع موج حالت پایه به‌صورت زیر است:

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=\frac{۱}{\sqrt{\pi a_{۰}^{۳}}}e^{-r/a_{۰}}$$

که در آن $a_{۰}$ شعاع بور است.

(آ) محتمل‌ترین فاصله‌ی میان الکترون و پروتون را درحالتی که اتم هیدروژن در حالت پایه‌ی خود است بیابید.

(ب) فاصله‌ی میانگین میان الکترون و پروتون را بیابید.

حل:

(آ)

طبق رابطه‌ی ۶-۲۶۵ داریم:

$$r_{۱}=۱^{۲}a_{۰}=a_{۰}$$

(ب)

طبق رابطه‌ی ۶-۲۳۳ داریم:

$$\langle ۱۰|r|۱۰\rangle=\frac{۱}{۲}\left[۳\times۱^{۲}-۰(۰+۱)\right]a_{۰}=\frac{۳}{۲}a_{۰}$$

تمرین ۶-۱۲

اتم هیدروژنی را درنظر بگیرید که حالت آن در زمان $t=۰$ به‌صورت زیر است:

$$\Psi(\vec{r},۰)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\phi_{۲۰۰}(\vec{r})+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\phi_{۲۱۱}(\vec{r})+\frac{۱}{\sqrt{۶}}\phi_{۲۲۲}(\vec{r})$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ) تابع موج وابسته به زمان آن چیست؟

(ب) اگر انرژی اندازه‌گیری شود، چه مقدارهایی و با چه احتمال‌هایی حاصل می‌شوند؟

(پ) قسمت (ب) را برای $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ تکرار کنید. یعنی اگر $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ اندازه‌گیری شوند، چه مقدارهایی و با چه احتمال‌هایی به دست می‌آیند؟

حل:

(آ)

از رابطه‌ی کلی $\psi(\vec{r},t)=e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}\psi(\vec{r},0)$ و با توجه به اینکه ϕ_{nlm} ویژه حالت‌های هامیلتونی با ویژه مقدار E_n هستند داریم:

$$\psi(\vec{r},t)=e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}\psi(\vec{r},0)=e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}}\psi(\vec{r},0)$$

(ب)

درواقع تابع موج سیستم ویژه تابع انرژی با ویژه مقدار E_2 است. پس در اندازه‌گیری انرژی، فقط مقدار E_2 و با احتمال یک حاصل می‌شود.

(پ)

در اندازه‌گیری $\hat{L}^2$ مقدار $l(l+1)\hbar^2$ با احتمال P_l حاصل می‌شود. در اینجا l مقادیر ۰، ۱ و ۲ را اختیار می‌کند و داریم:

احتمال اینکه در اندازه‌گیری $\hat{L}^2$ مقدار صفر حاصل شود: $P_0=|\langle 300|\psi\rangle|^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

احتمال اینکه در اندازه‌گیری $\hat{L}^2$ مقدار $2\hbar^2$ حاصل شود: $P_1=|\langle 311|\psi\rangle|^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$

احتمال اینکه در اندازه‌گیری $\hat{L}^2$ مقدار $6\hbar^2$ حاصل شود: $P_2=|\langle 322|\psi\rangle|^2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{1}{6}$

در اندازه‌گیری L_z مقدار $m\hbar$ با احتمال P'_m حاصل می‌شود. در اینجا m مقادیر ۰، ۱ و ۲ را اختیار می‌کند و داریم:

احتمال اینکه در اندازه‌گیری $\hat{L}_z$ مقدار صفر حاصل شود: $P'_0=|\langle 300|\psi\rangle|^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}=$

احتمال اینکه در اندازه‌گیری $\hat{L}_z$ مقدار $\hbar$ حاصل شود: $P'_1=|\langle 311|\psi\rangle|^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}=$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

احتمال اینکه در اندازه‌گیری $\hat{L}_z$ مقدار $2\hbar$ حاصل شود: $P'_2 = \left|\langle 322|\psi\rangle\right|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{6}$

تمرین ۶-۱۳

تابع موج الکترون در یک اتم هیدروژن به‌صورت زیر داده شده است:

$$\Psi_{21m_l m_s}(r,\theta,\varphi) = R_{21}(r)\left[\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}(\theta,\varphi)\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_{11}(\theta,\varphi)\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle\right]$$

که در آن $\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle$ بردارهای حالت اسپینی هستند.

(آ) آیا این تابع موج ویژه تابعی از $\hat{J}_z$، مؤلفه‌ی z اندازه حرکت زاویه‌ای کل الکترون است؟ اگر بله، ویژه مقدار را بیابید. (راهنمایی: برای این منظور باید $\hat{J}_z\Psi_{21m_l m_s}$ را محاسبه کنید.)

(ب) اگر مؤلفه‌ی z اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی الکترون را اندازه‌گیری کنید چه مقدارهایی به‌دست خواهید آورد؟ احتمال‌های متناظر چه هستند؟

(پ) اگر $\hat{J}^2$ را اندازه‌گیری کنید، چه مقدارهایی به‌دست خواهید آورد؟ احتمال‌های متناظر چه هستند؟

حل:

(آ)

برای پاسخ به سؤال مذکور، اثر $\hat{J}_z$ را روی $\Psi_{21m_l m_s}$ می‌یابیم. با توجه به اینکه $\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z$ است، لذا داریم:

$$\hat{J}_z\psi_{21m_l m_s} = \hat{L}_z\psi_{21m_l m_s} + \hat{S}_z\psi_{21m_l m_s}$$

اما:

$$\hat{L}_z\psi_{21m_l m_s} = R_{21}(r)\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(L_zY_{10}(\theta,\varphi)\right)\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(L_zY_{11}(\theta,\varphi)\right)\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle\right]$$

$$= R_{21}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\hbar Y_{11}(\theta,\varphi)\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle\right]$$

$$\hat{S}_z\psi_{21m_l m_s} = R_{21}(r)\left[\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}(\theta,\varphi)\hat{S}_z\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_{11}(\theta,\varphi)\hat{S}_z\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle\right]$$

$$= R_{21}(r)\left[\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}(\theta,\varphi)\frac{\hbar}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_{11}(\theta,\varphi)\left(\frac{-\hbar}{2}\right)\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle\right]$$

پس:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{J}_z\psi_{۲۱m_lm_s}=\frac{\hbar}{۲}R_{۲۱}\left[\frac{۱}{\sqrt{۳}}Y_{۱۰}(\theta,\varphi)\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۲}{۳}}Y_{۱۱}(\theta,\varphi)\left|\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle\right]=\frac{\hbar}{۲}\psi_{۲۱m_lm_s}$$

بنابراین $\psi_{۲۱m_lm_s}$ ویژه تابع $\hat{J}_z$ با ویژه مقدار $\frac{\hbar}{۲}$ است.

(ب)

در اندازه‌گیری مؤلفه‌ی z اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی الکترون یکی از مقادیر $\pm\frac{\hbar}{۲}$ و با احتمال $P_{\pm}$ حاصل می‌شود به‌طوری‌که:

$$P_+=\left|\left\langle\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\middle|\psi\right\rangle\right|^۲=\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^۲=\frac{۱}{۳}$$

$$P_-=\left|\left\langle\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\middle|\psi\right\rangle\right|^۲=\left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)^۲=\frac{۲}{۳}$$

وبعدها خواهیم دید که عبارات:

$$\left|۱\pm\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle=\sqrt{\frac{۱\mp\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۲\times۱+۱}}Y_{۱۱}(\theta,\varphi)\left|\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle\pm\sqrt{\frac{۱\pm\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۲\times۱+۱}}Y_{۱۰}\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle$$

ویژه حالت‌های همزمان دو عملگر $\hat{\vec{J}}^۲$ و $\hat{J}_z$ می‌باشند به‌طوری‌که:

$$\hat{\vec{J}}^۲\left|۱\pm\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle=\left(۱\pm\frac{۱}{۲}\right)\left(۱\pm\frac{۱}{۲}+۱\right)\hbar^۲\left|۱\pm\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle$$

$$\hat{J}_z\left|۱\pm\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle=\frac{\hbar}{۲}\left|۱\pm\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle$$

پس خواهیم داشت:

$$Y_{۱۱}\left|\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\left|\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۲}{۳}}\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle$$

$$Y_{۱۰}\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle=\sqrt{\frac{۲}{۳}}\left|\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle$$

با استفاده از روابط اخیر نتیجه می‌شود که:

$$\psi_{۲۱m_lm_s}(r,\theta,\varphi)=R_{۲۱}\left(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\left|\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle+\frac{۱}{۳}\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle\right)$$

پس در اندازه‌گیری $\hat{\vec{J}}^۲$ مقدار $\frac{۱۵}{۴}\hbar^۲$ و $\frac{۳}{۴}\hbar^۲$ با احتمال $P_{\frac{۳}{۲}}$ و $P_{\frac{۱}{۲}}$ یافت می‌شود به‌طوری‌که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$P_{\frac{3}{2}}=\left|\left\langle\frac{3}{2},\frac{1}{2}\middle|\psi_{21m_lm_s}\right\rangle\right|^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$$P_{\frac{1}{2}}=\left|\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|\psi_{21m_lm_s}\right\rangle\right|^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

تمرین ۶-۱۴

اتم هیدروژنی را در نظر بگیرید که حالت آن در زمان $t=0$ عبارت است از

$$\psi(\vec{r},0)=A\phi_{100}(\vec{r})+\frac{1}{\sqrt{5}}\phi_{211}(\vec{r})+\frac{1}{\sqrt{3}}\phi_{322}(\vec{r})$$

(آ) A را طوری بیابید که این حالت بهنجار شود.

(ب) حالت این اتم را در هر زمان بعدی t بیابید.

(پ) اگر اندازه‌گیری انرژی انجام شود، چه مقدارهایی و با چه احتمال‌هایی به دست خواهند آمد؟

(ت) انرژی میانگین اتم را بیابید.

حل:

(آ)

شرط بهنجارش آنست که احتمال یافتن ذره در تمام فضا برابر با یک باشد، یعنی:

$$\int_W|\psi(\vec{r})|^2\,dv=1$$

و با توجه به اینکه ϕ_{nlm}ها مجموعه کامل راست‌هنجاری را تشکیل می‌دهند، این شرط نتیجه می‌دهد:

$$|A|^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=1$$

در نتیجه:

$$A=|A|e^{i\delta}=\sqrt{\frac{7}{15}}e^{i\delta}$$

که در این رابطه، δ هر مقدار حقیقی دلخواهی می‌تواند باشد.

منظور از W در $\int_W$، تمام فضا می‌باشد.

(ب)

از رابطه‌ی $\psi(\vec{r},t)=e^{\frac{-iHt}{\hbar}}\psi(\vec{r},0)$ و با توجه به اینکه:

$$\hat{H}\psi_{nlm}(\vec{r})=E_n\psi_{nlm}(\vec{r})$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

نتیجه می‌شود که:

$$\psi(\vec{r},t)=Ac^{\frac{-iE_{۲}t}{\hbar}}\phi_{۱۰۰}(\vec{r})+\frac{۱}{\sqrt{۵}}e^{\frac{-iE_{۳}t}{\hbar}}\phi_{۳۱۱}(\vec{r})+\frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{-i\frac{E_{۴}t}{\hbar}}\phi_{۴۲۲}(\vec{r})$$

(پ)

در اندازه‌گیری انرژی، یکی از مقادیر $E_۲$، $E_۳$ و $E_۴$ با احتمال‌های زیر حاصل می‌شود:

$$P_{E_۲}=\left|\langle ۲۰۰|\psi\rangle\right|^۲=|A|^۲=\frac{۷}{۱۵}$$

$$P_{E_۳}=\left|\langle ۳۱۱|\psi\rangle\right|^۲=\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)^۲=\frac{۱}{۵}$$

$$P_{E_۴}=\left|\langle ۴۲۲|\psi\rangle\right|^۲=\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^۲=\frac{۱}{۳}$$

(ت)

از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\langle E\rangle=\sum_n P_{E_n}E_n=P_{E_۲}E_۲+P_{E_۳}E_۳+P_{E_۴}E_۴=\frac{۷}{۱۵}E_۲+\frac{۱}{۱۵}E_۳+\frac{۱}{۳}E_۴$$

با توجه به اینکه $E_n=\frac{E_۱}{n^۲}$ لذا:

$$\langle E\rangle=\frac{۷}{۱۵}\frac{E_۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\frac{E_۱}{۹}+\frac{۱}{۳}\frac{E_۱}{۱۶}=\frac{۱۱۵E_۱}{۷۲۰}=\frac{-۱۱۵\times ۱۳/۶\,\text{eV}}{۷۲۰}\simeq -۲/۱۷\ \text{eV}$$

تمرین ۶-۱۵

پهنای چگالی توزیع برای r و برای اتم هیدروژنی در حالت پایه‌ی خود یعنی $\Delta r=\sqrt{\langle r^۲\rangle_{۱۰}-\langle r\rangle_{۱۰}^۲}$ را محاسبه کنید.

حل:

با توجه به روابط ۶-۲۳۳ و ۶-۲۳۵ داریم:

$$\langle ۱۰|r|۱۰\rangle=\frac{۱}{۲}\left[۳\times ۱^۲-۰(۰+۱)\right]a_۰=\frac{۳}{۲}a_۰$$

$$\langle ۱۰|r^۲|۱۰\rangle=\frac{۱}{۲}\times ۱^۲\left[۵\times ۱^۲+۱-۳\times ۰(۰+۱)\right]a_۰^۲=۳a_۰^۲$$

پس:

$$\Delta r=\sqrt{۳a_۰^۲-\left(\frac{۳}{۲}a_۰\right)^۲}=\frac{a_۰\sqrt{۳}}{۲}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۶-۱۶

اتم هیدروژنی را درنظر بگیرید که حالت آن در زمان $t=0$ عبارت است از

$$\psi(\vec{r},0)=\frac{A}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{-r}{a_0}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{z-\sqrt{2}x}{r}\right)R_{21}(r)$$

و در آن A یک ثابت حقیقی، a_0 شعاع بور، و $R_{21}(r)$ تابع موج شعاعی است:

$$R_{21}(r)=\frac{1}{\sqrt{6}}(1/a_0)^{\frac{3}{2}}(r/2a_0)e^{\frac{-r}{2a_0}}$$

(آ) $\psi(\vec{r},0)$ را برحسب $\sum_{nlm}\phi_{nlm}(\vec{r})$ بنویسید که در آن $\phi_{nlm}(\vec{r})$ تابع موج هیدروژن است $\phi_{nlm}(\vec{r})=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$.

(ب) A را طوری بیابید که $\psi(\vec{r},0)$ بهنجار باشد.

(به خاطر داشته باشید که $\int\phi^*_{n'l'm'}(\vec{r})\phi_{nlm}(\vec{r})d^3r=\delta_{n',n}\delta_{l',l}\delta_{m',m}$.)

(پ) تابع موج $\psi(\vec{r},t)$ را در هر زمان بعدی t بنویسید.

(ت) آیا $\psi(\vec{r},0)$ ویژه حالتی از $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ است؟ اگر بله، ویژه مقادیر چه هستند؟

(ث) اگر انرژی اندازه‌گیری شود، چه مقدارهایی و با چه احتمال‌هایی به دست می‌آیند؟

(ج) احتمال آن‌که اندازه‌گیری $\hat{L}_z$، $\hbar$ را بدهد چه‌قدر است؟

(چ) مقدار میانگین r را در حالت $\psi(\vec{r},0)$ بیابید.

حل:

(آ)

با توجه به جداول ۵-۲ و ۶-۶ داریم:

$$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r}$$

$$Y_{1\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x\pm iy}{r}$$

$$R_{10}=2a_0^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{a_0}}$$

پس:

$$\psi(\vec{r},0)=AR_{10}Y_{00}+\sqrt{\frac{2}{3}}R_{21}Y_{10}+\sqrt{\frac{2}{3}}R_{21}Y_{11}-\sqrt{\frac{2}{3}}R_{21}Y_{1,-1}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= A\phi_{۱۰۰} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}\phi_{۲۱۰} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}\phi_{۲۱۱} - \sqrt{\frac{۲}{۳}}\phi_{۲۱-۱}$$

(ب)

برای بهنجارش $\psi(\vec{r},۰)$ لازم است که:

$$|A|^۲ + \left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)^۲ + \left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)^۲ + \left(-\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)^۲ = ۱$$

و یا به عبارتی:

$$|A|^۲ = -۱$$

این رابطه به‌ازای هیچ مقداری از A اعم از حقیقی و موهومی برقرار نخواهد بود. با اصلاح $\psi(\vec{r},۰)$ به‌شکل زیر، کار را ادامه می‌دهیم:

$$\psi(\vec{r},۰) = A\left(\phi_{۱۰۰} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}\phi_{۲۱۰} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}\phi_{۲۱۱} - \sqrt{\frac{۲}{۳}}\phi_{۲۱-۱}\right)$$

در این‌صورت:

$$۱ = |A|^۲\left(۱ + \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳}\right) = ۳|A|^۲$$

چون A حقیقی است نتیجه می‌شود که:

$$A = \pm\sqrt{\frac{۱}{۳}}$$

(پ)

با توجه به اینکه $\psi(\vec{r},t) = e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}\psi(\vec{r},۰)$ و ϕ_{nlm} ویژه توابع هامیلتونی با ویژه مقدار E_n هستند، لذا داریم:

$$\psi(\vec{r},t) = A\left(e^{-\frac{iE_۱t}{\hbar}}\phi_{۱۰۰} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}e^{-i\frac{E_۲t}{\hbar}}\phi_{۲۱۰} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}e^{-i\frac{E_۲t}{\hbar}}\phi_{۲۱۱} - \sqrt{\frac{۲}{۳}}e^{-i\frac{E_۲t}{\hbar}}\phi_{۲۱-۱}\right)$$

(ت)

اثر $\hat{L}^۲$ و $\hat{L}_z$ را بر روی $\psi(\vec{r},۰)$ بررسی می‌کنیم:

$$\hat{L}^۲\psi(\vec{r},۰) = A\left(۰(۰+۱)\hbar^۲\phi_{۱۰۰} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}۱(۱+۱)\hbar^۲\phi_{۲۱۰} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}۱(۱+۱)\hbar^۲\phi_{۲۱۱} - \sqrt{\frac{۲}{۳}}۱(۱+۱)\hbar^۲\phi_{۲۱-۱}\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= ۲A\hbar^۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}\left(\phi_{۱۰} + \phi_{۱۱} - \phi_{۱,۱,-۱}\right)$$

پس $\psi(\vec{r},۰)$ ویژه تابع $\hat{L}^۲$ نیست.

$$\hat{L}_z\psi(\vec{r},۰) = A\left(۰\hbar\phi_{۰۰} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}۰\hbar\phi_{۱۰} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}\hbar\phi_{۱۱} - \sqrt{\frac{۲}{۳}}(-\hbar)\phi_{۱,-۱}\right)$$

پس $\psi(\vec{r},۰)$ نیز ویژه تابع $\hat{L}_z$ نمی‌باشد.

(ث)

در اندازه‌گیری انرژی، مقدار $E_۱$ بااحتمال $P_۱$ و مقدار $E_۲$ با احتمال $P_۲$ حاصل خواهد شد به طوری‌که:

$$P_۱ = \left|\langle ۱۰۰|\psi\rangle\right|^۲ = A^۲ = \frac{۱}{۳}$$

$$P_۲ = \sum_{l,m}\left|\langle \phi_{۲lm}|\psi\rangle\right|^۲ = \left|\langle ۲۱۰|\psi\rangle\right|^۲ + \left|\langle ۲۱۱|\psi\rangle\right|^۲ + \left|\langle ۲,۱,-۱|\psi\rangle\right|^۲ = A^۲\left(\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}\right) = ۲A^۲ = \frac{۲}{۳}$$

(ج)

$$P = \sum_{nl}\left|\langle \phi_{nl۱}|\psi\rangle\right|^۲ = \left|\langle \phi_{۱۱}|\psi\rangle\right|^۲ = \left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}A\right)^۲ = \frac{۲}{۳}A^۲ = \frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۹}$$

(چ)

طبق تعریف، $\langle\hat{r}\rangle$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\langle\hat{r}\rangle = \langle\psi|\hat{r}|\psi\rangle$$

و یا به عبارتی:

$$\langle\hat{r}\rangle = \int_۰^{+\infty}\int_۰^{\pi}\int_۰^{۲\pi} r\left|\psi(\vec{r},۰)\right|^۲ r^۲ dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

با توجه به اینکه:

$$\int_۰^{\pi}\int_۰^{۲\pi} Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

پس:

$$\langle\hat{r}\rangle = |A|^۲\left[\langle ۱۰|r|۱۰\rangle + ۳\times\frac{۲}{۳}\langle ۲۱|r|۲۱\rangle\right]$$

پس طبق رابطه‌ی ۶-۱۸۰ خواهیم داشت:

$$\langle ۱۰|r|۱۰\rangle = \frac{۱}{۲}\left(۳\times۱^۲ - ۰\right)a_۰ = \frac{۳}{۲}a_۰$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle ۲۱|r|۲۱\rangle = \frac{۱}{۲}\Big(۳\times ۲^۲ - ۱\big(۱+۱\big)\Big)a_۰ = ۵a_۰$$

پس:

$$\langle \hat{r}\rangle = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۲}a_۰ + ۲\big(۵a_۰\big)\right) = \frac{۱}{۳}\times\frac{۲۳}{۲}a_۰ = \frac{۲۳}{۶}a_۰$$

تمرین ۶-۱۷

آونگی را در نظر بگیرید که نوسان‌های هماهنگ بسیار کوچکی انجام می‌دهد (با بسامد زاویه‌ای $\omega=\sqrt{g/l}$ که در آن g شتاب ناشی از گرانش و l طول آونگ است). نشان دهید ترازهای انرژی کوانتومی و تبهگنی‌های متناظر آونگ به ترتیب برابر با $E_n=(n+۱)\hbar\omega$ و $g_n=n+۱$ می‌باشند.

حل:

پاندول را می‌توان به مثابه یک نوسانگر ایزوتروپیک با فرکانس w درنظر گرفت. درنتیجه انرژی آن $E_n=\big(n+۱\big)\hbar w$ و مرتبه‌ی تبهگنی سطوح انرژی آن $g_n=n+۱$ خواهد بود.

تمرین ۶-۱۸

پروتونی را در نظر بگیرید که در چاه پتانسیل شعاعی نامتناهی

$$V(r)=\begin{cases}-V_۰ & ۰<r<a\\ +\infty & r\geq a\end{cases}$$

به دام افتاده است و $V_۰=۵۱۰۴/۳۴\,\mathrm{MeV}$ و $a_۰=۱۰\,\mathrm{fm}$ می‌باشند.

(آ) انرژی و تابع موج شعاعی (بهنجار شده‌ی) این ذره را برای حالت‌های s (مثلاً $l=۰$) بیابید.

(ب) تعداد حالت‌های مقیدی که دارای انرژی‌هایی کمتر از صفر هستند را بیابید. می‌توانید از مقدارهای $mc^۲=۹۳۸\,\mathrm{MeV}$ و $\hbar c=۱۹۷\,\mathrm{MeV.fm}$ استفاده کنید.

(پ) انرژی ترازهایی را حساب کنید که درست در زیر و بالای تراز انرژی صفر قرار دارند. پاسخ خود را برحسب MeV بنویسید.

حل:

(آ)

با توجه به رابطه‌ی ۶-۵۷ و ۶-۵۹ داریم:

$$-\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{d^۲U_{n_۰}(r)}{dr^۲} - V_۰U_{n_۰}(r) = E_nU_{n_۰}(r) \qquad ; \qquad r\leq a$$

در نتیجه:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{d^2U_{n_0}(r)}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E_n)U_{n_0}(r)=0$$

با تعریف $k_n^2=\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E_n)$ داریم:

$$U_{n_0}(r)=A\sin(k_nr)+B\cos(k_nr)$$

در نتیجه:

$$R_{n_0}(r)=\frac{U_{n_0}(r)}{r}=\frac{A}{r}\sin(k_nr)+\frac{B}{r}\cos(k_nr)$$

از آنجا که $R_{n_0}(0)$ باید متناهی باشد لذا:

$$B=0$$

چون پتانسیل در ناحیه‌ی $r>a$ نامتناهی است باید $R_{n_0}(r=a)$ مقداری برابر صفر داشته باشد. لذا:

$$\sin k_na=0$$

و یا

$$k_n=\frac{n\pi}{a}\quad;\quad n=1,2,\ldots$$

در نتیجه:

$$E_n=\frac{\hbar^2n^2\pi^2}{2ma^2}-V_0$$

شرط بهنجارش تابع موج شعاعی $R(r)$، یعنی $\int_0^a\left|R_{n_0}(r)\right|^2dr=1$، منجر می‌شود به:

$$1=|A|^2\int_0^a\sin^2k_nr\,dr=\frac{|A|^2}{2}\int_0^a\left[1-\cos(2k_nr)\right]dr=\frac{|A|^2}{2}\left(a-\frac{1}{2k_n}\left[\sin(2k_nr)\right]_0^a\right)$$

$$=\frac{|A|^2}{2}a$$

بنابراین $A=\sqrt{\frac{2}{a}}$ و در نتیجه:

$$R_{n_0}(r)=\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{\sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right)}{r}$$

(ب)

برای یافتن تعداد حالت‌های مقید با انرژی منفی، شرط زیر را اعمال می‌کنیم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} - V_0 < 0$$

یا:

$$n^2 < \frac{2ma^2 V_0}{\hbar^2 \pi^2} = \frac{2mc^2 a^2 V_0}{\hbar^2 c^2 \pi^2} = \frac{2 \times 938\,\text{MeV} \times (10\,\text{fm})^2 \times 5104/34\,\text{MeV}}{(197\,\text{MeV.fm})^2 \pi^2}$$

درنتیجه:

$$n \leq 49$$

بنابراین ۴۹ حالت مقید وجود دارد.

(پ)

در اینجا باید E_{49} و E_{50} را بیابیم:

$$E_{49} = \frac{49^2 \hbar^2 c^2 \pi^2}{2mc^2 a^2} - V_0 = \frac{49^2 \times (197\,\text{MeV.fm})^2 \pi^2}{2 \times 938\,\text{MeV}(10\,\text{fm})^2} - 5104/34\,\text{MeV} = -137/37\,\text{MeV}$$

$$E_{50} = \frac{50^2 \hbar^2 c^2 \pi^2}{2mc^2 a^2} - V_0 \simeq 67/44\,\text{MeV}$$

تمرین ۶-۱۹

تابع $\psi(\vec{r}) = -A(x+iy)e^{-r/2a_0}$ را در نظر بگیرید که a_0 شعاع بور و A یک ثابت حقیقی است.

(آ) آیا $\psi(\vec{r})$ ویژه تابع $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ است؟ اگر بلی، $\psi(\vec{r})$ را برحسب $R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$ بنویسید و مقادیر اعداد کوانتومی n، m و l را بیابید. $R_{nl}(r)$ توابع موج شعاعی اتم هیدروژن هستند.

(ب) ثابت A را طوری پیدا کنید که $\Psi(\vec{r})$ بهنجار باشد.

(پ) مقدار میانگین r و بیشترین مقدار احتمال r را در این حالت به دست آورید.

حل:

(آ)

با توجه به جدول ۵-۲ و ۶-۶ داریم:

$$\psi(\vec{r}) = A\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,2a_0\sqrt{6a_0^3}\,R_{21}(r)Y_{11}(\theta,\varphi) = A\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,2a_0\sqrt{6a_0^3}\,\phi_{211}(\vec{r})$$

بنابراین $\psi(\vec{r})$ ویژه تابع $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ است. و اعداد کوانتومی m,l,n به‌ترتیب عبارتند از:

۲، ۱ و ۱.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

چون $\phi_{۲۱۱}(\vec{r})$ بهنجار است پس:

$$A=\sqrt{\frac{۳}{۸\pi}}\frac{۱}{۲a_{۰}\sqrt{۶a_{۰}^{۳}}}$$

(پ)

با توجه به روابط ۶-۲۳۳ و ۶-۲۶۵ داریم:

$$\langle ۲۱|r|۲۱\rangle=\frac{۱}{۲}\left[۳\times ۲^{۲}-۱\times ۲\right]a_{۰}=۵a_{۰}$$

و

$$r_{۲}=۲^{۲}a_{۰}=۴a_{۰}$$

تمرین ۶-۲۰

تابع موج اتم هیدروژن گونه‌ای در زمان $t=۰$ عبارت است از

$$\psi(\vec{r},۰)=\frac{۱}{\sqrt{۱۱}}\left[\sqrt{۳}\psi_{۲۱-۱}(\vec{r})-\psi_{۲۱۰}(\vec{r})+\sqrt{۵}\psi_{۲۱۱}(\vec{r})+\sqrt{۲}\psi_{۳۱۱}(\vec{r})\right]$$

که $\psi_{nlm}(\vec{r})$ یک ویژه تابع بهنجار است (یعنی $\psi_{nlm}(\vec{r})=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$).

(آ) تابع موج وابسته به زمان آن چیست؟

(ب) اگر انرژی اندازه‌گیری شود، چه مقدارهایی و با چه احتمال‌هایی به دست می‌آیند؟

(پ) احتمال آن‌که اندازه‌گیری $\hat{L}_z$ به $-\hbar$ منجر شود چه‌قدر است؟

حل:

(آ)

با توجه به اینکه $\psi_{nlm}(\vec{r})$ها ویژه توابع انرژی با ویژه مقادیر E_n هستند، با استفاده از رابطه:

$$\psi(\vec{r},t)=e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\psi(\vec{r},۰)$$

داریم:

$$\psi(\vec{r},t)=\frac{۱}{\sqrt{۱۱}}\left[\left(\sqrt{۳}\psi_{۲۱-۱}-\psi_{۲۱۰}+\sqrt{۵}\psi_{۲۱۱}\right)e^{\frac{-iE_{۲}t}{\hbar}}+\sqrt{۲}\psi_{۳۱۱}e^{\frac{-iE_{۳}t}{\hbar}}\right]$$

(ب)

در اندازه‌گیری انرژی، مقادیر $E_{۲}$ و $E_{۳}$ با احتمال $P_{۲}$ و $P_{۳}$ حاصل می‌شوند به طوری‌که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$P_۲=\sum_{l,m}\left|\left\langle ۲lm\middle|\psi\right\rangle\right|^۲=\left|\left\langle ۲,۱,-۱\middle|\psi\right\rangle\right|^۲+\left|\left\langle ۲,۱,۰\middle|\psi\right\rangle\right|^۲+\left|\left\langle ۲,۱,۱\middle|\psi\right\rangle\right|^۲$$

$$=\left(\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۱}}\right)^۲+\left(\frac{-۱}{\sqrt{۱۱}}\right)^۲+\left(\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۱}}\right)^۲=\frac{۳}{۱۱}+\frac{۱}{۱۱}+\frac{۵}{۱۱}=\frac{۹}{۱۱}$$

$$P_۳=\sum_{l,m}\left|\left\langle ۳lm\middle|\psi\right\rangle\right|^۲=\left|\left\langle ۳,۱,۱\middle|\psi\right\rangle\right|^۲=\left(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۱}}\right)^۲=\frac{۲}{۱۱}$$

(پ)

$$P=\sum_{n,l}\left|\left\langle n,l,-۱\middle|\psi\right\rangle\right|^۲=\left|\left\langle ۲,۱,-۱\middle|\psi\right\rangle\right|^۲=\left(\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۱}}\right)^۲=\frac{۳}{۱۱}$$

تمرین ۶-۲۱

با استفاده از این واقعیت که عملگر اندازه حرکت شعاعی با $\hat{P}_r=-i\hbar\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$ داده می‌شود، جابه‌جاگر $\left[\hat{r},\hat{P}_r\right]$ میان عملگر مکان $\hat{r}$ و عملگر اندازه حرکت شعاعی را محاسبه کنید.

حل:

اثر $\left[\hat{r},\hat{p}_r\right]$ را بر روی تابع موج خوشرفتار $\psi\left(\vec{r}\right)$ می‌یابیم:

$$\left[\hat{r},\hat{p}_r\right]\psi\left(\vec{r}\right)=\hat{r}\left(\hat{p}_r\psi\left(\vec{r}\right)\right)-\hat{p}_r\left(\hat{r}\psi\left(\vec{r}\right)\right)=r\left[-i\hbar\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\psi\left(\vec{r}\right)\right)\right]+i\hbar\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^۲\psi\left(\vec{r}\right)\right)$$

$$=-i\hbar\left(\psi\left(\vec{r}\right)+r\frac{\partial\psi\left(\vec{r}\right)}{\partial r}\right)+i\hbar\frac{۱}{r}\left(۲r\psi\left(\vec{r}\right)+r^۲\frac{\partial\psi\left(\vec{r}\right)}{\partial r}\right)$$

$$=-i\hbar\psi\left(\vec{r}\right)-i\hbar r\frac{\partial\psi\left(\vec{r}\right)}{\partial r}+۲i\hbar\psi\left(\vec{r}\right)+i\hbar r\frac{\partial\psi\left(\vec{r}\right)}{\partial r}=i\hbar\psi\left(\vec{r}\right)$$

بنابراین:

$$\left[\hat{r},\hat{p}\right]=i\hbar$$

تمرین ۶-۲۲

$\Delta r\Delta p_r$ را برحسب حالت:

$$\psi_{۲۱۰}\left(\vec{r}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۶}}\left(\frac{۱}{a_۰}\right)^{\frac{۳}{۲}}\frac{r}{۲a_۰}e^{-\frac{r}{۲a_۰}}Y_{۱۰}\left(\theta,\varphi\right)$$

محاسبه کنید و ثابت کنید که $\Delta r\Delta p_r$ در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ صدق می‌کند.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle \hat{p}_r \rangle = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi^*_{21_0}(\vec{r})\left(-i\hbar\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\psi_{21_0}(\vec{r})\right) r^2 dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad (*)$$

$$= -i\hbar\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\left|\psi_{21_0}(\vec{r})\right|^2 r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi - i\hbar\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi^*_{21_0}(\vec{r})\frac{\partial\psi_{21_0}(\vec{r})}{\partial r} r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= -i\hbar\left\langle 21\left|\frac{1}{r}\right|21\right\rangle - i\hbar\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-1}{2a_0}\left|\phi_{21_0}(\vec{r})\right|^2 r^2 dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$-i\hbar\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\phi^*_{21_0}(\vec{r})\frac{\phi_{21_0}(\vec{r})}{r} r^2 dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= -i\hbar\left\langle 21\left|\frac{1}{r}\right|21\right\rangle + \frac{i\hbar}{2a_0} - i\hbar\left\langle 21\left|\frac{1}{r}\right|21\right\rangle = +i\hbar\left(\frac{1}{2a_0} - 2\left\langle 21\left|\frac{1}{r}\right|21\right\rangle\right)$$

با توجه به رابطه‌ی ۶-۲۳۱ داریم:

$$\langle \hat{p}_r \rangle = i\hbar\left(\frac{1}{2a_0} - 2\times\frac{1}{4a_0}\right) = 0$$

البته این نتیجه از ابتدا نیز قابل پیش‌بینی بود زیرا $\langle \hat{P}_r \rangle$ باید مقداری حقیقی باشد اما رابطه‌ی (*) بیانگر آنست که $\langle \hat{p}_r \rangle$ عددی موهومی محض و یا صفر است. اما چون نمی‌تواند موهومی محض باشد لاجرم باید صفر باشد.

حال با استفاده از رابطه‌ی ۶-۴۴ داریم:

$$-\hbar^2\nabla^2 = \hat{\vec{P}}^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{\hat{\vec{L}}^2}{r^2}$$

پس:

$$\langle \hat{p}_r^2 \rangle = \left\langle \hat{\vec{P}}^2 \right\rangle - \left\langle \frac{\hat{\vec{L}}^2}{r^2} \right\rangle = 2m\left\langle 21\left|\hat{H} + \frac{e^2}{r}\right|21\right\rangle - \left\langle 210\left|\frac{\hat{\vec{L}}^2}{r^2}\right|210\right\rangle$$

$$= 2m\left(E_2 + e^2\left\langle 21\left|\frac{1}{r}\right|21\right\rangle\right) - 2\hbar^2\left\langle 21\left|\frac{1}{r^2}\right|21\right\rangle$$

با استفاده از رابطه‌ی ۶-۲۲۵ و روابط $E_n = \frac{-e^2}{2a_0 n^2}$ و $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_0 e^2}$ داریم:

$$\langle \hat{p}_r \rangle = \frac{1}{12}\frac{\hbar^2}{a_0^2}$$

پس:

$$\Delta p_r = \sqrt{\langle \hat{p}_r^2 \rangle - \langle \hat{p}_r \rangle^2} = \frac{\hbar}{a_0}\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

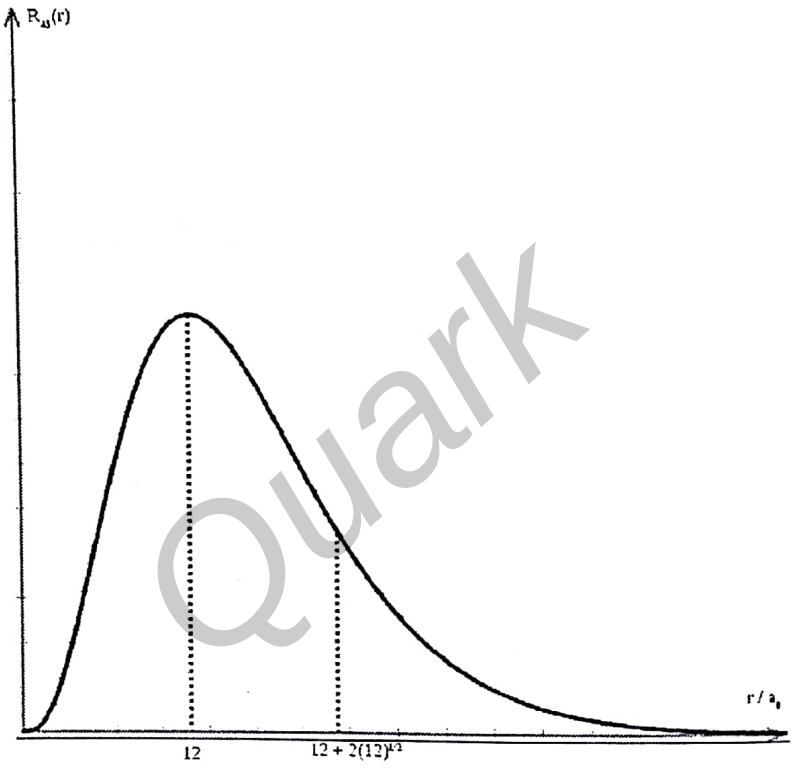
از طرفی با توجه به رابطه‌ی ۶-۲۳۳ و ۶-۲۳۵ داریم:

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 4 \left[5 \times 4 + 1 - 3 \times 1 \times 2\right] a_0^2 - \left[\frac{1}{2}\left(3 \times 2^2 - 1 \times 2\right) a_0\right]^2} = a_0 \sqrt{5}$$

پس:

$$\Delta r \, \Delta p_r = \frac{\hbar}{a_0} \frac{1}{2\sqrt{3}} a_0 \sqrt{5} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{r}, \hat{p}_r] \rangle \right| = \frac{\hbar}{2}$$

بنابراین اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نیز ارضاء می‌شود.



Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

فصل هفتم

چرخش‌ها و جمع اندازه حرکت‌های زاویه‌ای

تمرین ۷-۱

نشان دهید که تبدیل خطی $y = Rx$ که در آن:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad , \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

یک دوران پادساعتگرد دستگاه مختصات دکارتی x_1x_2 در صفحه‌ای حول مبدا با یک زاویه‌ی ϕ است.

حل:

در واقع داریم:

$$x_1\hat{i} + \hat{x}_2\hat{j} = y_1\hat{i}' + y_2\hat{j}'$$

پس از ضرب طرفین این رابطه در $\hat{i}'$ و $\hat{j}'$ داریم:

$$x_1\hat{i}.\hat{i}' + \hat{x}_2\hat{j}.\hat{i}' = y_1\hat{i}'.\hat{i}' + y_2\hat{j}'.\hat{i}'$$

$$x_1\hat{i}.\hat{j}' + y_1\hat{j}.\hat{j}' = y_1\hat{i}'.\hat{j}' + y_2\hat{j}'.\hat{j}'$$

یا

$$y_1 = x_1\cos\phi + y_1\sin\phi$$

$$y_2 = -x_1\sin\phi + y_1\cos\phi$$

برای رسیدن به‌این نتایج از روابط زیر استفاده کرده‌ایم:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$\hat{i}.\hat{i}' = \hat{j}.\hat{j}' = \cos\phi$

$\hat{j}.\hat{i}' = -\hat{i}.\hat{j}' = \sin\phi$

$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{i}'.\hat{i}' = \hat{j}'.\hat{j}' = ۱$

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{i}'.\hat{j}' = \hat{j}'.\hat{i}' = ۰$

پس:

$$\begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}$$

به‌طوری‌که:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

تمرین ۷-۲

نشان دهید توان nام ماتریس دورانی:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

برابر است با:

$$R^n(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(n\phi) & -\sin(n\phi) \\ \sin(n\phi) & \cos(n\phi) \end{pmatrix}$$

معنی هندسی این نتیجه چیست؟

حل:

فرض می‌کنیم که:

$$R^m = \begin{pmatrix} \cos(m\phi) & -\sin(m\phi) \\ \sin(m\phi) & \cos(m\phi) \end{pmatrix}$$

پس:

$$R^{m+۱} = RR^m = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(m\phi) & -\sin(m\phi) \\ \sin(m\phi) & \cos(m\phi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos(m\phi) - \sin\phi\sin(m\phi) & -\cos\phi\sin(m\phi) - \sin\phi\cos(m\phi) \\ \sin\phi\cos(m\phi) + \cos\phi\sin(m\phi) & -\sin\phi\sin(m\phi) + \cos\phi\cos(m\phi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(m+۱)\phi & -\sin(m+۱)\phi \\ \sin(m+۱)\phi & \cos(m+۱)\phi \end{pmatrix}$$

رابطه‌ی $R^n = \begin{pmatrix} \cos n\phi & -\sin\phi \\ \sin n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix}$ برای $n = ۱$ برقرار است. طبق آنچه گفته شده برای $n = ۲$ نیز

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

صادق است و لذا برای $n=۳$ نیز صادق خواهد بود و الی آخر. پس به کمک استقراء ریاضی ثابت شد که:

$$R^n=\begin{pmatrix}\cos(n\phi) & -\sin(n\phi)\\ \sin(n\phi) & \cos(n\phi)\end{pmatrix}$$

معنای هندسی این رابطه آن است که n دوران متوالی حول یک محور به‌اندازه زاویه مشخص ϕ، برابر با دورانی به اندازه $n\phi$ حول همان محور است.

تمرین ۷-۳

با استفاده از عملگر جابجایی فضایی $U(\vec{\hat{A}})=e^{-i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}/\hbar}$ که در آن $\vec{\hat{P}}$ عملگر اندازه‌حرکت خطی است نشان دهید که $e^{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}/\hbar}\vec{\hat{R}}e^{-i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}/\hbar}=\vec{\hat{R}}+\vec{\hat{A}}$.

حل:

ابتدا به محاسبه‌ی $e^{\frac{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar}}\hat{X}e^{\frac{-i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar}}$ می‌پردازیم. برای این منظور از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}=\hat{B}+\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\frac{۱}{۲!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]+\frac{۱}{۳!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]\right]+\ldots$$

پس:

$$e^{\frac{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar}}\hat{X}e^{\frac{-i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar}}=\hat{X}+\left[\frac{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar},\hat{X}\right]+\frac{۱}{۲!}\left[\frac{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar},\left[\frac{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar},\hat{X}\right]\right]+\ldots$$

ولی:

$$\left[\frac{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar},\hat{X}\right]=\left[\frac{i}{\hbar}\left(A_x\hat{P}_x+A_y\hat{P}_y+A_z\hat{P}_z\right),\hat{X}\right]$$

اما چون:

$$\left[\hat{P}_x,\hat{X}\right]=i\hbar,\left[\hat{P}_y,\hat{X}\right]=\left[\hat{P}_z,\hat{X}\right]=۰$$

پس:

$$\left[\frac{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar},\hat{X}\right]=\frac{i}{\hbar}A_x\left[\hat{P}_x,\hat{X}\right]=\frac{i}{\hbar}A_x\left(-i\hbar\right)=A_x$$

$$\left[\frac{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar},\left[\frac{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar},\hat{X}\right]\right]=\left[\frac{i\vec{\hat{A}}.\vec{\hat{P}}}{\hbar},A_x\right]=۰$$

و به‌همین ترتیب:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left[\frac{i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar},\left[\frac{i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar},\left[\frac{i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar},\ldots\left[\frac{i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar},A_x\right]\ldots\right]\right]\right]=0$$

و بنابراین:

$$e^{\frac{i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}\hat{X}e^{\frac{-i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}=\hat{X}+A_x$$

به‌همین ترتیب:

$$e^{\frac{+i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}\hat{Y}e^{\frac{-i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}=\hat{Y}+A_y$$

$$e^{\frac{+i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}\hat{Z}e^{\frac{-i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}=\hat{Z}+A_z$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned}e^{\frac{i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}\hat{\vec{R}}e^{\frac{-i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}&=e^{\frac{i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}\left(\hat{i}\hat{X}+\hat{j}\hat{Y}+\hat{k}\hat{Z}\right)e^{\frac{-i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}=\hat{i}e^{\frac{i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}\hat{X}e^{\frac{-i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}+\hat{j}e^{\frac{i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}\hat{Y}e^{\frac{-i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}+\hat{k}e^{\frac{i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}\hat{Z}e^{\frac{-i\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{P}}}{\hbar}}\\&=\hat{i}\left(\hat{X}+\hat{A}_x\right)+\hat{j}\left(\hat{Y}+\hat{A}_y\right)+\hat{k}\left(\hat{Z}+\hat{A}_z\right)=\left(\hat{i}\hat{X}+\hat{j}\hat{Y}+\hat{k}\hat{Z}\right)+\left(\hat{i}\hat{A}_x+j\hat{A}_y+\hat{k}\hat{A}_z\right)\\&=\hat{\vec{R}}+\vec{A}\end{aligned}$$

تمرین ۷-۴

مؤلفه‌های A_j (با $j=x,y,z$) از یک بردار $\hat{A}$ تحت دوران فضایی به‌صورت $A'_i=R_{ij}A_j$ تبدیل می‌شوند که در آن R ماتریس دورانی است.

(آ) با استفاده از ناوردایی حاصل ضرب نرده‌ای هر دو بردار (یعنی $\vec{A}.\vec{B}$) تحت دوران، نشان دهید که سطرها و ستون‌های ماتریس دوران R متعامد – بهنجار بر یکدیگر هستند (یعنی نشان دهید که $R_{ij}R_{ik}=\delta_{jk}$)

(ب) نشان دهید که ترانهاده ماتریس R با وارون R برابر و دترمینان R برابر با ± 1 است.

حل:

(آ)

اگر $\hat{\vec{A}}$ و $\hat{\vec{B}}$ دو بردار باشند آنگاه تحت دوران، مؤلفه‌های آنها طبق روابط زیر تبدیل خواهند شد:

$$A'_i=\sum_{j=1}^{3}R_{ij}A_j$$

$$B'_i=\sum_{l=1}^{3}R_{il}B_l$$

در نتیجه تبدیل $\vec{A}.\vec{B}$ عبارت خواهد بود از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\vec{A}'.\vec{B}'=\sum_{i=1}^{3}A_i'B_i'=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}R_{ij}A_jR_{il}B_l=\sum_{j,l}\left(\sum_i R_{ij}R_{il}\right)A_jB_l$$

اما از طرفی:

$$\hat{\vec{A}}.\hat{\vec{B}}=\sum_{j=1}^{3}A_jB_j$$

پس رابطه‌ی $\vec{A}.\vec{B}=\vec{A}'.\vec{B}'$ فقط و فقط در صورتی برقرار خواهد بود که :

$$\sum_i R_{ij}R_{il}=\delta_{jl}$$

البته شرط اخیر هم‌ارز است با:

$$\sum_i R_{ji}R_{li}=\delta_{jl}$$

(ب)

$$RR^T=\begin{pmatrix}R_{11}&R_{12}&R_{13}\\R_{21}&R_{22}&R_{23}\\R_{31}&R_{32}&R_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11}&R_{21}&R_{31}\\R_{12}&R_{22}&R_{32}\\R_{13}&R_{23}&R_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{3}R_{1i}R_{1i}&\sum_{i=1}^{3}R_{1i}R_{2i}&\sum_{i=1}^{3}R_{1i}R_{3i}\\\sum_{i=1}^{3}R_{2i}R_{1i}&\sum_{i=1}^{3}R_{2i}R_{2i}&\sum_{i=1}^{3}R_{2i}R_{3i}\\\sum_{i=0}^{3}R_{3i}R_{1i}&\sum_{i=0}^{3}R_{3i}R_{2i}&\sum_{i=0}^{3}R_{3i}R_{3i}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}\\\delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}\\\delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=R^TR$$

بنابراین R و R^T معکوس هم‌دیگر هستند.

اما برای اثبات اینکه دترمینان R مقداری برابر با ± 1 دارد باید دو نکته را بدانیم:

۱. دترمینان حاصلضرب دو ماتریس برابر با حاصلضرب دترمینان‌ها است.

۲. دترمینان ترانهاده هر ماتریس با دترمینان خود آن برابر است.

پس برای ماتریس متعامد R داریم:

$$\det\left(RR^T\right)=\det(R)\det\left(R^T\right)=\det(R)\det(R)=\left[\det(R)\right]^2=\det(I)=1$$

و در نتیجه:

$$\det(R)=\pm 1$$

تمرین ۷-۵

عملگر متناظر با یک دوران به اندازه‌ی θ حول محور $\vec{n}$ با رابطه‌ای زیر داده می‌شود:

$$U_{\vec{n}}(\theta)=e^{-i\theta\vec{n}.\hat{\vec{J}}/\hbar}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

نشان دهید که آرایه‌های ماتریسی عملگر مکان $\hat{\vec{R}}$ از طریق یک دوران بی‌نهایت کوچک مانند $\vec{R}' = \hat{\vec{R}} + \theta\vec{n}\times\vec{R}$ دوران می‌کنند (یعنی، در حالتی که در آن θ بی‌نهایت کوچک است، نشان دهید که $U_n^\dagger(\theta)\vec{R}_j U_n(\theta) = \vec{R}_j + \theta(\vec{n}\times\vec{R})_j$.

حل:

ابتدا به محاسبه‌ی $U_n^\dagger(\theta)\hat{X}U_n(\theta)$ می‌پردازیم و برای این منظور از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \frac{1}{3!}\left[A,\left[A,[A,B]\right]\right] + \ldots$$

پس:

$$U_n^\dagger(\theta)\hat{X}U_n(\theta) = e^{i\theta\hat{n}.\frac{\hat{\vec{J}}}{\hbar}}\hat{X}e^{-i\theta\hat{n}.\frac{\hat{\vec{J}}}{\hbar}} = \hat{X} + \left[\frac{i\theta}{\hbar}\hat{n}.\hat{\vec{J}},\hat{X}\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{i\theta}{\hbar}\hat{n}.\hat{\vec{J}},\left[\frac{i\theta}{\hbar}\hat{n}.\hat{\vec{J}},\hat{X}\right]\right] + \ldots$$

اما:

$$\left[\frac{i\theta}{\hbar}\hat{n}.\hat{\vec{J}},\hat{X}\right] = \frac{i\theta}{\hbar}\left[\hat{n}.\hat{\vec{S}} + \hat{n}.\hat{\vec{L}},\hat{X}\right] = \frac{i\theta}{\hbar}\left[\hat{n}.\hat{\vec{L}},\hat{X}\right]$$

برای نوشتن خط آخر از دو نکته استفاده نموده‌ایم:

۱. $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

۲. $\left[\vec{S},\hat{X}\right] = 0$

حال به ادامه‌ی کار می‌پردازیم:

$$\left[\frac{i\theta}{\hbar}\hat{n}.\hat{\vec{J}},\hat{X}\right] = \frac{i\theta}{\hbar}\left[n_xL_x + n_yL_y + n_zL_z,\hat{X}\right]$$

با توجه به رابطه‌ی $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{R}}\times\hat{\vec{P}}$ داریم:

$$\left[\frac{i\theta}{\hbar}\hat{n}.\hat{\vec{J}},\hat{X}\right] = \frac{i\theta}{\hbar}\left[n_x\left(\hat{Y}\hat{P}_z - \hat{Z}\hat{P}_y\right) + n_y\left(\hat{Z}\hat{P}_x - \hat{X}\hat{P}_z\right) + n_z\left(\hat{X}\hat{P}_y - \hat{Y}\hat{P}_x\right),\hat{X}\right]$$

با توجه به اینکه:

$$\left[\hat{Y},\hat{X}\right] = \left[\hat{Z},\hat{X}\right] = 0$$

$$\left[\hat{P}_y,\hat{X}\right] = \left[\hat{P}_z,\hat{X}\right] = 0$$

$$\left[\hat{P}_x,\hat{X}\right] = -i\hbar$$

پس خواهیم داشت:

$$\left[\frac{i\theta}{\hbar}\hat{n}.\hat{\vec{J}},\hat{X}\right] = \frac{i\theta}{\hbar}\left[\left(n_y\hat{Z} - n_z\hat{Y}\right)\hat{P}_x,\hat{X}\right] = \frac{i\theta}{\hbar}(-i\hbar)\left(n_y\hat{Z} - n_z\hat{Y}\right) = \theta\left(n_y\hat{Z} - n_z\hat{Y}\right) = \theta\left(\hat{n}\times\hat{\vec{R}}\right)_x$$

بنابراین:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$U_n^\dagger(\theta)\hat{X}U_n(\theta)=\hat{X}+\theta\left(\hat{n}\times\hat{\vec{R}}\right)_x+O\left(\theta^2\right)$$

برای دوران‌های به‌اندازه‌ی کافی کوچک از جملات مرتبه θ^2 و بالاتر صرف‌نظر می‌کنیم، یعنی:

$$U_n^\dagger(\theta)\hat{X}U_n(\theta)=\hat{X}+\theta\left(\hat{n}\times\hat{\vec{R}}\right)_x$$

به‌همین ترتیب رابطه‌ی اخیر را برای سایر مؤلفه‌های $\hat{\vec{R}}$ می‌توان ثابت کرد. پس:

$$U_{\vec{n}}(\theta)=e^{-i\theta\vec{n}.\hat{\vec{J}}/\hbar}$$

تمرین ۷-۶

تابع موج یک ذره $\psi(\vec{r})=\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+z\right)f(r)$ می‌باشد که در آن $f(r)$ یک تابع متقارن کروی است.

(آ) آیا $\psi(\vec{r})$ یک ویژه تابع از L^2 است؟ اگر چنین است ویژه مقدارهای آن چیست؟

(ب) احتمال‌های آن‌که ذره در حالات $m_l=-1$، $m_l=0$ و $m_l=1$ یافت شود چیست؟

(پ) اگر $\psi(\vec{r})$ یک ویژه تابع انرژی با ویژه مقدار E باشد و $f(r)=3r^2$، پتانسیل $V(r)$ که این ذره در آن قرار دارد را پیدا کنید.

حل:

(آ)

با توجه به اینکه:

$$x=r\sin\theta\cos\phi=\frac{r}{2}\sin\theta\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)=\frac{r}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(-Y_{11}+Y_{1-1}\right)$$

$$y=r\sin\theta\sin\phi=\frac{r}{2i}\sin\theta\left(e^{i\phi}-e^{-i\phi}\right)=\frac{r}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(-Y_{11}+Y_{1-1}\right)$$

$$z=r\cos\theta=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}rY_{10}(\theta,\phi)$$

پس از آنجا که تمام Y_{lm} ها مربوط به $l=1$ می‌باشند، بنابراین $\psi(\vec{r})$ یک ویژه تابع L^2 با ویژه مقدار $1(1+1)\hbar^2$ می‌باشد یعنی:

$$L^2\psi(\vec{r})=2\hbar^2\psi(\vec{r})$$

(ب)

یکبار دیگر $\psi(\vec{r})$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\psi(\vec{r})=\left[3r\sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(-Y_{11}+Y_{1-1}\right)+2ir\sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(Y_{11}+Y_{1-1}\right)+2\sqrt{\frac{\pi}{3}}rY_{10}(\theta,)\right]f(r)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= ۲rf(r)\sqrt{\frac{\pi}{۳}}\left[(-۱+i)Y_{۱۱}+(۱+i)Y_{۱-۱}+Y_{۱۰}\right]=\frac{۲}{۵}=۴۰٪$$

$$P(m_l=-۱)=\frac{|۱+i|^۲}{|-۱+i|^۲+|۱+i|^۲+۱^۲}=\frac{۲}{۵}=۴۰٪$$

$$P(m_l=۰)=\frac{۱}{۵}=۲۰٪$$

$$P(m_l=۱)=\frac{۲}{۵}=۴۰٪$$

(پ)

از آنجا که برای پتانسیل‌های کروی ψ_{nlm}، ویژه تابع انرژی دارای شکل زیر است:

$$\psi_{nlm}(\vec{r})=\frac{U_{nl}(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

که $U_{nl}(r)$ در معادله‌ی دیفرانسیل:

$$\frac{-\hbar^۲}{۲\mu}\frac{d^۲U_{nl}(r)}{dr^۲}+\left[\frac{l(l+۱)\hbar^۲}{۲\mu r^۲}+V(r)\right]U_{nl}(r)=EU_{nl}(r)$$

صدق می‌کند، پس درمورد مسئله خودمان با $U=r^۴$ داریم:

$$\frac{-\hbar^۲}{۲\mu}\frac{d^۲}{dr^۲}(r^۴)+\left[\frac{۱(۱+۱)\hbar^۲}{۲\mu r^۲}+V(r)\right]r^۴=Er^۴$$

$$\frac{-\hbar^۲}{۲\mu}(۱۲r^۲)+\left(\frac{\hbar^۲}{\mu r^۲}+V(r)\right)r^۴=Er^۴$$

$$\frac{-۵\hbar^۲r^۲}{\mu}+r^۴V(r)=Er^۴$$

$$V(r)=E+\frac{۵\hbar^۲}{\mu r^۲}$$

تمرین ۷-۷

ذره‌ای را درنظر بگیرید که تابع موج آن به‌صورت زیر است:

$$\psi(\vec{r})=\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}Y_{۱۱}(\theta,\varphi)-\frac{۱}{۵}Y_{۱-۱}(\theta,\varphi)+\frac{۱}{\sqrt{۲}}Y_{۱۰}(\theta,\varphi)\right)f(r)$$

که در آن $f(r)$ یک تابع شعاعی بهنجار است یعنی $\int_۰^\infty r^۲f^۲(r)dr=۱$.

(آ) مقادیر چشمداشتی $\hat{L}^۲$، $\hat{L}_z$ و $\hat{L}_x$ را در این حالت حساب کنید.

(ب) مقدار چشمداشتی $V(\theta)=۲\cos^۲\theta$ را در این حالت حساب کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ) احتمال آن را بیابید که ذره در حالت $m_l = ۰$ باشد.

حل:

(آ)

ابتدا $\psi(\vec{r})$ را بهنجار می‌کنیم. برای این منظور $\psi_N(\vec{r}) = N\psi(\vec{r})$ را تابع موج بهنجار شده فرض می‌کنیم. پس:

$$۱ = \int_W |\psi_N|^۲ dV = \int_W |N|^۲ |f(r)|^۲ \left|\frac{۱}{\sqrt{۵}}Y_{۱۱}(\theta,\phi) - \frac{۱}{۵}Y_{۱-۱}(\theta,\phi) + \frac{۱}{\sqrt{۲}}Y_{۱۰}(\theta,\phi)\right|^۲ r^۲ dr\, d\Omega$$

$$= |N|^۲ \int_۰^\infty r^۲ |f(r)|^۲ dr \int \left|\frac{۱}{\sqrt{۵}}Y_{۱۱}(\theta,\phi) - \frac{۱}{۵}Y_{۱-۱}(\theta,\phi) + \frac{۱}{\sqrt{۲}}Y_{۱۰}(\theta,\phi)\right|^۲ d\Omega$$

$$= |N|^۲ \times ۱ \times \left[\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)^۲ + \left(\frac{-۱}{۵}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^۲\right] = |N|^۲ \left(\frac{۳۷}{۵۰}\right)$$

پس:

$$|N| = \sqrt{\frac{۵۰}{۳۷}}$$

از آنجا که $\psi_N(\vec{r})$ یک ویژه تابع $L^۲$ است پس ویژه مقدار مربوط به آن همان مقدار چشمداشتی خواهد بود. لذا:

$$L^۲ \psi_N(r) = ۱(۱+۱)\hbar^۲ \psi_N(r)$$

پس:

$$\langle L^۲ \rangle = ۲\hbar^۲$$

در مورد $\langle L_z \rangle$ داریم:

$$\langle L_z \rangle = \left[\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)^۲ (+۱\hbar) + \left(\frac{-۱}{۵}\right)^۲ (-۱\hbar) + \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^۲ (۰\hbar)\right] \left(\sqrt{\frac{۵۰}{۳۷}}\right)^۲ = \hbar\left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۲۵}\right)\frac{۵۰}{۳۷} = \hbar \frac{۴}{۲۵}\frac{۵۰}{۳۷} = \frac{۸}{۳۷}\hbar$$

(ب)

با توجه به اینکه:

$$V(\theta)\psi_N(\vec{r}) = ۲\sqrt{\frac{۵۰}{۳۷}} f(r) \left[\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(-\sqrt{\frac{۳}{۸\pi}} e^{i\phi} \sin\theta\right) - \frac{۱}{۵}\sqrt{\frac{۳}{۸\pi}} e^{-i\phi} \sin\theta + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sqrt{\frac{۳}{۴\pi}} \cos\theta\right] \cos^۲\theta$$

و

$$e^{i\phi} \sin\theta \cos^۲\theta = \frac{-\sqrt{\frac{۶۴\pi}{۲۱}}Y_{۳۱} - \sqrt{\frac{۸\pi}{۳}}Y_{۱۱}}{۵}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

و

$$e^{-i\phi}\sin\theta\cos^{۲}\theta=\frac{-\sqrt{\frac{۶۴\pi}{۲۱}}Y_{۳-۱}-\sqrt{\frac{۸\pi}{۳}}Y_{۱-۱}}{۵}$$

و

$$\cos^{۲}\theta=\frac{\sqrt{\frac{۱۶\pi}{۷}}Y_{۲۰}(\theta,\phi)+۳\sqrt{\frac{۴\pi}{۳}}Y_{۱۰}}{۵}$$

پس:

$$\langle V(\theta)\rangle=\int_{W}dV\psi^{*}(r)V(\theta)\psi(r)=۲\left(\frac{۵۰}{۳۷}\right)I\int_{۰}^{+\infty}r^{۲}f(r)dr=\frac{۱۰۰}{۳۷}I$$

که در آن:

$$I=\int_{W}\left[\frac{۱}{\sqrt{۵}}Y_{۱۱}^{*}(\theta,\phi)-\frac{۱}{۵}Y_{۱-۱}^{*}(\theta,\phi)+\frac{۱}{\sqrt{۲}}Y_{۱۰}^{*}(\theta,\phi)\right]\left(\frac{۱}{۵\sqrt{۵}}Y_{۱۱}-\frac{۱}{۲۵}Y_{۱-۱}+\frac{۳}{۵\sqrt{۲}}Y_{۱۰}\right)d\Omega$$

در نوشتن رابطه‌ی اخیر از این نکته استفاده کرده‌ایم که:

$$\int d\Omega\,Y_{lm}^{*}(\theta,f)Y_{l'm'}(\theta,f)=\delta_{ll'}S_{mm'}$$

مجدداً با استفاده از این رابطه خواهیم داشت:

$$I=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱}{۵\sqrt{۵}}-\frac{۱}{۵}\times\frac{-۱}{۲۵}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{۳}{۵\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲۵}+\frac{۱}{۱۲۵}+\frac{۳}{۱۰}=\frac{۱۰+۲+۲۵}{۲۵۰}=\frac{۳۷}{۲۵۰}$$

پس:

$$\langle V(\theta)\rangle=\frac{۱۰۰}{۳۷}\times\frac{۳۷}{۲۵۰}=۰/۴$$

(پ)

$$P(m_l=۰)=\frac{\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}}{\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)^{۲}+\left(\frac{-۱}{۵}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۵}+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲۵}{۱۰+۲+۲۵}=\frac{۲۵}{۳۷}$$

در اینجا منظور از W در $\int_{W}$، تمام فضا می‌باشد.

تمرین ۷-۸

ذره‌ای با اسپین $\frac{۱}{۲}$ در یک حالت $\mathbf{d}$ از اندازه حرکت زاویه‌ای مداری است (یعنی $l=۲$). جمع اندازه‌حرکت‌های زاویه‌ای مداری و اسپینی این ذره را محاسبه و همه‌ی حالت‌ها و ضرایب کلبش - گوردون متناظر را بیابید.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

در این مسئله از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left|l\pm\frac{۱}{۲},m\right\rangle=\pm\sqrt{\frac{l\pm m+\frac{۱}{۲}}{۲l+۱}}\left|l,\frac{۱}{۲};m-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{l\mp m+\frac{۱}{۲}}{۲l+۱}}\left|l,\frac{۱}{۲};m+\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|۲+\frac{۱}{۲},m\right\rangle=\sqrt{\frac{\frac{۵}{۲}+m}{۵}}\left|۲,\frac{۱}{۲};m-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{\frac{۵}{۲}-m}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};m+\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۵}{۲},m\right\rangle=\sqrt{\frac{۵+۲m}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};m-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۵-۲m}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};m+\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲}\right\rangle=\left|۲,\frac{۱}{۲};۲,\frac{۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}\right\rangle=\sqrt{\frac{۸}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};۱,\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};۲,\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۵}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle=\sqrt{\frac{۶}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};۰,\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۴}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};۱,\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۵}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle=\sqrt{\frac{۴}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};-۱,\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۶}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};۰,\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۵}{۲},\frac{-۳}{۲}\right\rangle=\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};-۲,\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۸}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};-۱,\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۵}{۲},\frac{-۵}{۲}\right\rangle=\left|۲,\frac{۱}{۲};-۲,-\frac{۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|۲-\frac{۱}{۲},m\right\rangle=-\sqrt{\frac{۲-m+\frac{۱}{۲}}{۲\times۲+۱}}\left|۲,\frac{۱}{۲};m-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۲+m+\frac{۱}{۲}}{۲\times۲+۱}}\left|l,\frac{۱}{۲};m+\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۳}{۲},m\right\rangle=-\sqrt{\frac{۵-۲m}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};m-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۵+۲m}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};m+\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}\right\rangle=-\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};۱,\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۸}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};۲,\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle=-\sqrt{\frac{۴}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};۰,\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۶}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};۱,\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۳}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle=-\sqrt{\frac{۶}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};-۱,\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۴}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};۰,\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left|\frac{۳}{۲},\frac{-۳}{۲}\right\rangle=-\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};-۲,\frac{۱}{۲}\right\rangle+\sqrt{\frac{۸}{۱۰}}\left|۲,\frac{۱}{۲};-۱,\frac{-۱}{۲}\right\rangle$$

تمرین ۷-۹

هامیلتونی وابسته به اسپین یک سیستم شامل الکترون – پوزیترون را در حضوریک میدان مغناطیسی یکنواخت در جهت z $(\vec{B}=B\hat{k})$ می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{H}=\lambda\hat{\vec{S}}_۱.\hat{\vec{S}}_۲+\left(\frac{eB}{mc}\right)\left(\hat{S}_{۱z}-\hat{S}_{۲z}\right)$$

که در آن λ یک عدد حقیقی و $\hat{\vec{S}}_۱$ و $\hat{\vec{S}}_۲$ عملگرهای اسپین به‌ترتیب برای الکترون و پوزیترون هستند.

(آ) اگر تابع اسپین سیستم با $\left|\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\right\rangle$ داده شود، ویژه مقدارهای انرژی و ویژه بردارهای متناظر آن‌ها را بیابید.

(ب) قسمت (آ) را برای حالتی که در آن $\lambda=۰$ اما $B\neq۰$ تکرار کنید.

(پ) قسمت (آ) را برای حالتی که در آن $B=۰$ اما $\lambda\neq۰$ تکرار کنید.

حل:

هامیلتونی سیستم را به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$H=\frac{\lambda}{۲}\left(۲S_{۱z}S_{۲z}+S_{۱+}S_{۲-}+S_{۱-}S_{۲+}\right)+\frac{eB}{mc}\left(\hat{S}_{۱z}-\hat{S}_{۲z}\right)$$

نمایش ماتریسی در پایه‌های $\left|s_۱s_۲;m_۱m_۲\right\rangle$ را به‌طور مختصر با $\left|m_۱m_۲\right\rangle$ نشان می‌دهیم:

$$\hat{H}=\begin{bmatrix}\langle++|\hat{H}|++\rangle & \langle++|\hat{H}|+-\rangle & \langle++|\hat{H}|-+\rangle & \langle++|\hat{H}|--\rangle\\ \langle+-|\hat{H}|++\rangle & \langle+-|\hat{H}|+-\rangle & \langle+-|\hat{H}|-+\rangle & \langle+-|\hat{H}|--\rangle\\ \langle-+|\hat{H}|++\rangle & \langle-+|\hat{H}|+-\rangle & \langle-+|\hat{H}|-+\rangle & \langle-+|\hat{H}|--\rangle\\ \langle--|\hat{H}|++\rangle & \langle--|\hat{H}|+-\rangle & \langle--|\hat{H}|-+\rangle & \langle--|\hat{H}|--\rangle\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\lambda}{۲}\hbar^۲ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & -\frac{\lambda}{۴}\hbar^۲+\frac{eB\hbar}{mc} & \frac{\lambda}{۲}\hbar^۲ & ۰\\ ۰ & \frac{\lambda}{۲}\hbar^۲ & -\frac{\lambda}{۴}\hbar^۲-\frac{eB\hbar}{mc} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{\lambda}{۴}\hbar^۲\end{bmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

اما برای یافتن ویژه مقادیر H باید معادله‌ی ویژه مقداری $\det\left(\hat{H}-E\hat{I}\right)=0$ را حل کنیم. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\left|E_1=\frac{\lambda}{4}\hbar^2\right\rangle=|++\rangle$$

$$\left|E_2=\frac{-\lambda}{4}\hbar^2+\sqrt{\left(\frac{eB\hbar}{mc}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\hbar^2\right)^2}\right\rangle=\frac{\frac{\lambda}{2}\hbar^2|+-\rangle+\left[\frac{-eB\hbar}{mc}+\sqrt{\left(\frac{eB\hbar}{mc}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\hbar^2\right)^2}\right]|-+\rangle}{\left[\left(\frac{\lambda}{2}\hbar^2\right)^2+\left[\frac{-eB\hbar}{mc}+\sqrt{\left(\frac{eB\hbar}{mc}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\hbar^2\right)^2}\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left|E_3=-\frac{\lambda}{4}\hbar^2-\sqrt{\left(\frac{eB\hbar}{mc}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\hbar^2\right)^2}\right\rangle=\frac{\left[\frac{\lambda}{2}\hbar^2+\sqrt{\left(\frac{eB\hbar}{mc}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\hbar^2\right)^2}\right]|+-\rangle-\frac{eB\hbar}{mc}|-+\rangle}{\left[\left(\frac{+eB\hbar}{mc}\right)^2+\left[\frac{\lambda}{2}\hbar^2+\sqrt{\left(\frac{eB\hbar}{mc}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\hbar^2\right)^2}\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left|E_4=\frac{\lambda}{4}\hbar^2\right\rangle=|--\rangle$$

(ب)

برای مورد $\lambda=0$، هامیلتونی به‌شکل زیر در می‌آید:

$$H=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{eB\hbar}{mc}&0&0\\0&0&\frac{-eB\hbar}{mc}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

بس به‌دلیل قطری شدن هامیلتونی، عناصر روی قطر اصلی ویژه مقادیر خواهند بود و ویژه بردارهای متناظر نیز عبارتند از:

$$|E_1=0\rangle=|++\rangle$$
$$\left|E_2=\frac{eB\hbar}{mc}\right\rangle=|+-\rangle$$
$$\left|E_3=\frac{-eB\hbar}{mc}\right\rangle=|-+\rangle$$
$$|E_4=0\rangle=|--\rangle$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

که این مورد انتظار ما نیز می‌باشد چون وقتی $\lambda = 0$ ؛ آنگاه:

$$H|m_1 m_2\rangle = \left(\frac{eB}{mc}\right)\left(\hat{S}_{1Z} - \hat{S}_{2Z}\right)|m_1 m_2\rangle = \frac{eB\hbar}{mc}(m_1 - m_2)$$

(پ)

برای مورد $B = 0$ خواهیم داشت:

$$H = \lambda\left(\vec{S}_1.\vec{S_2}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)$$

که در این رابطه: $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. پس ویژه بردارهای هامیلتونی، $|s_1 s_2; s m_s\rangle$ها خواهند بود و داریم:

$$H|s_1 s_2; s m_s\rangle = \frac{\lambda\hbar^2}{2}\left[\left(s(s+1)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] = \frac{\lambda\hbar^2}{2}\left(s(s+1) - \frac{3}{2}\right)$$

البته این نتیجه به‌طور طبیعی از صفر کردن B در نمایش ماتریسی هامیلتونی نیز به‌دست می‌آید.

تمرین ۷-۱۰

(آ) نشان دهید که $e^{-i\pi\hat{J}_z/2} e^{-i\pi\hat{J}_x} e^{i\pi\hat{J}_z/2} = e^{-i\pi\hat{J}_y}$

(ب) ثابت کنید که $\hat{J}_- e^{-i\pi\hat{J}_x} = e^{-i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_+$ و آن‌گاه نشان دهید $e^{-i\pi\hat{J}_x}|j,m\rangle = e^{-i\pi j}|j,-m\rangle$.

(پ) با استفاده از (آ) و (ب) نشان دهید که $e^{-i\pi\hat{J}_y}|j,m\rangle = (-1)^{j-m}|j,-m\rangle$.

حل:

(آ)

طبق رابطه‌ی اثبات شده در متن کتاب داریم:

$$e^{i\alpha\frac{\hat{J}_z}{\hbar}}\hat{J}_x e^{-i\alpha\frac{\hat{J}_z}{\hbar}} = \hat{J}_x\cos\alpha - \hat{J}_y\sin\alpha$$

$$e^{-i\pi\frac{\hat{J}_z}{2}}\hat{J}_x e^{\frac{i\pi J_z}{2}} = \hat{J}_x\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \hat{J}_y\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \hat{J}_y$$

و لذا:

$$e^{-i\pi\frac{\hat{J}_z}{2}}\hat{J}_x^2 e^{\frac{i\pi J_z}{2}} = e^{-i\pi\frac{\hat{J}_z}{2}}\hat{J}_x e^{\frac{i\pi J_z}{2}} e^{\frac{-i\pi J_z}{2}}\hat{J}_x e^{\frac{i\pi J_z}{2}} = \hat{J}_y\hat{J}_y = \hat{J}_y^2$$

$$e^{\frac{-i\pi\hat{J}_z}{2}}\hat{J}_x^3 e^{\frac{i\pi J_z}{2}} = e^{\frac{-i\pi\hat{J}_z}{2}}J_x^2\hat{J}e^{\frac{i\pi J_z}{2}} e^{\frac{-i\pi J_z}{2}}\hat{J}_x e^{\frac{i\pi J_z}{2}} = \hat{J}_y^2\hat{J}_y = \hat{J}_y^3$$

بنابراین:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$e^{\frac{-i\pi J_z}{2}}\hat{J}_x^n e^{\frac{i\pi J_z}{2}}=\hat{J}_y^n$$

در نتیجه:

$$e^{\frac{-i\pi J_z}{2}}e^{-i\pi J_x}e^{i\pi\frac{\hat{J}_z}{2}}=e^{\frac{-i\pi J_z}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-i\pi J_x\right)^n}{n!}\right)e^{\frac{i\pi J_z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-i\pi\right)^n}{n!}e^{\frac{-i\pi J_z}{2}}J_x^n e^{\frac{i\pi J_z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-i\pi\right)^n}{n!}J_y^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-i\pi J_y\right)^n}{n!}=e^{-i\pi J_y}$$

(ب)

ابتدا معادل $e^{i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_-e^{-i\pi\hat{J}_x}$ را می‌یابیم

$$e^{i\pi J_x}\hat{J}_-e^{-i\pi\hat{J}_x}=e^{i\pi J_x}\left(J_x-iJ_y\right)e^{-i\pi\hat{J}_x}=e^{i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_x e^{-i\pi\hat{J}_x}-ie^{i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_y e^{-i\pi\hat{J}_x}=\hat{J}_x+i\hat{J}_y=\hat{J}_+$$

پس:

$$\hat{J}_-e^{-i\pi\hat{J}_x}=e^{-i\pi\hat{J}_x}e^{i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_-e^{-i\pi J_x}=e^{-i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_+$$

پس نتیجه می‌گیریم که:

$$e^{i\pi J_x}\hat{J}_-^2e^{-i\pi\hat{J}_x}=e^{i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_-e^{-i\pi\hat{J}_x}e^{i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_-e^{-i\pi\hat{J}_x}=\hat{J}_+^2$$

$$e^{i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_-^n e^{-i\pi J_x}=e^{i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_-e^{-i\pi\hat{J}_x}e^{i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_-e^{-i\pi\hat{J}_x}...e^{i\pi\hat{J}_x}\hat{J}_-e^{i\pi\hat{J}_x}=\hat{J}_+\hat{J}_+...\hat{J}_+=\hat{J}_+^n$$

حال با فرض: $n=j-m+1$؛ داریم:

$$\left(\hat{J}_-\right)^{j-m+1}e^{-i\pi J_x}\left|j,m\right\rangle=e^{-i\pi\hat{J}_x}\left(\hat{J}_+\right)^{j-m+1}\left|j,m\right\rangle=0$$

از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود که $e^{-i\pi J_x}\left|j,m\right\rangle$ تا حد یک عامل فاز η باید برابر با $\left|j,-m\right\rangle$ باشد. اگر η را $e^{-i\pi j}$ فرض کنیم به رابطه‌ی مطلوب خود رسیده‌ایم یعنی:

$$e^{-i\pi\hat{J}_x}\left|j,m\right\rangle=e^{-i\pi j}\left|j,-m\right\rangle$$

(پ)

$$e^{-i\pi\hat{J}_y}\left|j,m\right\rangle=e^{-\frac{i\pi\hat{J}_z}{2}}e^{\frac{i\pi\hat{J}_z}{2}}\left|j,m\right\rangle=e^{-\frac{i\pi\hat{J}_z}{2}}e^{-i\pi\hat{J}_x}e^{\frac{i\pi m}{2}}\left|j,m\right\rangle=e^{-\frac{i\pi\hat{J}_z}{2}}e^{\frac{i\pi m}{2}}e^{-i\pi j}\left|j,-m\right\rangle$$

$$=e^{-\frac{i\pi}{2}(-m)}e^{\frac{i\pi m}{2}}e^{-i\pi j}\left|j,-m\right\rangle=e^{-i\pi(j-m)}\left|j,-m\right\rangle=\left(e^{-i\pi}\right)^{j-m}\left|j,-m\right\rangle$$

$$=\left[\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right]^{j-m}\left|j,-m\right\rangle=(-1)^{j-m}\left|j,m\right\rangle$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۷-۱۱

با استفاده از روابط جابه‌جایی میان ماتریس‌های پاولی نشان دهید که:

(آ) $e^{i\alpha\sigma_y}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_y} = \sigma_x\cos(2\alpha)+\sigma_z\sin(2\alpha)$

(ب) $e^{i\alpha\sigma_z}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_z} = \sigma_x\cos(2\alpha)-\sigma_y\sin(2\alpha)$

(پ) $e^{i\alpha\sigma_x}\sigma_y e^{-i\alpha\sigma_x} = \sigma_y\cos(2\alpha)-\sigma_z\sin(2\alpha)$

حل:

در اینجا باید توجه داشته باشیم که:

$$\left[\sigma_i,\sigma_j\right]=2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha\sigma_y}\sigma_x e^{-i\alpha\sigma_y} &= \sigma_x+\left[i\alpha\sigma_y,\sigma_x\right]+\frac{1}{2!}\left[i\alpha\sigma_y,\left[i\alpha\sigma_y,\sigma_x\right]\right]+\frac{1}{3!}\left[i\alpha\sigma_y,\left[i\alpha\sigma_y,\left[i\alpha\sigma_y,\sigma_x\right]\right]\right]+\dots\\
&= \sigma_x+2\alpha\sigma_z+\frac{1}{2!}\left[i\alpha\sigma_y,+2\alpha\sigma_z\right]+\frac{1}{3!}\left[i\alpha\sigma_y,\left[i\alpha\sigma_y,+2\alpha\sigma_z\right]\right]+\dots\\
&= \sigma_x+2\alpha\sigma_z-\frac{1}{2!}(2\alpha)^2\sigma_x-\frac{1}{3!}(2\alpha)^2\sigma_z+\dots=\sigma_x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\alpha)^{2n}}{(2n)!}\\
&+\sigma_z\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2\alpha)^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sigma_x\cos(2\alpha)+\sigma_z\sin(2\alpha)
\end{aligned}$$

به‌طور مشابه قسمت‌های (ب) و (پ) را نیز می‌توان ثابت کرد.

تمرین ۷-۱۲

(آ) نشان دهید که چگونه $\hat{J}_x$ ، $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$ تحت یک دوران متناهی به اندازه‌ی زاویه‌ی α حول محور x تبدیل می‌شوند.

(ب) با استفاده از نتایج قسمت (آ) تعیین کنید چگونه عملگر اندازه حرکت زاویه‌ای $\hat{J}$ تحت دوران تبدیل می‌شود.

حل:

(آ)

عملگر متناظر با دوران به اندازه‌ی زاویه‌ی α حول محور x توسط $\hat{R}_x(\alpha)=e^{-i\alpha\frac{\hat{J}_x}{\hbar}}$ داده می‌شود. تحت این دوران، عملگر $\hat{B}$ نظیر $\hat{B}'=R_x^{\dagger}\hat{B}\hat{R}_x$ تبدیل می‌شود. با استفاده از رابطه:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}=\hat{B}+\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]+\frac{1}{3!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]\right]+\dots$$

و نیز روابط جابجایی:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right]=i\hbar\hat{J}_z \quad , \quad \left[\hat{J}_x,\hat{J}_z\right]=-i\hbar\hat{J}_y$$

خواهیم داشت:

$$e^{\frac{i\alpha\hat{J}_x}{\hbar}}\hat{J}_y e^{-\frac{i\alpha\hat{J}_x}{\hbar}}=\hat{J}_y+\frac{i\alpha}{\hbar}\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right]-\frac{\alpha^2}{2!\hbar^2}\left[\hat{J}_x,\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right]\right]+\dots$$

$$=\hat{J}_y-\alpha\hat{J}_z-\frac{\alpha^2}{2!}\hat{J}_y+\frac{\alpha^3}{3!}\hat{J}_z+\frac{\alpha^4}{4!}\hat{J}_y-\frac{\alpha^5}{5!}\hat{J}_z+\dots$$

$$=\hat{J}_y\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\dots\right)-\hat{J}_z\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}+\dots\right)=\hat{J}_y\cos\alpha-\hat{J}_z\sin\alpha$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که:

$$e^{\frac{i\alpha\hat{J}_x}{\hbar}}\hat{J}_z e^{-\frac{i\alpha\hat{J}_x}{\hbar}}=\hat{J}_y\sin\alpha+\hat{J}_z\cos\alpha$$

(ب)

تحت این دوران، عملگر اندازه حرکت زاویه‌ای $\hat{\vec{J}}$ به‌صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$e^{i\alpha\frac{\hat{J}_x}{\hbar}}\hat{\vec{J}}e^{-i\alpha\frac{\hat{J}_x}{\hbar}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_x\\ J_y\\ J_z\end{pmatrix}$$

تمرین ۷-۱۳

(آ) نشان دهید چگونه عملگر $J_\pm$ تحت دورانی به اندازه‌ی زاویه‌ی π حول محور x تبدیل می‌شود.

(ب) از نتیجه‌ی قسمت (آ) استفاده کنید تا نشان دهید که $\hat{J}_\pm e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}=e^{-i\pi\hat{J}_x/\hbar}\hat{J}_\pm$.

حل:

از قسمت (ب) تمرین ۷-۸ داریم:

$$e^{\frac{i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}\hat{J}_- e^{\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}=\hat{J}_+\Rightarrow\hat{J}_-=e^{\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}\hat{J}_+ e^{\frac{+i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}$$

پس:

$$\left(e^{\frac{+i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}\hat{J}_+ e^{\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}\right)^\dagger=J_-^\dagger$$

$$e^{\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}\hat{J}_- e^{\frac{i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}=\hat{J}_+$$

یعنی در حالت کلی:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$e^{\frac{i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}\hat{J}_{\pm}e^{\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}=\hat{J}_{\mp}$$

لذا:

$$\hat{J}_{\pm}e^{\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}=e^{\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}e^{\frac{i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}\hat{J}_{\pm}e^{\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}=e^{\frac{-i\pi\hat{J}_x}{\hbar}}\hat{J}_{\mp}$$

تمرین ۷-۱۴

دورانی با زاویه‌ی متناهی α حول یک محور $\vec{n}$ را درنظر بگیرید که بردار یکه‌ی $\hat{a}$ را به یک بردار یکه‌ی دیگر $\hat{b}$ تبدیل می‌کند. نشان دهید که $e^{-i\beta\hat{J}_b/\hbar}=e^{i\alpha\hat{J}_n/\hbar}e^{-i\beta\hat{J}_b/\hbar}e^{-i\alpha\hat{J}_n/\hbar}$.

حل:

باید توجه داشت که $\vec{J}$ تحت دوران مانند یک بردار رفتار می‌کند و چون:

$$\vec{b}=R_n(\alpha)\vec{a}$$

بنابراین:

$$e^{i\alpha\frac{\hat{J}_n}{\hbar}}\hat{J}_a e^{-i\alpha\frac{\hat{J}_n}{\hbar}}=\hat{J}_b$$

و از این رابطه می‌توان گفت:

$$e^{i\alpha\frac{\hat{J}_n}{\hbar}}\hat{J}_a{}^m e^{-i\alpha\frac{\hat{J}_n}{\hbar}}=\hat{J}_b{}^m$$

زیرا:

$$e^{i\alpha\frac{\hat{J}_n}{\hbar}}\hat{J}_a{}^m e^{-i\alpha\frac{\hat{J}_m}{\hbar}}=e^{i\frac{\alpha\hat{J}_n}{\hbar}}\hat{J}_a e^{-i\frac{\alpha\hat{J}_n}{\hbar}}e^{i\frac{\alpha\hat{J}_n}{\hbar}}\hat{J}_a e^{-i\frac{\alpha\hat{J}_n}{\hbar}}\ldots e^{i\frac{\alpha\hat{J}_n}{\hbar}}\hat{J}_a e^{-i\frac{\alpha\hat{J}_n}{\hbar}}=\hat{J}_b\hat{J}_b\ldots\hat{J}_b=\hat{J}_b{}^m$$

پس:

$$e^{i\alpha\frac{\hat{J}_n}{\hbar}}e^{-i\beta\frac{\hat{J}_a}{\hbar}}e^{-i\alpha\frac{\hat{J}_n}{\hbar}}=\sum_{m=0}^{\infty}e^{\frac{i\alpha\hat{J}_n}{\hbar}}\frac{1}{m!}\left(\frac{-i\beta\hat{J}_a}{\hbar}\right)^m e^{-\frac{i\alpha\hat{J}_n}{\hbar}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{-i\beta\hat{J}_b}{\hbar}\right)^m=e^{\frac{-i\beta\hat{J}_b}{\hbar}}$$

تمرین ۷-۱۵

(آ) نشان دهید که $e^{i\pi\hat{J}_y/2\hbar}\hat{J}_x e^{-i\pi\hat{J}_y/2\hbar}=\hat{J}_z$.

(ب) همچنین نشان دهید که $e^{i\pi\hat{J}_y/2\hbar}e^{i\alpha\hat{J}_x/\hbar}e^{-i\pi\hat{J}_y/2\hbar}=e^{i\alpha\hat{J}_z/\hbar}$.

(پ) برای هر عملگر برداری $\vec{A}$، نشان دهید که $e^{i\alpha\hat{J}_z/\hbar}\hat{A}_x e^{-i\alpha\hat{J}_z/\hbar}=\hat{A}_x\cos\alpha-\hat{A}_y\sin\alpha$.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

با توجه به اتحاد:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}=\hat{B}+\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]+\frac{1}{3!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]\right]+\ldots$$

و چون:

$$\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right]=i\hbar\hat{J}_z$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}e^{\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}\hat{J}_x e^{\frac{-i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}&=\hat{J}_x+\left[\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar},\hat{J}_x\right]+\frac{1}{2!}\left[\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar},\left[\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar},\hat{J}_x\right]\right]+\frac{1}{3!}\left[\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar},\left[\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar},\left[i\frac{\pi\hat{J}_y}{2\hbar},\hat{J}_x\right]\right]\right]+\ldots\\&=\hat{J}_x+\frac{i\pi}{2\hbar}\left[\hat{J}_y,\hat{J}_x\right]+\frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{2\hbar}\right)^2\left[\hat{J}_y\left[\hat{J}_y,\hat{J}_x\right]\right]+\frac{1}{3!}\left(\frac{i\pi}{2\hbar}\right)^3\left[\hat{J}_y\left[\hat{J}_y,\left[\hat{J}_y,\hat{J}_x\right]\right]\right]+\ldots\\&=\hat{J}_x+\frac{i\pi}{2\hbar}\left[-i\hbar\hat{J}_z\right]+\frac{1}{2!}\left(\frac{i\pi}{2\hbar}\right)^2\left[\hat{J}_y,-i\hbar\hat{J}_z\right]+\frac{1}{3!}\left(\frac{i\pi}{2\hbar}\right)^3\left[\hat{J}_y,\hbar^2\hat{J}_x\right]+\ldots\\&=\hat{J}_x+\frac{\pi}{2}\hat{J}_z-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\hat{J}_x-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\hat{J}_z+\ldots\\&=\hat{J}_x\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\ldots\right)+\hat{J}_z\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\ldots\right)=\hat{J}_x\cos\frac{\pi}{2}+\hat{J}_z\sin\frac{\pi}{2}=\hat{J}_z\end{aligned}$$

(ب)

با توجه به اینکه:

$$e^{\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}\hat{J}_x^n e^{\frac{-i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}=e^{\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}\hat{J}_x e^{\frac{-i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}e^{\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}\hat{J}_x e^{\frac{-i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}\ldots e^{\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}\hat{J}_x e^{\frac{-i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}=\hat{J}_z\hat{J}_z\ldots\hat{J}_z=J_z^n$$

پس:

$$\begin{aligned}e^{\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}e^{i\alpha\frac{\hat{J}_x}{\hbar}}e^{\frac{-i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}&=e^{\frac{i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\alpha\hat{J}_x}{\hbar}\right)^n e^{\frac{-i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\right)^n e^{\frac{i\pi J_y}{2\hbar}}\hat{J}_x^n e^{\frac{-i\pi\hat{J}_y}{2\hbar}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\alpha\hat{J}_z}{\hbar}\right)^n\\&=e^{\frac{i\alpha\hat{J}_z}{\hbar}}\end{aligned}$$

(پ)

با استفاده از روابط (۷-۲۸۲) الی (۷-۲۸۴) متن کتاب داریم:

$$\begin{aligned}e^{\frac{i\alpha\hat{J}_z}{\hbar}}A_x e^{\frac{-i\alpha\hat{J}_z}{\hbar}}&=A_x+\left[\frac{i\alpha\hat{J}_z}{\hbar},A_x\right]+\frac{1}{2!}\left[\frac{i\alpha\hat{J}_z}{\hbar},\left[\frac{i\alpha\hat{J}_z}{\hbar},A_x\right]\right]+\frac{1}{3!}\left[\frac{i\alpha\hat{J}_z}{\hbar},\left[\frac{i\alpha\hat{J}_x}{\hbar},\left[\frac{i\alpha\hat{J}_z}{\hbar},A_x\right]\right]\right]\\&=\hat{A}_x+\frac{i\alpha}{\hbar}\left[\hat{J}_z,\hat{A}_x\right]-\frac{\alpha^2}{2!\hbar^2}\left[\hat{J}_z,\left[\hat{J}_z,\hat{A}_x\right]\right]-\frac{i\alpha^3}{3!\hbar^3}\left[\hat{J}_z\left[\hat{J}_z,\left[\hat{J}_z,\hat{A}_x\right]\right]\right]+\ldots\end{aligned}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \hat{A}_x - \alpha \hat{A}_y - \frac{\alpha^2}{2!}\hat{A}_x + \frac{\alpha^3}{3!}\hat{A}_y + \frac{\alpha^4}{4!}\hat{A}_x - \frac{\alpha^5}{5!}\hat{A}_y + \ldots$$

$$= \hat{A}_x\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \ldots\right) - \hat{A}_y\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \ldots\right) = \hat{A}_x \cos\alpha - \hat{A}_y \sin\alpha$$

تمرین ۷-۱۶

با استفاده از $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2$ نشان دهید که

$$d^{(j)}_{mm'}(\beta) = \sum_{m_1 m_2} \sum_{m'_1 m'_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 \mid j, m\rangle \langle j_1, j_2; m'_1 m'_2 \mid j, m'\rangle d^{(j_1)}_{m_1 m'_1}(\beta) d^{(j_2)}_{m_2 m'_2}(\beta)$$

حل:

در اینجا باید بدانیم که:

$$\hat{J}_y = \hat{J}_{1y} + \hat{J}_{2y}$$

$$|j_1, j_2; m_1 m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

با توجه به این نکات داریم:

$$d^{(j)}_{mm'}(\beta) = \left\langle j_1, j_2; jm \left| e^{\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}} \right| j_1, j_2, jm' \right\rangle$$

اما از طرفی:

$$|j_1, j_2; jm'\rangle = \sum_{m'_1 m'_2} |j_1, j_2; m'_1 m'_2\rangle \langle j_1, j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm'\rangle$$

$$\langle j_1, j_2; jm| = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | \langle j_1, j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle$$

در نوشتن خط آخر از حقیقی بودن ضرایب کلبش - گوردون استفاده کرده‌ایم. پس خواهیم داشت:

$$d^{(j)}_{mm'}(\beta) = \sum_{m_1 m_2} \sum_{m'_1 m'_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm'\rangle \left\langle j_1 j_2; m_1 m_2 \left| e^{-\frac{i\beta}{\hbar}(J_{1y} + J_{2y})} \right| j_1, j_2; m'_1 m'_2 \right\rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_2} \sum_{m'_1 m'_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm'\rangle \left\langle j_1 m_1 \left| e^{-\frac{i\beta J_{1y}}{\hbar}} \right| j_1 m'_1 \right\rangle \left\langle j_2 m_2 \left| e^{-\frac{i\beta J_{2y}}{\hbar}} \right| j_2 m'_2 \right\rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_2} \sum_{m'_1 m'_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle \langle j_1 j_2; m'_1 m'_2 | j_1 j_2; jm'\rangle d^{(j_1)}_{m_1 m'_1}(\beta) d^{(j_2)}_{m_2 m'_2}(\beta)$$

تمرین ۷-۱۷

تانسور $A(\theta, \varphi) = \cos\theta \sin\theta \cos\varphi$ را درنظر بگیرید.

(آ) درایه‌های ماتریسی $A_{m'm} = \langle l, m' | A | l, m\rangle$ را برای $l = 1$ حساب کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب) $A(\theta,\varphi)$ را برحسب مؤلفه‌های یک تانسور کروی از درجه‌ی ۲ بیان کنید. (یعنی برحسب $Y_{2m}(\theta,\varphi)$)

(پ) دوباره، همه‌ی درایه‌های ماتریسی $A_{m'm}$ را محاسبه کنید، اما این بار با استفاده از قضیه‌ی ویگنر ـ اکارت. این نتایج را با نتایج به‌دست آمده که در (آ) مقایسه کنید. (ضرایب کلبش‌ـ گوردون را از جدول به‌دست آورید.)

حل:

(آ)

ابتدا شکل انتگرالی $A_{m'm}$ را می‌نویسیم:

$$A_{m'm}=\int d\Omega\, Y^*_{1m'}(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta\cos\varphi Y_{1m}(\theta,\phi)$$

پس:

$$A_{11}=\int d\Omega\, Y^*_{11}(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta\cos\varphi Y_{11}(\theta,\phi)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta\sin\theta\cos\phi\left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{i\phi}\sin\theta\right)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\phi\,d\phi\int_0^{\pi}\frac{3}{8\pi}\sin^4\theta\cos\theta\,d\theta=0$$

به‌همین ترتیب A_{00}, A_{1-1} نیز صفر می‌شوند.

$$A_{10}=A^*_{01}=\int d\Omega\, Y^*_{11}(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta\cos\phi Y_{10}(\theta,\phi)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\cos\phi\,e^{-i\phi}\int_0^{\pi}\frac{-3\sqrt{2}}{8\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\pi\frac{-3\sqrt{2}}{8\pi}\left(\frac{4}{15}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{10}$$

$$A_{1,-1}=A^*_{-1,1}=\int d\Omega Y^*_{11}(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta\cos\phi Y_{1-1}(\theta,\phi)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta\sin\theta\cos\phi\left(\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta\right)\sin\theta\,d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}e^{-2i\phi}\cos\phi\,d\phi\int_0^{\pi}\frac{3}{8\pi}\sin^4\theta\cos\theta\,d\theta=0$$

$$A_{0,-1}=A^*_{-1,0}=\int d\Omega Y^*_{10}(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta\cos\phi Y_{1-1}(\theta,\phi)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta\sin\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{2}}{10} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{10} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{10} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

(ب)

با استفاده از رابطه:

$$Y_{2\pm1}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{\pm i\phi}\sin\theta\cos\theta$$

می‌توان $A(r,\theta)$ را برحسب $Y_{2\pm1}$ به‌دست آورد، برای این منظور داریم:

$$A(\theta,\phi)=\cos\theta\sin\theta\cos\phi=\cos\theta\sin\theta\left(\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left(-Y_{2+1}+Y_{2-1}\right)$$

(پ)

قضیه‌ی ویگنر – اکارت به‌صورت زیر است:

$$\left\langle j'm'\middle|\hat{T}_q^{(k)}\middle|j,m\right\rangle=\left\langle jk;m,q\middle|j'm'\right\rangle\left\langle j'\middle\|\hat{T}^{(k)}\middle\|j\right\rangle$$

که در آن $T_q^{(k)}$، مؤلّفه q ام یک تانسور مرتبه k می‌باشد.

$$\left\langle 1,m'\middle|A(\theta,\phi)\middle|1,m\right\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left[-\left\langle 1,m'\middle|Y_{21}\middle|1,m\right\rangle+\left\langle 1,m'\middle|Y_{2,-1}\middle|1,m\right\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left[-\left\langle 12;m,1\middle|1m'\right\rangle+\left\langle 12;m,-1\middle|1m'\right\rangle\right]\left\langle 1\middle\|Y_2\middle\|1\right\rangle$$

از رابطه‌ی اخیر واضح است که $A_{m'm}$ فقط وقتی صفر است که:

$$\Delta m=m'-m=\pm1$$

پس بنابراین عناصر غیر صفر عبارت از $A_{0,\pm1}$ ، A_{10},A_{-10} می‌باشند. حال کار را ادامه می‌دهیم:

$$\left\langle 11\middle|Y_{21}\middle|10\right\rangle=\left\langle 12;01\middle|11\right\rangle\left\langle 1\middle\|Y_2\middle\|1\right\rangle$$

حال به محاسبه‌ی مستقیم $\left\langle 11\middle|Y_{21}\middle|10\right\rangle$ می‌پردازیم.

$$\left\langle 11\middle|Y_{21}\middle|10\right\rangle=\int d\Omega\, Y_{11}^*(\theta,\phi)Y_{21}Y_{10}(\theta,\phi)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta\left(-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{i\phi}\sin\theta\cos\theta\right)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\frac{3\sqrt{5}}{8\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=+2\pi\frac{3\sqrt{5}}{8\pi}\frac{4}{15}=\frac{1}{10}\sqrt{\frac{15}{\pi}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پس:

$$\langle 1\|Y_2\|1\rangle = \frac{\langle 11|Y_{21}|10\rangle}{\langle 12;01|11\rangle} = \frac{\frac{1}{10}\sqrt{\frac{15}{\pi}}}{-\sqrt{\frac{3}{10}}} = \frac{-1}{10}\sqrt{\frac{50}{\pi}}$$

حال با دانستن $\langle 1\|Y_2\|1\rangle$ به محاسبه‌ی $A_{\pm 1}$، A_{10} و A_{-10} می‌پردازیم.

$$A_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left[-\langle 12;11|10\rangle + \langle 12;1,-1|10\rangle\right]\langle 1\|Y_2\|1\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\langle 12;1,-1|10\rangle\langle 1\|Y_2\|1\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\times\frac{-1}{10}\sqrt{\frac{50}{\pi}}\times\sqrt{\frac{3}{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10} = A_{10}^*$$

$$A_{1-1} = A_{10}^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left[-\langle 12,-1,1|10\rangle + \langle 12,-1,-1|10\rangle\right]\langle 1\|Y_2\|1\rangle = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\langle 12;-1,1\rangle\langle 1\|Y_2\|1\rangle$$

$$= +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\times\sqrt{\frac{3}{10}}\times\frac{+1}{10}\sqrt{\frac{50}{\pi}} = +\frac{\sqrt{2}}{10}$$

ملاحظه می‌شود که نتایج دقیقاً با قسمت (آ) یکسان است.

تمرین ۷-۱۸

(آ) $\frac{xz}{r^2}$ و $\frac{x^2-y^2}{r^2}$ را برحسب مؤلفه‌های یک تانسور کروی از درجه‌ی ۲ بیان کنید.

(ب) با استفاده از قضیه‌ی ویگنر ـ اکارت، مقادیر $\langle 1,1|\frac{xz}{r^2}|1,1\rangle$ و $\langle 1,0|(x^2-y^2)/r^2|1,-1\rangle$ را محاسبه کنید.

حل:

(آ)

در اینجا از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$Y_{2\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{\pm i\phi}\sin\theta\cos\theta$$

$$Y_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{\pm 2i\phi}\sin^2\theta$$

حال به ادامه‌ی کار می‌پردازیم:

$$\frac{xz}{r^2} = \frac{r\sin\theta\cos\phi\, r\cos\theta}{r^2} = \sin\theta\cos\theta\cos\phi = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left[-Y_{21}(\theta,\phi)+Y_{2-1}(\theta,\phi)\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{x^2-y^2}{r^2}=\frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\phi-r^2\sin^2\sin^2\theta}{r^2}=\sin^2\theta\left(\cos^2\phi-\sin^2\phi\right)=\sin^2\theta\cos 2\phi$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\left(e^{2i\phi}+e^{-2i\phi}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\left(Y_{22}+Y_{2-2}\right)$$

(ب)

$$\left\langle 1,0\left|\frac{xz}{r^2}\right|1,1\right\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left\langle 10\left|-Y_{21}+Y_{2-1}\right|11\right\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left[-\left\langle 1,2;1,1|10\right\rangle+\left\langle 1,2;1,-1|10\right\rangle\right]\left\langle 1\|Y_2\|1\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left\langle 1,2;1,-1|10\right\rangle\left\langle 1\|Y_2\|1\right\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\times\sqrt{\frac{3}{10}}\times\frac{-1}{10}\sqrt{\frac{50}{\pi}}=\frac{-\sqrt{2}}{10}$$

$$\left\langle 11\left|\frac{x^2-y^2}{r^2}\right|1,-1\right\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\left\langle 11\left|Y_{22}+Y_{2-2}\right|1,-1\right\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\left[\left\langle 1,2;-1,2|11\right\rangle+\left\langle 1,2;-1,-2|11\right\rangle\right]\left\langle 1\|Y_2\|1\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\left\langle 1,2;-1,2|11\right\rangle+\left\langle 1,2,-1,-2|11\right\rangle\left\langle 1\|Y_2\|1\right\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\times\sqrt{\frac{3}{5}}\times\frac{-1}{10}\sqrt{\frac{50}{\pi}}$$

$$=\frac{-2}{5}$$

تمرین ۷-۱۹

نشان دهید که $\langle j,m'|e^{-i\beta\hat{J}_y/\hbar}\hat{J}_z^2e^{i\beta\hat{J}_y/\hbar}|j,m'\rangle=\sum_{m=-j}^{m=j}m^2|d^{(j)}_{m'm}(\beta)|^2$.

حل:

$$\left\langle j,m'\left|e^{-\frac{i\beta\hat{J}_y}{\hbar}}\hat{J}_z^2e^{\frac{i\beta\hat{J}_y}{\hbar}}\right|j,m'\right\rangle=\sum_m\left\langle j,m'\left|e^{-\frac{i\beta J_y}{\hbar}}\hat{J}_z^2\right|j,m\right\rangle\left\langle j,m\left|e^{\frac{i\beta J_y}{\hbar}}\right|j,m'\right\rangle$$

$$=\sum_m m^2\hbar^2\left\langle j,m'\left|e^{\frac{-i\beta J_y}{\hbar}}\right|j,m\right\rangle\left(\left\langle j,m'\left|e^{\frac{-i\beta J_y}{\hbar}}\right|j,m\right\rangle\right)^\dagger$$

$$=\sum_m m^2\hbar^2d^{(j)}_{m'm}(\beta)d^{(j)^*}_{m'm}(\beta)=\sum_m m^2\hbar^2\left|d^{(j)}_{m'm}(\beta)\right|^2$$

تمرین ۷-۲۰

رد ماتریس دوران $D^{(\frac{1}{2})}(\alpha,\beta,\gamma)$ را برای (آ) $\beta=\pi$ (ب) $\alpha=\gamma=\pi$ و $\beta=2\pi$ محاسبه کنید.

حل:

طبق رابطه‌ی موجود در متن کتاب داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$D^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} e^{\frac{-i(\alpha+\gamma)}{2}}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{\frac{-i(\alpha-\gamma)}{2}}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{\frac{i(\alpha-\gamma)}{2}}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

رد هر عملگر، جمع عناصر روی قطر اصلی آن است؛

$$\text{پس: } \mathrm{Tr}\left(D^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\alpha,\beta,\gamma)\right)=e^{\frac{-i(\alpha+\gamma)}{2}}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

بنابراین:

(آ)

$$\mathrm{Tr}\left(D^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\alpha,\pi,\gamma)\right)=2\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=0$$

(ب)

$$\mathrm{Tr}\left(D^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\pi,2\pi,\pi)\right)=2\cos\frac{2\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi+\pi}{2}\right)=2$$

تمرین ۷-۲۱

عملگر گشتاور چهار قطبی بار q با $\hat{Q}_{20}=q(3\hat{z}^2-r^2)$ داده می‌شود. $\hat{Q}_{20}$ را برحسب یک تانسور کروی تحویل‌ناپذیر از درجه‌ی ۲ بنویسید و آن‌گاه $\langle j,j|\hat{Q}_{20}|j,j\rangle$ را برحسب j و درایه‌ی ماتریسی کاهش‌یافته‌ی $\langle j\|r^2Y^{(2)}\|j\rangle$ بیان کنید.

(راهنمایی: می‌توانید از ضریب $\langle j,2;m,0|j,m\rangle=(-1)^{j-m}\left[3m^2-j(j+1)\right]/\sqrt{(2j-1)j(j+1)(2j+3)}$ استفاده کنید).

حل

بردار یکه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\hat{n}=\hat{i}\sin\theta\cos\phi+\hat{j}\sin\theta\sin\phi+\hat{k}\cos\theta$$

می‌دانیم که:

$$Y_{20}(\theta,f)=Y_{20}(\hat{n})=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\hat{n}_z^2-|\hat{n}|^2\right)$$

پس:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$Y_{۲۰}\left(\hat{\vec{R}}\right)=\sqrt{\frac{۵}{۱۶\pi}}\left(۳z^{۲}-r^{۲}\right)$$

پس $\hat{Q}_{۲۰}$ در واقع عنصر صفرأم $(q=۰)$ یک تانسور کروی رتبه‌ی دو $(k=۲)$ می‌باشد.

اما برای محاسبه‌ی $\langle jj|Q_{۲۰}|jj\rangle$ از قضیه‌ی ویگنر - اکارت استفاده می‌کنیم.

$$\langle jj|Q_{۲۰}|jj\rangle=\langle j۲;j۰|jj\rangle\langle j\|Q_{۲}\|j\rangle=\langle j۲;j۰|jj\rangle\left\langle j\left\|r^{۲}Y^{(۲)}\right\|j\right\rangle$$

$$=\frac{(-۱)^{j-j}\left[۳j^{۲}-j(j+۱)\right]}{\sqrt{(۲j-۱)j(j+۱)(۲j+۳)}}\left\langle j\left\|r^{۲}Y^{(۲)}\right\|j\right\rangle=\frac{j(۲j-۱)}{\sqrt{(۲j-۱)j(j+۱)(۲j+۳)}}$$

تمرین ۷-۲۲

روابط جابه‌جاگری زیر را ثابت کنید:

(آ)

$$\left[\hat{J}_x,\left[\hat{J}_x,T_q^{(k)}\right]\right]=\sum_{q'}T_{q'}^{(k)}\left\langle k,q'|\,\hat{J}_x^{۲}\,|k,q\right\rangle$$

(ب)

$$\left[\hat{J}_x,\left[J_x,T_q^{(k)}\right]\right]+\left[J_y,\left[J_y,T_q^{(k)}\right]\right]+\left[J_z\left[J_z,T_q^{(k)}\right]\right]=k(k+۱)\hbar^{۲}T_q^{(k)}$$

حل:

(آ)

طبق رابطه‌ی (۷-۳۱۴) متن کتاب داریم:

$$\left[\hat{J}_x,T_q^{(k)}\right]=\sum_{q'=-k}^{+k}T_{q'}^{(k)}\left\langle k,q'\left|\hat{J}_x\right|k,q\right\rangle$$

پس:

$$\left[\hat{J}_x,\left[\hat{J}_x,T_q^{(k)}\right]\right]=\left[\hat{J}_x,\sum_{q'=-k}^{+k}T_{q'}^{(k)}\left\langle k,q'\left|\hat{J}_x\right|k,q\right\rangle\right]=\sum_{q'=-k}^{+k}\left\langle k,q'\left|\hat{J}_x\right|k,q\right\rangle\left[\hat{J}_x,T_{q'}^{(k)}\right]$$

$$=\sum_{q'}\sum_{q''}\left\langle k,q'\left|\hat{J}_x\right|k,q\right\rangle T_{q''}^{(k)}\left\langle k,q''\left|\hat{J}_x\right|k,q'\right\rangle$$

$$=\sum_{q'}\sum_{q''}T_{q''}^{(k)}\left\langle k,q''\right|\left|k,q'\right\rangle\left\langle k,q'\left|\hat{J}_x\right|k,q\right\rangle=\sum_{q''}T_{q''}^{(k)}\left\langle k,q''\left|\hat{J}_x^{۲}\right|k,q\right\rangle$$

$$=\sum_{q'}T_{q'}^{(k)}\left\langle k,q'\left|\hat{J}_x^{۲}\right|k,q\right\rangle$$

(ب)

به‌همان ترتیب قسمت (آ) می‌توان ثابت کرد:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left[\hat{J}_y,\left[\hat{J}_y,T_q^{(k)}\right]\right]=\sum_{q'}T_{q'}^{(k)}\left\langle k,q'\left|\hat{J}_y^{۲}\right|k,q\right\rangle \qquad \left[\hat{J}_z,\left[\hat{J}_z,T_q^{(k)}\right]\right]=\sum_{q'}T_{q'}^{(k)}\left\langle k,q'\left|\hat{J}_z^{۲}\right|k,q\right\rangle$$

در نتیجه:

$$\left[\hat{J}_x,\left[\hat{J}_x,T_q^{(k)}\right]\right]+\left[\hat{J}_y,\left[\hat{J}_y,T_q^{(k)}\right]\right]+\left[\hat{J}_z,\left[\hat{J}_z,T_q^{(k)}\right]\right]=\sum_{q'}T_{q'}^{(k)}\left\langle k,q'\left|\hat{J}_x^{۲}+\hat{J}_z^{۲}+\hat{J}_z^{۲}\right|k,q\right\rangle$$

$$=\sum_{q'}T_{q'}^{(k)}\left\langle k,q'\left|k(k+۱)\hbar^{۲}\right|k,q\right\rangle$$

$$=\sum_{q'}T_{q'}^{(k)}k(k+۱)\hbar^{۲}\delta_{q,q'}=k(k+۱)\hbar^{۲}T_q^{(k)}$$

تمرین ۷-۲۳

ذره‌ای با اسپین $\frac{۱}{۲}$ را درنظر بگیرید که دارای اندازه‌حرکت زاویه‌ای مداری $l=۱$ است. همه‌ی ضرایب کلبش ـ گوردون در جمع اندازه حرکت‌های زاویه‌ای مداری و اسپینی این ذره را بیابید. (راهنمایی: ضریب کلبش ـ گوردون $\left\langle j_۱,j_۲;j_۱,(j_۲-j_۱)\,|\,j_۲,j_۲\right\rangle$ حقیقی و مثبت است).

حل:

با توجه به روابط:

$$\left\langle l,\frac{۱}{۲};m+\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\middle|l+\frac{۱}{۲},m\right\rangle=\sqrt{\frac{l-m+\frac{۱}{۲}}{۲l+۱}}$$

$$\left\langle l,\frac{۱}{۲};m-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\middle|l+\frac{۱}{۲},m\right\rangle=\sqrt{\frac{l+m+\frac{۱}{۲}}{۲l+۱}}$$

$$\left\langle l,\frac{۱}{۲};m+\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\middle|l-\frac{۱}{۲},m\right\rangle=\sqrt{\frac{l+m+\frac{۱}{۲}}{۲l+۱}}$$

$$\left\langle l,\frac{۱}{۲};m-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\middle|l-\frac{۱}{۲},m\right\rangle=-\sqrt{\frac{l-m+\frac{۱}{۲}}{۲l+۱}}$$

ضرایب کلبش – گوردن غیر صفر عبارت خواهند بود از:

$$\left\langle ۱,\frac{۱}{۲};۱,\frac{۱}{۲}\middle|\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}\right\rangle=\sqrt{\frac{۱+\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۲\times۱+۱}}=۱$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left\langle 1,\frac{1}{2};1,\frac{-1}{2}\middle|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\times1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left\langle 1,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}\middle|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\times1+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left\langle 1,\frac{1}{2};0,\frac{-1}{2}\middle|\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\times1+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left\langle 1,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\middle|\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\times1+1}}=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\left\langle 1,\frac{1}{2};-1,\frac{-1}{2}\middle|\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2\times1+1}}=1$$

$$\left\langle 1,\frac{1}{2};1,\frac{-1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\times1+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left\langle 1,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\times1+1}}=-\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\left\langle 1,\frac{1}{2};0,\frac{-1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\times1+1}}=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\left\langle 1,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle=-\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\times1+1}}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

تمرین ۷-۲۴

این مسأله به روش دیگر استخراج درایه‌های ماتریس $d^{(1)}(\beta)$ می‌پردازد. با استفاده از رابطه‌ی

$$d^{(j)}_{mm'}(\beta)=\sum_{m_1m_2}\sum_{m'_1m'_2}\langle j_1,j_2;m_1,m_2\,|\,j,m\rangle\langle j_1,j_2;m'_1m'_2\,|\,j,m'\rangle d^{(j_1)}_{m_1m'_1}(\beta)d^{(j_2)}_{m_2m'_2}(\beta)$$

برای حالتی که در آن $j_1=j_2=\frac{1}{2}$ و همراه با درایه‌های ماتریس $d^{(\frac{1}{2})}(\beta)$ که در (۷-۱۸۹) داده می‌شوند، همه‌ی درایه‌های ماتریس $d^{(1)}(\beta)$ را به دست آورید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

طبق رابطه‌ی (۷-۸۹) داریم:

$$d^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\end{pmatrix}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی داده شده، عناصر ماتریس $d^{(1)}(\beta)$ را می‌یابیم:

$$d^{(1)}_{11}(\beta)=\sum_{m_1m_2}\sum_{m_1'm_2'}\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};m_1m_2\middle|1,1\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};m_1'm_2'\middle|1,1\right\rangle d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{m_1m_1'}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{m_2m_2'}(\beta)$$

می‌دانیم $\left\langle j_1j_2;m_1m_2\middle|jm\right\rangle$ فقط وقتی غیرصفر است که:

$$m=m_1+m_2$$

با توجه به این نکته داریم:

$$d^{(1)}_{11}(\beta)=\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}\middle|1,1\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2}\frac{1}{2}\middle|1,1\right\rangle d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\beta)=1\times1\times\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\cos^2\frac{\beta}{2}$$

$$d^{(1)}_{10}(\beta)=\sum_{m_1m_2}\sum_{m_1'm_2'}\left\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2};m_1,m_2\middle|1,1\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};m_1'm_2'\middle|1,0\right\rangle d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{m_1m_1'}d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{m_2m_2'}$$

$$=\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,1\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\middle|1,0\right\rangle d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}(\beta)+\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,1\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,0\right\rangle$$

$$\times d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\beta)=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\beta}{2}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)+1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta$$

$$d^{(1)}_{1-1}(\beta)=\sum_{m_1m_2}\sum_{m_1'm_2'}\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};m_1m_2\middle|1,1\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};m_1'm_2'\middle|1,-1\right\rangle d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{m_1m_1'}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{m_2m_2'}(\beta)$$

$$=\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,1\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}\middle|1,-1\right\rangle d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}(\beta)=1\times1\left(\frac{-\sin\beta}{2}\right)\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)=\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$d^{(1)}_{00}(\beta)=\sum_{m_1m_2}\sum_{m_1'm_2'}\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};m_1m_2\middle|1,0\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};m_1'm_2'\middle|1,0\right\rangle d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{m_1m_1'}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{m_2m_2'}(\beta)$$

$$=\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\middle|1,0\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\middle|1,0\right\rangle d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}}(\beta)+\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\middle|1,0\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,0\right\rangle$$

$$\times d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{-1}{2}\frac{1}{2}}(\beta)+\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\middle|1,0\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,0\right\rangle d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{-1}{2}\frac{1}{2}}(\beta)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$+\left\langle \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{-1}{2},\tfrac{1}{2}|1,0\right\rangle\left\langle \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},\tfrac{-1}{2}|1,0\right\rangle d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{-1}{2}\frac{1}{2}}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}(\beta)+\left\langle \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{-1}{2},\tfrac{1}{2}|1,0\right\rangle\left\langle \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{-1}{2},\tfrac{1}{2}|1,0\right\rangle$$

$$\times d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}}(\beta)d^{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\beta}{2}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}=\cos\beta$$

برای به‌دست آوردن بقیه‌ی عناصر می‌توان همین روش را ادامه داد ولی ما از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta)=(-1)^{m'-m}d^{(j)}_{mm'}(\beta)=(-1)^{m'-m}d^{(j)}_{-m'-m}(\beta)$$

پس:

$$d^{(1)}_{01}(\beta)=(-1)^{0-1}d^{(1)}_{10}(\beta)=-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin\beta\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta$$

$$d^{(1)}_{0-1}(\beta)=(-1)^{0+1}d^{(1)}_{10}(\beta)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta$$

$$d^{(1)}_{-10}(\beta)=(-1)^{-1-0}d^{(1)}_{0-1}(\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta$$

$$d^{(1)}_{-11}(\beta)=(-1)^{-1-1}d^{(1)}_{1-1}(\beta)=\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$d^{(1)}_{-1-1}(p)=(-1)^{-1+1}d^{(1)}_{11}(\beta)=\cos^2\frac{\beta}{2}$$

پس:

$$d^{(1)}(\beta)=\begin{pmatrix}\cos^2\frac{\beta}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \sin^2\frac{\beta}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\\ \sin^2\frac{\beta}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \cos^2\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

تمرین ۷-۲۵

تانسور $A(\theta,\varphi)=\sin^2\theta\cos(2\varphi)$ را درنظر بگیرید:

(آ) درایه‌ی ماتریسی کاهش یافته‌ی $\langle 2\|Y_2\|2\rangle$ را محاسبه کنید. (*راهنمایی:* می‌توانید به‌طور صریح $\langle 2,1|Y_{20}|2,1\rangle$ را محاسبه کنید و آن‌گاه با استفاده از قضیه‌ی ویگنر ـ اکارت آن‌را دوباره به دست آورید).

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب) $A(\theta,\varphi)$ را برحسب مؤلفه‌های یک تانسور کروی از درجه‌ی ۲ بیان کنید (یعنی، برحسب $Y_{2m}(\theta,\varphi)$).

(پ) $A_{m'\pm1}=\langle 2,m'|A|2,\pm1\rangle$ را برای $m'=0,\pm1,\pm2$ محاسبه کنید. می‌توانید از ضریب کلبش ـ گوردون زیر استفاده کنید:

$$\langle j,2;m,0|j,m\rangle=\left[3m^2-j(j+1)\right]/\sqrt{(2j-1)j(j+1)(2j+3)}.$$

حل:

(آ)

ابتدا مقدار $\langle 2,1|Y_{20}|2,1\rangle$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\langle 2,1|Y_{20}|2,1\rangle=\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta)Y_{21}^*(\theta,\phi)Y_{20}(\theta,\phi)Y_{21}(\theta,\phi)$$

$$=2\pi\left(\frac{15}{8\pi}\right)\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta)\sin^2\theta\cos^2\theta\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

$$=\frac{15}{4}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta)\left(-3\cos^6\theta+4\cos^4\theta-\cos^2\theta\right)$$

$$=\frac{2\times15}{4}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(\frac{-3}{7}+\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{14}\sqrt{\frac{5}{\pi}}$$

طبق قضیه‌ی ویگنر – اکارت داریم:

$$\langle 2,1|Y_{20}|2,1\rangle=\langle 22;1,0|21\rangle\langle 2\|Y_2\|2\rangle$$

اما از رابطه‌ی داده شده در صورت سؤال، داریم:

$$\langle 2,2;1,0|21\rangle=\frac{3\times1^2-2(2+1)}{\sqrt{(2\times2-1)2(2+1)(2\times2+3)}}=\frac{-3}{3\sqrt{14}}=\frac{-1}{\sqrt{14}}$$

پس:

$$\langle 2\|Y_2\|2\rangle=\frac{\frac{1}{14}\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{\frac{-1}{\sqrt{14}}}=-\sqrt{\frac{5}{14\pi}}$$

(ب)

$$A_{\pm2\pm1}=\langle 2,\pm2|A|2,\pm1\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\langle 2,\pm2|Y_{22}+Y_{2-2}|2,\pm1\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\left[\langle 2,2;\pm1,2|2,\pm2\rangle+\langle 2,2;\pm1,2|2,\pm2\rangle\right]\langle 2\|Y_2\|2\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}(0+0)=0$$

$$A_{\pm1\pm1}=\langle 2,\pm1|A|2,\pm1\rangle=0$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$A_{\circ\pm1}=\langle 2,0|A|2,\pm1\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\langle 2,0|Y_{22}+Y_{2,-2}|2,\pm1\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\left[\langle 2,2;\pm1,2|2,0\rangle+\langle 2,2;\pm1,-2|2,0\rangle\right]\langle 2\|Y_2\|2\rangle=0$$

تمرین ۷-۲۶

(آ) درایه‌ی ماتریسی کاهش یافته‌ی $\langle 1\|Y_1\|2\rangle$ را محاسبه کنید.

(*راهنمایی:* برای این منظور ممکن است لازم باشد $\langle 1,0|Y_{10}|2,0\rangle$ را به‌طور مستقیم، و آن‌گاه از قضیه‌ی ویگنر ـ اکارت حساب کنید).

(ب) با استفاده از قضیه‌ی ویگنر-اکارت و ضرایب کلبش-گوردن مربوطه از جدول، $\langle 1,m|Y_{1m'}|2,m''\rangle$ را برای همه‌ی مقدارهای ممکن m'',m',m محاسبه کنید. (*راهنمایی:* می‌توانید از انتگرال $\int_0^\infty r^2R_{21}^*(r)R_{32}(r)dr=\frac{64a_0}{15\sqrt{5}}\left(\frac{6}{5}\right)^5$ و ضرایب

$$\langle j,1;m,0|(j-1),m\rangle=-\sqrt{(j-m)(j+m)/[j(2j+1)]}$$

$$\langle j,1;(m-1),1|(j-1),m\rangle=\sqrt{(j-m)(j-m+1)/[2j(2j+1)]}$$

$$\langle j,1;(m+1),-1|(j-1),m\rangle=\sqrt{(j+m)(j+m+1)/[2j(2j+1)]}$$

استفاده کنید).

حل:

(آ)

$$\langle 1,0|Y_{10}|2,0\rangle=\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta)Y_{10}^*(\theta,\phi)Y_{10}(\theta,\phi)Y_{20}(\theta,\phi)$$

$$=\frac{3}{4\pi}(2\pi)\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta)\cos^2\theta\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

$$=2\times\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)=3\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{9-5}{15}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{\pi}}$$

$$\langle 1,0|Y_{10}|2,0\rangle=\langle 21;00|10\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle\Rightarrow$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{\pi}}=-\sqrt{\frac{(2-0)(2+0)}{2(2\times2+1)}}\langle 1\|Y_1\|2\rangle=-\sqrt{\frac{2}{5}}\langle 1\|Y_1\|2\rangle$$

پس:

$$\langle 1\|Y_1\|2\rangle=\frac{-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{+\sqrt{\frac{2}{5}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle 1,m|Y_{1m'}|2,m''\rangle = \langle 2,1;m'',m'|1,m\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle$$

تنها مقادیر غیرصفر $\langle 1,m|Y_{1m'}|2,m''\rangle$ را می‌یابیم.

$$\langle 1,1|Y_{1-1}|2,2\rangle = \langle 2,1;2,-1|1,1\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\times\frac{-1}{2\pi} = -\sqrt{\frac{3}{10\pi}}$$

$$\langle 1,1|Y_{10}|2,1\rangle = \langle 2,1;1,0|1,1\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle = -\sqrt{\frac{3}{10}}\times\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5\pi}}$$

$$\langle 1,1|Y_{11}|2,0\rangle = \langle 2,1;0,1|1,1\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle = \sqrt{\frac{1}{10}}\times\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{3}{5\pi}}$$

$$\langle 1,0|Y_{1-1}|2,1\rangle = \langle 2,1;1,-1|1,0\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}\times\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5\pi}}$$

$$\langle 1,0|Y_{10}|2,0\rangle = \langle 2,1;0,0|1,0\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle = -\sqrt{\frac{4}{10}}\times\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} = -\sqrt{\frac{1}{5\pi}}$$

$$\langle 1,0|Y_{11}|2,-1\rangle = \langle 2,1;-1,1|1,0\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}\times\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5\pi}}$$

$$\langle 1,-1|Y_{1-1}|2,0\rangle = \langle 2,1;0,-1|1,-1\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle = \sqrt{\frac{1}{10}}\times\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{1}{5\pi}}$$

$$\langle 1,-1|Y_{10}|2,-1\rangle = \langle 2,1;-1,0|1,-1\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle = -\sqrt{\frac{3}{10}}\times\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5\pi}}$$

$$\langle 1,-1|Y_{11}|2,-2\rangle = \langle 2,1;-2,1|1,-1\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\times\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} = -\sqrt{\frac{3}{10\pi}}$$

بقیه‌ی مقادیر صفر هستند زیرا با توجه به خواص ضرایب کلبش – گوردون؛ عبارت $\langle 1,m|Y_{1m'}|2,m''\rangle$ طبق قضیه‌ی ویگنر – اکارت فقط وقتی غیرصفر است که:

$$m = m' + m''$$

تمرین ۷-۲۷

ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}$ در حالت d از اندازه حرکت زاویه‌ای مداری است (یعنی $l=2$).

(آ) حالت‌های ممکن اندازه حرکت زاویه‌ای کل آن کدام‌اند؟

ب) اگر هامیلتونی آن با $H = a + b\hat{\vec{L}}.\hat{\vec{S}} + c\hat{\vec{L}}^2$ داده شود که در آن a، b و c عدد هستند، مقادیر انرژی را برای هریک از حالت‌های مختلف اندازه حرکت زاویه‌ای کل پیدا کنید. پاسخ خود را برحسب a,b,c بیان کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

(آ)

در جمع j_1 و j_2، مقادیر مجاز اندازه‌ی حرکت زاویه‌ی کل عبارتند از:

$$|j_1 - j_2| \le j \le |j_1 + j_2|$$

در اینجا داریم:

$$j_1 = l = 2$$

$$j_2 = s = \frac{1}{2}$$

پس مقادیر مجاز j عبارتند از:

$$j = \frac{5}{2} \text{ یا } \frac{3}{2}$$

(ب)

ویژه حالت‌های H در واقع همان $|j,m\rangle$ها هستند زیرا:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$J^2 = L^2 + S^2 + \vec{L}.\vec{S} + \vec{S}.\vec{L} = L^2 + S^2 + 2\vec{L}.\vec{S}$$

در نوشتن رابطه‌ی اخیر به این توجه داریم که:

$$\left[\vec{L},\vec{S}\right] = 0$$

پس:

$$\vec{L}.\vec{S} = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right)$$

حال H را روی $|j,m\rangle$ اثر می‌دهیم:

$$H|j,m\rangle = \left(a + \frac{b}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right) + cL^2\right)|j,m\rangle$$

$$= \left[a + \frac{b\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right] + cl(l+1)\hbar^2\right]|j,m\rangle$$

پس E_j ویژه مقادیر عملگر هامیلتونی برابر هستند با:

$$E_j = a + \frac{b\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - 2(2+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] + 2c(2+1)\hbar^2$$

بنابراین

$$E_{j=\frac{5}{2}} = a + \frac{b\hbar^2}{2}\left(\frac{35}{4} - \frac{27}{4}\right) + 6c\hbar^2 = a + \hbar^2(b + 6c)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_{j=\frac{۳}{۲}} = a + \frac{b\hbar^۲}{۲}\left(\frac{۱۵}{۴} - \frac{۲۷}{۴}\right) ۶ch^۲ = a + \frac{۳\hbar^۲}{۲}(-b + ۴c)$$

تمرین ۷-۲۸

یک الکترون را در حالت h درنظر بگیرید. ضرایب کلبش ـ گوردون موجود در حالت‌های $\{|j,m\rangle\}$ زیر از الکترون را حساب کنید:

$$\left|\frac{۱۱}{۲},\frac{۹}{۲}\right\rangle, \left|\frac{۱۱}{۲},\frac{۷}{۲}\right\rangle, \left|\frac{۹}{۲},\frac{۹}{۲}\right\rangle, \left|\frac{۹}{۲},\frac{۷}{۲}\right\rangle$$

حل:

از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left|l \pm \frac{۱}{۲}, m\right\rangle = \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{۱}{۲}}{۲l+۱}} \left|l, m + \frac{۱}{۲}\right\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲}\right\rangle \pm \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{۱}{۲}}{۲l+۱}} \left|l, m - \frac{۱}{۲}\right\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|۵ \pm \frac{۱}{۲}, \frac{۹}{۲}\right\rangle = \sqrt{\frac{۵ \mp \frac{۹}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۲\times۵+۱}} \left|۲, \frac{۹}{۲} + \frac{۱}{۲}\right\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲}\right\rangle \pm \sqrt{\frac{۵ \pm \frac{۹}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۲\times۵+۱}} \left|۲, \frac{۹}{۲} - \frac{۱}{۲}\right\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۱۱}{۲}, \frac{۹}{۲}\right\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۱۱}} |۲,۵\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲}\right\rangle + \frac{۱۰}{\sqrt{۱۱}} |۲,۴\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۹}{۲}, \frac{۹}{۲}\right\rangle = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۱}} |۲,۵\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲}\right\rangle - \frac{۱}{\sqrt{۱۱}} |۲,۴\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|۵ \pm \frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۲}\right\rangle = \sqrt{\frac{۵ \mp \frac{۷}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۲\times۵+۱}} \left|۲, \frac{۷}{۲} + \frac{۱}{۲}\right\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲}\right\rangle \pm \sqrt{\frac{۵ \pm \frac{۷}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۲\times۵+۱}} \left|۲, \frac{۷}{۲} - \frac{۱}{۲}\right\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۱۱}{۲}, \frac{۷}{۲}\right\rangle = \sqrt{\frac{۲}{۱۱}} |۲,۴\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲}\right\rangle + \sqrt{\frac{۹}{۱۱}} |۲,۳\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right\rangle$$

$$\left|\frac{۹}{۲}, \frac{۷}{۲}\right\rangle = \sqrt{\frac{۹}{۱۱}} |۲,۴\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲۰}\right\rangle - \sqrt{\frac{۲}{۱۱}} |۲,۳\rangle \left|\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right\rangle$$

تمرین ۷-۲۹

فرض کنید هامیلتونی دو ذره‌ی غیریکسان با اسپین $\frac{۱}{۲}$ به‌صورت زیر باشد:

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon_۱}{\hbar^۲}(\hat{\vec{S}}_۱ + \hat{\vec{S}}_۲).\hat{\vec{S}}_۱ - \frac{\varepsilon_۲}{\hbar}(\hat{S}_{۱z} + \hat{S}_{۲z})$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

که در آن ε_1 و ε_2 ثابت‌هایی دارای ابعاد انرژی هستند. ترازهای انرژی و تبهگنی‌های آن‌ها را بیابید.

حل:

اگر حاصل‌جمع دو عملگر $\vec{S}_1$ و $\vec{S}_2$ را $\vec{S}$ تعریف کنیم، داریم:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$
$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1.\vec{S}_2$$

پس:

$$\vec{S}_1.\vec{S}_2 = \frac{1}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)$$

و داریم:

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon_1}{\hbar^2}\left(S_1^2 + \vec{S}_1.\vec{S}_2\right) - \frac{\varepsilon_2}{\hbar}S_z = \frac{\varepsilon_1}{\hbar^2}\left(S_1^2 + \frac{1}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)\right) - \frac{\varepsilon_2}{\hbar}S_z = \frac{\varepsilon_1}{2\hbar^2}\left(S^2 + S_1^2 - S_2^2\right) - \frac{\varepsilon_2}{\hbar}S_z$$

لذا از ویژه حالت‌های همزمان S_1^2، S_2^2، S^2 و S_z یعنی $|s,m\rangle$ به‌عنوان ویژه حالت‌های $\hat{H}$ استفاده می‌کنیم. لذا:

$$\hat{H}|s,m\rangle = \left[\frac{\varepsilon_1}{2\hbar^2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) - \frac{\varepsilon_2}{\hbar}S_z\right]|s,m\rangle$$
$$= \left\{\frac{\varepsilon_1\hbar^2}{2\hbar^2}\left[s(s+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)\right] - \frac{\varepsilon_2 m\hbar}{\hbar}\right\}|s,m\rangle$$

اما $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ و طبق قواعد جمع اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$|s_1 - s_2| \le s \le |s_1 + s_2|$$

$$-s \le m \le s$$

لذا s می‌تواند مقادیر صفر یا یک را داشته باشد و به‌ازای مقدار صفر، m نیز صفر خواهد بود و به‌ازای مقدار یک، m می‌تواند مقادیر ± 1 یا 0 را داشته باشد و لذا اگر $E_{s,m}$ ویژه مقدار عملگر هامیلتونی باشد، داریم:

$$E_{s,m} = \frac{\varepsilon_1}{2}\left[s(s+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] - m\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}\left(s(s+1) - \frac{3}{2}\right) - m\varepsilon_2$$

در نتیجه:

$E_{0,0} = -\frac{3}{4}\varepsilon_1$; بدون تبهگنی

$E_{1,1} = \frac{1}{4}\varepsilon_1 - \varepsilon_2$; بدون تبهگنی

$E_{1,0} = \frac{1}{4}\varepsilon_1$; بدون تبهگنی

$E_{1,-1} = \frac{1}{4}\varepsilon_1 + \varepsilon_2$; بدون تبهگنی

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۷-۳۰

ترازهای انرژی و تبهگنی‌های آن‌ها را برای سیستمی متشکل از دو ذره‌ی غیر یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ با هامیلتونی:

$$\hat{H}=\frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}(\hat{S}_1^2+\hat{S}_2^2)-\frac{\varepsilon_0}{\hbar}(\hat{S}_{1z}+\hat{S}_{2z})$$

بیابید که در آن ε_0 ثابتی دارای ابعاد انرژی است.

حل:

ویژه حالت‌های هامیلتونی در واقع ویژه حالت‌های همزمان S_1^2، S_{1z}، S_2^2 و S_{2z} و یا به‌عبارتی $|s_1,s_2;m_1,m_2\rangle$ها می‌باشند. پس، داریم:

$$\begin{aligned}\hat{H}|s_1,s_2;m_1,m_2\rangle&=\left[\frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}\left(\hat{S}_1^2+\hat{S}_2^2\right)-\frac{\varepsilon_0}{\hbar}\left(\hat{S}_{1z}+\hat{S}_{2z}\right)\right]|s_1,s_2;m_1,m_2\rangle\\&=\frac{\varepsilon_0\hbar^2}{\hbar^2}\left(\left[s_1\left(s_1+1\right)+s_2\left(s_2+1\right)\right]-\frac{\varepsilon_0\hbar}{\hbar}\left(m_1+m_2\right)\right)|s_1,s_2;m_1,m_2\rangle\\&=\left(\varepsilon_0\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]-\varepsilon_0\left(m_1+m_2\right)\right)|s_1,s_2;m_1,m_2\rangle\\&=\varepsilon_0\left[\frac{3}{2}-\left(m_1+m_2\right)\right]|s_1,s_2;m_1,m_2\rangle\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $m_1=\pm\frac{1}{2}$ و $m_2=\pm\frac{1}{2}$؛ اگر E_{m_1,m_2} را ویژه مقدار عملگر هامیلتونی فرض کنیم، داریم:

$$E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=\varepsilon_0\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\varepsilon_0 \quad ; \quad \text{بدون تبهگنی}$$

$$E_{\frac{1}{2},\frac{-1}{2}}=E_{\frac{-1}{2},\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\varepsilon_0 \quad ; \quad \text{بدون تبهگنی}$$

$$E_{\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}}=\varepsilon_0\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}\right)\right]=\frac{5}{2}\varepsilon_0 \quad ; \quad \text{بدون تبهگنی}$$

تمرین ۷-۳۱

دو ذره‌ی غیریکسان با اسپین $s=\frac{1}{2}$ و با هامیلتونی $\hat{H}=\frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}(\hat{\vec{S}}_1+\hat{\vec{S}}_2)^2-\frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}(\hat{S}_{1z}+\hat{S}_{2z})$ را درنظر بگیرید که در آن ε_0 ثابتی دارای ابعاد انرژی است. ترازهای انرژی و تبهگنی‌های آن‌ها را بیابید.

حل:

اگر تعریف کنیم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_2$$

داریم:

$$\hat{H}=\frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}S^2+\frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}S_z^2=\frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}\left(S^2+S_z^2\right)$$

می‌توانیم از ویژه حالت‌های همزمان S_1^2، S_2^2، S^2 و S_z یعنی $|s_1,s_2,s,m\rangle$ها به‌عنوان ویژه حالت‌های هامیلتونی استفاده کنیم:

$$\hat{H}|s,m\rangle=\frac{\varepsilon_0}{\hbar^2}\left(S^2+S_z^2\right)|s,m\rangle=\frac{\varepsilon_0\hbar^2}{\hbar^2}\left(s(s+1)+m^2\right)|s,m\rangle=\varepsilon_0\left(s(s+1)+m^2\right)|s,m\rangle$$

اما $s_1=s_2=\frac{1}{2}$ و طبق قواعد جمع اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|\le s\le\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|$$

$$-s\le m\le+s$$

پس s می‌تواند مقادیر صفر یا یک داشته باشد و به‌ازای مقدار صفر، m نیز صفر خواهد بود و به‌ازای مقدار یک، m می‌تواند مقادیر ±1 یا ۰ را داشته باشد و لذا اگر $E_{s,m}$ ویژه مقدار عملگر هامیلتونی باشد، داریم:

$$E_{s,m}=\varepsilon_0\left[s(s+1)+m^2\right]$$

$E_{0,0}=0$; بدون تبهگنی

لذا:

$E_{1,\pm1}=\varepsilon_0\left[1(1+1)+(\pm1)^2\right]=3\varepsilon_0$; بدون تبهگنی

$E_{1,0}=\varepsilon_0\left[1(1+1)+0^2\right]=2\varepsilon_0$; بدون تبهگنی

تمرین ۷-۳۲

سیستمی از سه ذره‌ی غیر یکسان، هریک با اسپین $s=\frac{1}{2}$ را درنظر بگیرید که هامیلتونی آن با رابطه‌ی $\hat{H}=\frac{\varepsilon_1}{\hbar^2}(\hat{\vec{S}}_1+\hat{\vec{S}}_2).\hat{\vec{S}}_2+\frac{\varepsilon_2}{\hbar^2}(\hat{S}_{1z}+\hat{S}_{1z}+S_{2z})^2$ داده می‌شود. در آن ε_1 و ε_2 ثابت‌هایی دارای ابعاد انرژی هستند. ترازهای انرژی و تبهگنی‌های آن‌ها را پیدا کنید.

حل:

اگر تعریف کنیم:

$$\vec{S}_{12}=\vec{S}_1+\vec{S}_2$$

$$\vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_2+\vec{S}_2=\vec{S}_{12}+\vec{S}_2$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

بنابراین:

$$S^2 = S_{12}^2 + S_3^2 + 2\vec{S}_{12}.\vec{S}_3$$

لذا:

$$\vec{S}_{12}.\vec{S}_3 = \frac{1}{2}\left(S^2 - S_{12}^2 - S_3^2\right)$$

بنابراین:

$$\hat{H} = \frac{\varepsilon_1}{\hbar^2}\vec{S}_{12}.\vec{S}_3 + \frac{\varepsilon_2}{\hbar^2}S_z^2 = \frac{\varepsilon_1}{2\hbar^2}\left(S^2 - S_{12}^2 - S_3^2\right) + \frac{\varepsilon_2}{\hbar^2}S_z^2$$

پس درواقع ویژه حالت‌های هامیلتونی همان ویژه حالت‌های همزمان S_1^2، S_2^2، S_3^2، S_{12}^2، S^2 و S_z می‌باشند که آنها را با $|s_{12};s,m\rangle$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$\hat{H}|s_{12};s,m\rangle = \left[\frac{\varepsilon_1\hbar^2}{2\hbar^2}\left(s(s+1)\right) - s_{12}(s_{12}+1) - s_3(s_3+1) + \frac{\varepsilon_2 m^2\hbar^2}{\hbar^2}\right]|s_{12};s,m\rangle$$

طبق قواعد جمع اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$|s_1 - s_2| \le s_{12} \le |s_1 + s_2|$$

$$|s_{12} - s_3| \le s \le |s_{12} + s_3|$$

$$-s \le m \le +s$$

بنابراین s_{12} یکی از مقادیر صفر یا یک را می‌تواند داشته باشد. درصورتی‌که دارای مقدار صفر باشد مقدار s، $\frac{1}{2}$ خواهد بود و دراین‌صورت مقدار m، $\pm\frac{1}{2}$ خواهد بود. اما اگر s_{12} مقداری برابر یک داشته باشد دراین صورت s، مقادیر $\frac{1}{2}$ یا $\frac{3}{2}$ را خواهد داشت و متناظر با $s=\frac{1}{2}$، مقدار m، $\pm\frac{1}{2}$ و متناظر با $s=\frac{3}{2}$، مقدار m، $\frac{1}{2}$ یا $\pm\frac{3}{2}$ خواهد بود.

با توجه به‌این توضیحات اگر ویژه مقدار هامیلتونی را با $E_{s,s_{12},m}$ نشان دهیم داریم:

$$E_{s,s_{12},m} = \frac{\varepsilon_1}{2}\left[s(s+1) - s_{12}(s_{12}+1) - \frac{3}{4}\right] + m^2\varepsilon_2$$

لذا:

$$E_{\frac{1}{2},0,\pm\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon_1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - 0(0+1) - \frac{3}{4}\right] + \frac{1}{4}\varepsilon_2 = \frac{1}{4}\varepsilon_2 \qquad \text{تبهگنی دوگانه ؛}$$

$$E_{\frac{1}{2},1,\pm\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon_1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - 1(1+1) - \frac{3}{4}\right] + \frac{1}{4}\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 + \frac{1}{4}\varepsilon_2 \qquad \text{تبهگنی دوگانه ؛}$$

$$E_{\frac{3}{2},1,\pm\frac{3}{2}} = \frac{\varepsilon_1}{2}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - 1(1+1) - \frac{3}{4}\right] + \frac{9}{4}\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{9}{4}\varepsilon_2 \qquad \text{تبهگنی دوگانه ؛}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تبهگنی دوگانه ؛ $E_{\frac{۳}{۲},۱,\pm\frac{۱}{۲}}=\frac{\varepsilon_۱}{۲}\left[\frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۲}+۱\right)-۱(۱+۱)-\frac{۳}{۴}\right]+\frac{۱}{۴}\varepsilon_۲=\frac{\varepsilon_۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\varepsilon_۲$

تمرین ۷-۳۳

سیستمی از سه ذره‌ی غیر یکسان، هریک با تکانه‌ی زاویه‌ای $\frac{۳}{۲}$ را درنظر بگیرید. مقدارهای ممکن اسپین کل S این سیستم را بیابید و تعداد ویژه حالت‌های تکانه‌ی زاویه‌ای متناظر با هر مقدار S را مشخص کنید.

حل:

تعاریف زیر را انجام می‌دهیم:

$$\vec{S}_{۱۲}=\vec{S}_۱+\vec{S}_۲$$
$$\vec{S}=\vec{S}_۱+\vec{S}_۲+\vec{S}_۳=\vec{S}_{۱۲}+\vec{S}_۳$$

طبق قواعد جمع اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$|s_۱-s_۲|\le s_{۱۲}\le|s_۱+s_۲|$$
$$-s_{۱۲}\le m_{۱۲}\le s_{۱۲}$$
$$|s_{۱۲}-s_۳|\le s\le|s_{۱۲}+s_۳|$$
$$-s\le m\le s$$

پس با توجه به‌اینکه: $s_۱=s_۲=s_۳=\frac{۳}{۲}$؛ داریم:

$$s_{۱۲}=۰,۱,۲,۳$$

به‌ازای $s_{۱۲}=۰$؛ مقدار s، $\frac{۳}{۲}$ خواهد بود.

به‌ازای $s_{۱۲}=۱$؛ مقادیر s، عبارتند از: $\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲}$.

به‌ازای $s_{۱۲}=۲$؛ مقادیر s، عبارتند از: $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۵}{۲}$ و $\frac{۷}{۲}$.

به‌ازای $s_{۱۲}=۳$؛ مقادیر s، عبارتند از: $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۵}{۲}$، $\frac{۷}{۲}$ و $\frac{۹}{۲}$.

به‌ازای $s=\frac{۱}{۲}$ تبهگنی چهارگانه وجود دارد که دوتای آن مربوط به $s_{۱۲}=۱$ و دوتای آن مربوط به $s_{۱۲}=۲$ است. به‌ازای $s=\frac{۳}{۲}$، تبهگنی شانزده‌گانه داریم که چهارتای آن مربوط به $s_{۱۲}=۰$، چهارتای آن مربوط به $s_{۱۲}=۱$، چهارتای آن مربوط به $s_{۱۲}=۲$ و چهارتای آن مربوط به $s_{۱۲}=۳$ است. به‌ازای $s=\frac{۵}{۲}$، تبهگنی هجده‌گانه داریم که به‌ترتیب شش تا شش تا مربوط به $s_{۱۲}=۱,۲,۳$ می‌باشند. به‌ازای $s=\frac{۷}{۲}$ تبهگنی شانزده‌گانه داریم که هشت تا هشت تا مربوط به $s_{۱۲}=۲,۳$ می‌باشند و به ازای $s=\frac{۹}{۲}$ نیز تبهگنی ده‌گانه متناظر با $s_{۱۲}=۳$ داریم.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

فصل هشتم

ذرات یکسان

تمرین ۸-۱

سیستمی متشکل از سه بوزون یکسان غیر برهم کنشی را درنظر بگیرید که در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک بُعدی خارجی مشترک حرکت می‌کنند. ترازهای انرژی و توابع موج حالت پایه، نخستین حالت برانگیخته و دومین حالت برانگیخته‌ی سیستم را بیابید.

حل:

هر ذره در پتانسیلی که توسط $\hat{V}_i(x_i)=\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_i^2$ تعریف می‌شود حرکت می‌کند. در این مورد، معادله شرودینگر سیستم سه ذره‌ای عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_i^2}+\frac{1}{2}mw^2\hat{x}_i^2\right)\psi_{n_1n_2n_3}(x_1,x_2,x_3)=E_{n_1n_2n_3}\psi_{n_1n_2n_3}(x_1,x_2,x_3)$$

که به سه معادله تک ذره‌ای جدا می‌شود:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{n_i}(x_i)}{dx_i^2}+\frac{1}{2}mw^2\hat{x}_i^2=\varepsilon_{n_i}\psi_{n_i}(x_i)\qquad;\qquad i=1,2,3$$

و

$$\varepsilon_{n_i}=\hbar w\left(n_i+\frac{1}{2}\right)\quad,\quad \psi_{n_i}(x_i)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{n_i}n_i!x_0}}e^{-\frac{x_i^2}{2x_0^2}}H_{n_i}\left(\frac{x_i}{x_0}\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

که در رابطه‌ی اخیر $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{mw}}$.

انرژی کل و تابع موج کل توسط:

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{n_i} = \hbar w \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right)$$

و

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x_1, x_2, x_3) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) \psi_{n_3}(x_3)$$

داده می‌شوند.

با در نظر گرفتن اینکه سه ذره در واقع سه بوزن مشابه هستند، حالت پایه، متناظر با موردی است که سه ذره در پایین‌ترین حالت $(n_1 = n_2 = n_3 = 0)$ قرار داشته باشند:

$$E^{(0)} = E_{000} = \frac{3}{2} \hbar w$$

$$\psi^{(0)} = \psi_0(x_1) \psi_0(x_2) \psi_0(x_3)$$

در حالت برانگیخته‌ی اول، دو ذره در حالت ψ_0 (هر یک با انرژی $\varepsilon_0 = \frac{\hbar w}{2}$) و دیگری در حالت ψ_1 (با انرژی $\varepsilon_1 = \frac{3}{2} \hbar w$) خواهد بود:

$$E^{(1)} = 2\varepsilon_0 + \varepsilon_1 = 2\left(\frac{\hbar w}{2} \right) + \frac{3}{2} \hbar w = \frac{5}{2} \hbar w$$

در مورد تابع موج حالت برانگیخته‌ی اول؛ چون ذرات مشابه هستند نمی‌توان گفت کدام یک از آن‌ها در کدام حالت قرار دارد و فقط می‌توان بیان کرد که دو ذره در حالت ψ_0 و دیگری در حالت ψ_1 است. چون مقدار $n = 0$ دو بار اتفاق می‌افتد (دو ذره در ψ_0 هستند) با توجه به روابط ۸-۶۰ و ۸-۶۱ نتیجه می‌شود که:

$$\psi^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{2!}{3!}} \left[\psi_0(x_1) \psi_0(x_2) \psi_1(x_3) + \psi_0(x_1) \psi_1(x_2) \psi_0(x_3) + \psi_1(x_1) \psi_0(x_2) \psi_0(x_3) \right]$$

در حالت برانگیخته‌ی دوم، یک ذره در ψ_0 و دو ذره در ψ_1 خواهند بود. پس:

$$E^{(2)} = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 = \frac{\hbar w}{2} + 2\left(\frac{3 \hbar w}{2} \right) = \frac{7 \hbar w}{2}$$

اکنون چون مقدار $n = 1$ دوبار اتفاق می‌افتد (دو ذره در ψ_1 هستند) و $n = 0$ فقط یک‌بار، لذا ۸-۶۰ و ۸-۶۱ منجر می‌شوند به:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\psi^{(2)}(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{\frac{2!}{3!}}\left[\psi_0(x_1)\psi_1(x_2)\psi_1(x_3)+\psi_1(x_1)\psi_0(x_2)\psi_1(x_3)+\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\psi_0(x_3)\right]$$

تمرین ۸-۲

دو ذره‌ی یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ را در نظر بگیرید که در یک جعبه‌ی مکعبی به ضلع L محدود شده‌اند. انرژی و تابع موج این سیستم در حالتی که بین ذرات برهمکنش وجود نداشته باشد را پیدا کنید.

حل:

هر ذره در پتانسیلی که توسط:

$$V_i(\vec{r}_i)=\begin{cases}0 & ;\ 0<x_i<L\ ,\ 0<y_i<L\ ,\ 0<z_i<L\\ \infty & ;\ \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

توصیف می‌شود قرار داد. در این مورد، معادله شرودینگر سیستم دو ذره‌ای:

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_i^2+V_i(\vec{r}_i)\right)\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

به دو معادله‌ی تک ذره‌ای جدا می‌شود:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_i^2+V_i(\vec{r}_i)\right)\psi_{n_i}(\vec{r}_i)=\varepsilon_{n_i}\psi_{n_i}(\vec{r}_i)\quad ;\quad i=1,2$$

بنابراین طبق روابط ۶-۲۵ و ۶-۲۶ خواهیم داشت:

$$\psi_{n_i}(\vec{r}_i)=\sqrt{\frac{8}{L^3}}\sin\left(\frac{n_{ix}\pi x_i}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{iy}\pi y_i}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{iz}\pi z_i}{L}\right)$$

$$\varepsilon_{n_i}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_{ix}^2+n_{iy}^2+n_{iz}^2\right)$$

پس انرژی کل و تابع موج کل توسط:

$$E=E_{n_{1x}n_{1y}n_{1z}n_{2x}n_{2y}n_{2z}}=\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_{n_i}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_{1x}^2+n_{1y}^2+n_{1z}^2+n_{2x}^2+n_{2y}^2+n_{2z}^2\right)$$

و

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\psi_{n_{1x}n_{1y}n_{1z}n_{2x}n_{2y}n_{2z}}(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)=\prod_{i=1}^{2}\psi_{n_i}(\vec{r}_1)$$

$$=\frac{8}{L^3}\sin\left(\frac{n_{1x}\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{1y}\pi y_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{1z}\pi z_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2x}\pi x_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2y}\pi y_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2z}\pi z_2}{L}\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

با در نظر گرفتن اینکه دو ذره مورد نظر فرمیون‌های یکسان هستند لذا تابع موج کلی باید پاد متقارن باشد. از آنجا که تابع موج کلی از حاصل‌ضرب بخش فضایی و بخش اسپینی حاصل می‌شود بنابراین یا بخش فضایی پاد متقارن است و بخش اسپینی متقارن یا بخش فضایی متقارن است و بخش اسپینی پاد متقارن که این موارد عبارتند از:

۱. با شرط $n_1 \neq n_2$

$$\psi_a(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{n_1}(\vec{r}_1)\psi_{n_2}(\vec{r}_2)-\psi_{n_1}(\vec{r}_2)\psi_{n_2}(\vec{r}_1)\right]\chi_{\text{سه‌گانه}}(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{8}{L^3}\left[\sin\left(\frac{n_{1x}\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{1y}\pi y_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{1z}\pi z_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2x}\pi x_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2y}\pi y_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2z}\pi z_2}{L}\right)\right.$$

$$\left.-\sin\left(\frac{n_{1x}\pi x_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{1y}\pi y_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{1z}\pi z_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2x}\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2y}\pi y_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2z}\pi z_1}{L}\right)\right]\chi_{\text{سه‌گانه}}$$

۲. با شرط $n_1 \neq n_2$

$$\psi_a(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{n_1}(\vec{r}_1)\psi_{n_2}(\vec{r}_2)+\psi_{n_1}(\vec{r}_2)\psi_{n_2}(\vec{r}_1)\right]\chi_{\text{منفرد}}(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{8}{L^3}\left[\sin\left(\frac{n_{1x}\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{1y}\pi y_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{1z}\pi z_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2x}\pi x_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2y}\pi y_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2z}\pi z_2}{L}\right)\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{n_{1x}\pi x_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{1y}\pi y_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{1z}\pi z_2}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2x}\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2y}\pi y_1}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{2z}\pi z_1}{L}\right)\right]\chi_{\text{منفرد}}(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$$

تمرین ۸-۳

(آ) سیستمی دارای دو ذره‌ی غیریکسان هرکدام با اسپین ۱ و فاقد اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای (یعنی هر دو ذره در حالت‌های s هستند) را درنظر بگیرید. تمام حالت‌های ممکن برای این سیستم را تشریح کنید.

(ب) اگر دو ذره یکسان باشند، چه محدودیت‌هایی را می‌توانیم درنظر بگیریم؟ تمام حالت‌های ممکن برای سیستم دارای دو ذره‌ی یکسان با اسپین ۱ را تشریح کنید.

حل:

(آ)

اگر بخش فضایی تابع موج را با $\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ نشان دهیم و بخش اسپینی آن را با $\chi(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$، در حالت کلی تابع موج به‌صورت حاصل‌ضرب بخش فضایی و بخش اسپینی خواهد بود یعنی:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\chi(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$$

$\chi(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$ در مجموع دارای ۹ حالت می‌باشد که در فصل هفتم به تفصیل شرح آن رفته است.

(ب)

در صورتی‌که مجموع دو بردار $\vec{S}_1$ و $\vec{S}_2$ را با $\vec{S}$ نشان دهیم، S از $|S_1-S_2|$ تا $|S_1+S_2|$ تغییر می‌کند. با توجه به‌اینکه $S_1=S_2=1$ پس S مقادیر صفر، یک و دو را اختیار می‌کند. طبق مسأله ۷-۳، پنج حالت مربوط به $S=2$ (یعنی: حالات $|2,\pm2\rangle$، $|2,\pm1\rangle$ و $|2,0\rangle$) و نیز تنها حالت مربوط به $S=0$ (یعنی: $|0,0\rangle$) نسبت به جابه‌جایی ذرات، متقارن هستند و سه حالت مربوط به $S=1$ (یعنی: حالات $|1,0\rangle$، $|1,\pm1\rangle$) نسبت به جابه جایی دو ذره، پادمتقارن می‌باشند. از آنجا که حالت $L=0$ تحت جابه‌جایی ذرات متقارن است (چون تابع موج سیستمی متشکل از دو ذره‌ی مشابه اسپین یک، باید متقارن باشد) لذا در این مورد تابع موج ممکن یکی از موارد زیر خواهد بود:

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)|2,m_s\rangle \quad ; \quad m_s=0,\pm1,\pm2$$

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)|0,0\rangle$$

یعنی در مجموع ۶ حالت خواهیم داشت.

تمرین ۸-۴

دو ذره‌ی یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ در یک جعبه‌ی پتانسیل یک بُعدی به طول L با دیواره‌هایی صلب در $x=0$ و $x=L$ محبوس شده‌اند. با فرض اینکه سیستم دو ذره‌ای در یک حالت اسپینی سه‌تایی قرار دارد، ترازهای انرژی، توابع موج و تبهگنی‌های متناظر با پایین‌ترین سه حالت را پیدا کنید.

حل:

با توجه به اینکه تابع موج سیستم متشکل از دو فرمیون یکسان باید پاد متقارن باشد لذا تابع موج سیستم به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)-\psi_{n_1}(x_2)\psi_{n_2}(x_1)\right]\chi_{\text{سه‌گانه}}(\vec{S}_1,\vec{S}_2) \qquad (*)$$

در اینجا:

$$\psi_{n_i}(x_i)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n_i\pi x_i}{L}\right) \quad ; \quad i=1,2$$

انرژی سیستم نیز عبارت خواهد بود از:

$$E_{n_1,n_2}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_1^2+n_2^2\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

طبق رابطه (*) واضح است که n_1 نمی‌تواند با n_2 برابر باشد. اما برای پایین‌ترین سه حالت داریم:

$$\psi^{(0)}(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)-\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)\right]\chi_{\text{سه‌گانه}}(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$$

بنابراین حالت پایه، تبهگنی سه‌گانه دارد و انرژی متناظر با آن $E_0=\frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ است.

$$\psi^{(1)}(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{3\pi x_2}{L}\right)-\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{3\pi x_1}{L}\right)\right]\chi_{\text{سه‌گانه}}(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$$

پس اولین حالت برانگیخته نیز تبهگنی سه‌گانه با انرژی $E_1=\frac{10\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ دارد.

$$\psi^{(2)}(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{3\pi x_2}{L}\right)-\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{3\pi x_1}{L}\right)\right]\chi_{\text{سه‌گانه}}(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$$

لذا دومین حالت برانگیخته، تبهگنی سه‌گانه با انرژی $E_2=\frac{13\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ دارد.

در پایان متذکر می‌شویم که در حالت پایه، یکی از دو ذره در حالت ψ_1 و دیگری در ψ_2 خواهد بود، در اولین حالت برانگیخته یکی از دو ذره در حالت ψ_1 و دیگری در ψ_3 خواهد بود و در دومین حالت برانگیخته یکی از دو ذره در حالت ψ_2 و دیگری در حالت ψ_3 خواهد بود که با استفاده از این نکات، انرژی و توابع موج متناظر با حالت پایه، اولین و دومین حالت برانگیخته بررسی شدند.

تمرین ۸-۵

دو ذره‌ی یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ در یک جعبه‌ی پتانسیل یک بُعدی به طول L با دیواره‌هایی صلب در $x=0$ و $x=L$ محبوس شده‌اند. با فرض این‌که سیستم دو ذره‌ای در یک حالت اسپین یکتایی باشد، ترازهای انرژی، توابع موج و تبهگنی‌های متناظر با پایین‌ترین سه حالت را پیدا کنید.

حل:

با توجه به حل مسئله‌ی ۸-۴ و توضیحات مربوط به آن در اینجا داریم:

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)+\psi_{n_1}(x_2)\psi_{n_2}(x_1)\right)\chi_{\text{منفرد}}(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$$

اما درصورتی که $n_1=n_2$، آنگاه:

$$\psi(x_1,x_2)=\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_1}(x_2)\chi_{\text{منفرد}}(\vec{S}_1,\vec{S}_2)$$

پس برای حالت پایه داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\psi^{(0)}(x_1,x_2)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\chi_{\text{منفرد}}\left(\vec{S}_1,\vec{S}_2\right)$$

$$E^{(0)}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(1^2+1^2\right)=\frac{2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

پس حالت پایه فاقد تبهگنی است.

برای اولین حالت برانگیخته داریم:

$$\psi^{(1)}=(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{L}\left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]\chi_{\text{منفرد}}\left(\vec{S}_1,\vec{S}_2\right)$$

$$E^{(1)}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(1^2+2^2\right)=\frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

لذا اولین حالت برانگیخته نیز فاقد تبهگنی است.

برای دومین حالت برانگیخته داریم:

$$\psi^{(2)}(x_1,x_2)=\frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)\chi_{\text{منفرد}}\left(\vec{S}_1,\vec{S}_2\right)$$

$$E^{(2)}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(2^2+2^2\right)=\frac{4\hbar^2\pi^2}{mL^2}$$

پس دومین حالت برانگیخته نیز فاقد تبهگنی است.

تمرین ۸-۶

دو ذره‌ی یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ تحت اثر یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک بُعدی، در حرکت هستند. با فرض این‌که سیستم دو ذره‌ای در یک حالت اسپینی سه‌تایی باشد، ترازهای انرژی، توابع موج و تبهگنی‌های متناظر با پایین‌ترین سه حالت را بیابید.

حل:

از آنجا که حالت اسپین سه‌گانه متقارن است و با توجه به اینکه تابع موج سیستمی متشکل از فرمیون‌های مشابه پاد متقارن است پس بخش فضایی تابع موج باید متقارن باشد. به‌عبارتی تابع موج سیستم باید به‌صورت زیر باشد:

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)-\psi_{n_1}(x_2)\psi_{n_2}(x_1)\right]\chi_{\text{سه‌گانه}}\left(\vec{S}_1,\vec{S}_2\right)\qquad(*)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

که در اینجا $\psi_n(x)$ تابع موج نوسانگر هماهنگ برای حالت nاُم است.

انرژی سیستم نیز عبارت خواهد بود از:

$$E_{n_1 n_2} = \sum_{i=1}^{2}\left[\hbar w\left(n_i + \frac{1}{2}\right)\right] = \hbar w\left(n_1 + n_2 + 1\right)$$

اکنون حالت‌های پایه، اولین حالت برانگیخته و دومین حالت برانگیخته را بررسی می‌کنیم. پیش از ادامه کار با توجه به رابطه (*) واضح است که n_1 و n_2 نباید دارای مقادیر یکسان باشند.

اگر تابع موج و انرژی حالت پایه را به‌ترتیب $\psi^{(0)}$ و $E^{(0)}$ نشان دهیم، با توجه به اینکه حالت پایه در اینجا متناظر با موردی است که یکی از ذرات در ψ_0 و دیگری در ψ_1 قرار بگیرد لذا می‌توان گفت:

$$\psi^{(0)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(x_1)\psi_1(x_2) - \psi_1(x_1)\psi_0(x_2)\right)\chi_{\text{سه‌گانه}}\left(\vec{S}_1, \vec{S}_2\right)$$

از آنجا که $\chi_{\text{سه‌گانه}}\left(\vec{S}_1, \vec{S}_2\right)$ دارای سه حالت مستقل است بنابراین حالت پایه دارای تبهگنی سه‌گانه است و انرژی متناظر با آن یعنی $E^{(0)}$، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$E^{(0)} = E_{10} = E_{01} = \hbar w(0 + 1 + 1) = 2\hbar w$$

به‌طور مشابه اگر تابع موج و انرژی اولین حالت برانگیخته را با $\psi^{(1)}$ و $E^{(1)}$ نشان دهیم با توجه به اینکه اولین حالت برانگیخته از قرار گرفتن یکی از ذرات در ψ_0 و دیگری در ψ_2 به‌دست می‌آید پس:

$$\psi^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_0(x_2)\right)\chi_{\text{سه‌گانه}}\left(\vec{S}_1, \vec{S}_2\right)$$

$$E^{(1)} = \hbar w(0 + 2 + 1) = 3\hbar w$$

در اینجا نیز تبهگنی سه‌گانه وجود دارد.

در مورد دومین حالت برانگیخته قضیه قدری متفاوت است. اگر انرژی این حالت را با $E^{(2)}$ نشان دهیم داریم:

$$E^{(2)} = 4\hbar w$$

این حالت در دو مورد اتفاق می‌افتد:

۱. یکی از دو ذره در حالت ψ_0 و دیگری در ψ_2 باشد. اگر تابع موج متناظر با این مورد را با $\psi_1^{(2)}$ نشان دهیم داریم:

$$\psi_1^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(x)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_0(x_2)\right)\chi_{\text{سه‌گانه}}\left(\vec{S}_1, \vec{S}_2\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$\psi_1^{(2)}$ از سه حالت مستقل تشکیل شده است.

۲. یکی از دو ذره در حالت ψ_1 و دیگری در ψ_2 باشد. اگر تابع موج متناظر با این مورد را با $\psi_2^{(2)}$ نشان دهیم داریم:

$$\psi_2^{(2)}(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)-\psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\right)\chi_{\text{سه‌گانه}}\left(\vec{S}_1,\vec{S}_2\right)$$

$\psi_2^{(2)}$ نیز از سه حالت مستقل تشکیل شده است.

بنابراین طبق توضیحات فوق دومین حالت برانگیخته با ویژه توابع $\psi_1^{(2)}$ و $\psi_2^{(2)}$ و انرژی $E^{(2)}$ دارای تبهگنی شش‌گانه می‌باشد.

تمرین ۸-۷

انرژی حالت پایه و انرژی میانگین حالت پایه به‌ازای هر ذره و تابع موج حالت پایه‌ی سیستمی متشکل از N بوزون یکسان غیرهم‌کنشی در حال حرکت تحت اثر یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک بعدی را بیابید.

حل:

اگر $\psi_n(x)$ تابع موج نوسانگر هماهنگ برای حالت nاُم باشد، برای N بوزون که با هم برهم‌کنش نمی‌کنند، تمام ذرات در حالت $n=0$ (یعنی حالت پایه) هستند و بنابراین انرژی این حالت برابر است با:

$$E^{(0)}=N\frac{\hbar w}{2}$$

از این رو انرژی بر ذره برابر است با:

$$\frac{E^{(0)}}{N}=\frac{\hbar w}{2}$$

و تابع موج متناظر با آن نیز عبارت است از:

$$\psi^{(0)}(x_1,x_2,\ldots,x_N)=\prod_{i=1}^{N}\psi_0(x_i)=\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}}\right)^N\exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^{N}x_i^2}{2x_0^2}\right)$$

تمرین ۸-۸

انرژی حالت پایه، انرژی میانگین حالت پایه به ازای هر ذره و تابع موج حالت پایه سیستمی متشکل

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

از N ذره‌ی اسپین $\frac{۱}{۲}$ یکسان غیربرهم‌کنشی در حال حرکت تحت اثر یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک بُعدی را برای دو حالت زیر بیابید:

(آ) هنگامی که N زوج است.

(ب) هنگامی که N فرد است.

حل:

(آ)

در اینجا برای یک تک‌ذره، تابع موج و انرژی آن عبارتند از:

$$\psi_n(x)=\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,x_۰}}\exp\left(\frac{-x^۲}{۲x_۰^۲}\right)\;;\;x_۰=\left(\frac{\hbar}{m\,w}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$E_n=\hbar w\left(n+\frac{۱}{۲}\right)$$

بنابر اصل طرد پائولی، برای N فرمیون یکسان فقط دو تا از آنها می‌توانند به هر یک از حالت‌های $n=۰,۱,۲,\ldots$ بروند به‌طوری‌که تعداد $\frac{N}{۲}$ حالت پر می‌شوند. بنابراین انرژی کل برابر است با:

$$E^{(۰)}=۲\sum_{n=۰}^{\frac{N}{۲}-۱}\hbar w\left(n+\frac{۱}{۲}\right)=۲\hbar w\frac{N}{۲}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{N}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{N^۲}{۲}\hbar w$$

از این‌رو انرژی بر ذره برابر است با:

$$\frac{E^{(۰)}}{N}=\frac{N}{۲}\hbar w$$

و تابع موج $\psi^{(۰)}(x_۱,x_۲,\ldots,x_N)$ نیز توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\psi^{(۰)}(x_۱,x_۲,\ldots,x_N)=\frac{۱}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix}\psi_۰(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۰(x_۲)\chi(S_۲)\cdots\cdots\psi_۰(x_N)\chi(S_N)\\ \psi_۰(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۰(x_۲)\chi(S_۲)\cdots\cdots\psi_۰(x_N)\chi(S_N)\\ \psi_۱(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۱(x_۲)\chi(S_۲)\cdots\cdots\psi_۱(x_N)\chi(S_N)\\ \psi_۱(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۱(x_۲)\chi(S_۲)\cdots\cdots\psi_۱(x_N)\chi(S_N)\\ \vdots & \vdots\qquad\qquad\ddots\qquad\vdots\\ \psi_{\frac{N}{۲}-۱}(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_{\frac{N}{۲}-۱}(x_۲)\chi(S_۲)\cdots\cdots\psi_{\frac{N}{۲}-۱}(x_N)\chi(S_N)\\ \psi_{\frac{N}{۲}-۱}(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_{\frac{N}{۲}-۱}(x_۲)\chi(S_۲)\cdots\cdots\psi_{\frac{N}{۲}-۱}(x_N)\chi(S_N)\end{vmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

که در رابطه‌ی فوق $\chi(S_i)=\left|\frac{۱}{۲},\pm\frac{۱}{۲}\right\rangle$ حالت اسپینی ذره i ام با $i=۰,۱,....\frac{N}{۲}-۱$ می‌باشد.

ب) برای حالتی‌که N فرد باشد، انرژی حالت پایه را می‌توان مجموع انرژی حالت پایه یک سیستم $(N-۱)$ ذره‌ای به‌علاوه $E_{\frac{N-۱}{۲}}$ در نظر بگیریم:

$$E^{(۰)}=\frac{\hbar w}{۲}(N-۱)^{۲}+\hbar w\left(\frac{N-۱}{۲}+۱\right)=\frac{\hbar w}{۲}\left[(N-۱)^{۲}+N+۱\right]=\frac{\hbar w}{۲}\left(N^{۲}-N+۲\right)$$

از این‌رو انرژی بر ذره برابر است با:

$$\frac{E^{(۰)}}{N}=\frac{\hbar w}{۲}\left(N-۱+\frac{۲}{N}\right)$$

و تابع موج $\psi^{(۰)}(x_۱,x_۲,...,x_N)$ نیز توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\psi^{(۰)}(x_۱,x_۲,...,x_N)=\frac{۱}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix}
\psi_۰(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۰(x_۲)\chi(S_۲).....\psi_۰(x_N)\chi(S_N)\\
\psi_۰(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۰(x_۲)\chi(S_۲).....\psi_۰(x_N)\chi(S_N)\\
\psi_۱(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۱(x_۲)\chi(S_۲).....\psi_۱(x_N)\chi(S_N)\\
\psi_۱(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۱(x_۲)\chi(S_۲).....\psi_۱(x_N)\chi(S_N)\\
\psi_۲(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۲(x_۲)\chi(S_۲).....\psi_۲(x_N)\chi(S_N)\\
\psi_۲(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۲(x_۲)\chi(S_۲).....\psi_۲(x_N)\chi(S_N)\\
\vdots & \vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\
\psi_{\frac{N}{۲}-۲}(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_{\frac{N}{۲}-۲}(x_۲)\chi(S_۲).....\psi_{\frac{N}{۲}-۲}(x_N)\chi(S_N)\\
\psi_{\frac{N}{۲}-۲}(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_{\frac{N}{۲}-۲}(x_۲)\chi(S_۲).....\psi_{\frac{N}{۲}-۲}(x_N)\chi(S_N)\\
\psi_{\frac{N}{۲}-۱}(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_{\frac{N}{۲}-۱}(x_۲)\chi(S_۲).....\psi_{\frac{N}{۲}-۱}(x_N)\chi(S_N)
\end{vmatrix}$$

تمرین ۸-۹

سیستمی متشکل از چهار ذره‌ی غیربرهمکنشی که به حرکت در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بُعدی به طول a محدود شده‌اند را درنظر بگیرید. $V(x)=۰$ به‌ازای $۰<x<a$ و $V(x)=\infty$ برای سایر مقادیر x می‌باشد. انرژی‌ها و توابع موج حالت پایه، اولین و دومین حالت برانگیخته را زمانی که چهار ذره:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ) بوزون‌هایی متمایز باشند به‌طوری که جرم‌های متناظر آنها در رابطه زیر صدق کنند:

$$m_1 < m_2 < m_3 < m_4$$

(ب) بوزون‌های یکسان (هر کدام به جرم m) باشند تعیین کنید.

حل:

(آ)

در مورد چهار بوزون غیر مشابه، تابع موج و انرژی کل توسط روابط زیر داده می‌شوند:

$$E_{n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2}\left(\frac{n_1^2}{m_1}+\frac{n_2^2}{m_2}+\frac{n_3^2}{m_3}+\frac{n_4^2}{m_4}\right)$$

$$\psi_{n_1 n_2 n_3 n_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{4}{a^2}\sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{a}\right)\sin\left(\frac{n_3 \pi x_3}{a}\right)\sin\left(\frac{n_4 \pi x_4}{a}\right)$$

حالت پایه ذره، متناظر با موردی است که هر چهار ذره در حالت پایه متناظرشان (یعنی: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$) قرار گرفته باشند. بنابراین:

$$E^{(0)} = E_{1111} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4}\right)$$

$$\psi^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{4}{a^2}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_3}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_4}{a}\right)$$

چون ذره‌ی چهارم از همه سنگین‌تر است، اولین حالت برانگیخته متناظر با موردی است که ذره‌ی چهارم در $n_4 = 2$ و سه ذره‌ی دیگر در $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ باقی بمانند:

$$E^{(1)} = E_{1112} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{4}{m_4}\right)$$

$$\psi^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{4}{a^2}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_3}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_4}{a}\right)$$

به‌طور مشابه، دومین حالت برانگیخته متناظر با موردی است که ذرات سوم و چهارم در $n_3 = n_4 = 2$ و ذرات اول و دوم در $n_1 = n_2 = 1$ باقی بمانند:

$$E^{(2)} = E_{1122} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{4}{m_3}+\frac{4}{m_4}\right)$$

$$\psi^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{4}{a^2}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_3}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_4}{a}\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

در مورد چهار بوزون مشابه، حالت پایه متناظر با موردی است که هر چهار ذره در پایین‌ترین حالت $(n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1)$ قرار بگیرند:

$$E^{(0)} = E_{1111} = 4\varepsilon_1 = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

$$\psi^{(0)} = \psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\psi_1(x_3)\psi_1(x_4) = \frac{4}{a^2}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_3}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_4}{a}\right)$$

در دومین حالت برانگیخته سه تا از چهار ذره در ψ_1 (هر کدام با انرژی $\varepsilon_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$) و یکی از آنها در ψ_2 (با انرژی $\varepsilon_2 = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$) قرار می‌گیرند:

$$E^{(1)} = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_1 = 7\varepsilon_1 = \frac{7\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

$$\psi^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{\frac{3!}{4!}}\Big[\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\psi_1(x_3)\psi_2(x_4) + \psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\psi_2(x_3)\psi_1(x_4)$$
$$+\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_1(x_3)\psi_1(x_4) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\psi_1(x_3)\psi_1(x_4)\Big]$$

در دومین حالت برانگیخته دو تا از چهار ذره در ψ_1 (هر کدام با انرژی $\varepsilon_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$) و دو تا از آنها در ψ_2 (با انرژی $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_1$) قرار می‌گیرند:

$$E^{(2)} = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 + 2(4\varepsilon_1) = 10\varepsilon_1 = \frac{10\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

$$\psi^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{\frac{2!\,2!}{4!}}\Big[\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\psi_2(x_3)\psi_2(x_4) + \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_1(x_3)\psi_2(x_4)$$
$$+\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_2(x_3)\psi_1(x_4) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\psi_1(x_3)\psi_2(x_4)$$
$$+\psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\psi_2(x_3)\psi_1(x_4) + \psi_2(x_1)\psi_2(x_2)\psi_1(x_3)\psi_1(x_4)\Big]$$

تمرین ۸-۱۰

سیستمی متشکل از چهار ذره غیربرهم‌کنشی یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ (هر کدام به جرم m) را در نظر بگیرید که حرکت آنها در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بُعدی به طول a محدود شده است.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$V(x)=0$ به ازای $0<x<a$ و $V(x)=\infty$ برای سایر مقادیر x می‌باشد. انرژی‌ها و توابع موج حالت پایه را محاسبه و چگونگی توزیع ذرات در میان ترازها را ترسیم کنید.

حل:

در مورد چهار فرمیون مشابه، حالت پایه متناظر با موردی است که دو ذره در پایین‌ترین حالت ψ_1 (یکی دارای اسپین بالا $|+\rangle=\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ و دیگری با اسپین پایین $|-\rangle=\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle$) و دو ذره‌ی دیگر در حالت ψ_2 (یکی دارای اسپین بالا و دیگری دارای اسپین پایین) قرار بگیرند (مطابق شکل). انرژی حالت پایه عبارتست از:

$$E^{(0)}=2\varepsilon_1+2\varepsilon_2=2\varepsilon_1+2\left(4\varepsilon_1\right)=10\varepsilon_1=\frac{10\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

تابع موج حالت پایه باید پاد متقارن باشد. بنابراین:

$$\psi^{(0)}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\frac{1}{\sqrt{4!}}\begin{vmatrix}\psi_1(x_1)\chi(S_1) & \psi_1(x_2)\chi(S_2) & \psi_1(x_3)\chi(S_3) & \psi_1(x_4)\chi(S_4)\\ \psi_1(x_1)\chi(S_1) & \psi_1(x_2)\chi(S_2) & \psi_1(x_3)\chi(S_3) & \psi_1(x_4)\chi(S_4)\\ \psi_2(x_1)\chi(S_1) & \psi_2(x_2)\chi(S_2) & \psi_2(x_3)\chi(S_3) & \psi_2(x_4)\chi(S_4)\\ \psi_2(x_1)\chi(S_1) & \psi_2(x_2)\chi(S_2) & \psi_2(x_3)\chi(S_3) & \psi_2(x_4)\chi(S_4)\end{vmatrix}$$

اولین حالت برانگیخته متناظر با موردی است که دو ذره در پایین‌ترین حالت ψ_1 (یکی دارای اسپین بالا و دیگری با اسپین پایین)، یکی از ذرات در حالت ψ_2 (با اسپین بالا یا پایین) و ذره‌ی آخر در حالت ψ_3 (با اسپینی بالا یا پایین) قرار بگیرند (مطابق شکل). پس انرژی و تابع موج اولین حالت برانگیخته عبارتند از:

$$E^{(1)}=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=2\varepsilon_1+4\varepsilon_1+9\varepsilon_1=15\varepsilon_1=\frac{15\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

$$\psi^{(1)}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\frac{1}{\sqrt{4!}}\begin{vmatrix}\psi_1(x_1)\chi(S_1) & \psi_1(x_2)\chi(S_2) & \psi_1(x_3)\chi(S_3) & \psi_1(x_4)\chi(S_4)\\ \psi_1(x_1)\chi(S_1) & \psi_1(x_2)\chi(S_2) & \psi_1(x_3)\chi(S_3) & \psi_1(x_4)\chi(S_4)\\ \psi_2(x_1)\chi(S_1) & \psi_2(x_2)\chi(S_2) & \psi_2(x_3)\chi(S_3) & \psi_2(x_4)\chi(S_4)\\ \psi_3(x_1)\chi(S_1) & \psi_3(x_2)\chi(S_2) & \psi_3(x_3)\chi(S_3) & \psi_3(x_4)\chi(S_4)\end{vmatrix}$$

دومین حالت برانگیخته متناظر با موردی است که یکی از ذرات در پایین‌ترین حالت ψ_1 (با اسپین بالا یا پایین)، دو تا از آنها در حالت ψ_2 (یکی با اسپین بالا و دیگری با اسپین پایین) و ذره‌ی آخر در حالت ψ_3 (با اسپین بالا یا پایین) قرار بگیرند (مطابق شکل). پس:

$$E^{(2)}=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_1+2\left(4\varepsilon_1\right)+9\varepsilon_1=18\varepsilon_1=\frac{18\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

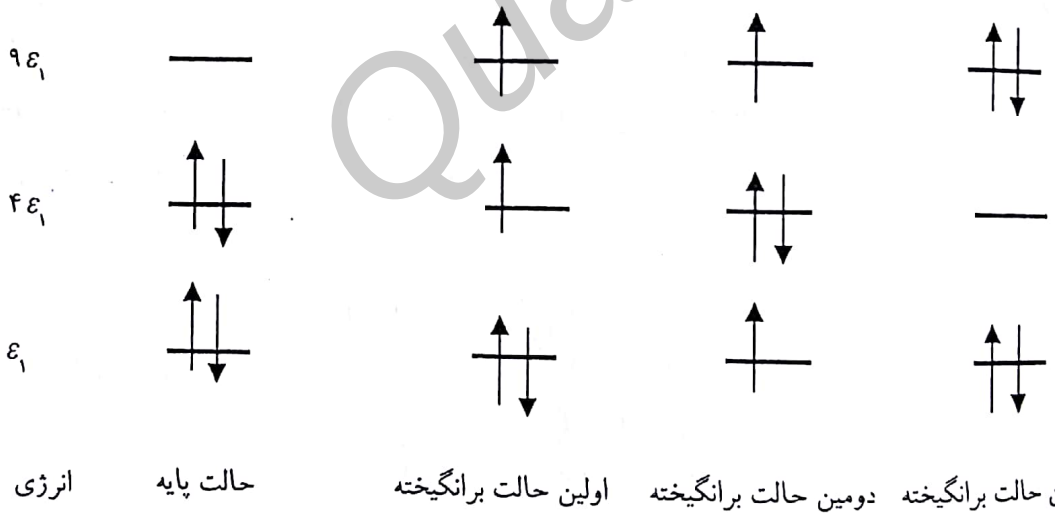
Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\psi^{(۲)}(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴)=\frac{۱}{\sqrt{۴!}}\begin{vmatrix}\psi_۱(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۱(x_۲)\chi(S_۲) & \psi_۱(x_۳)\chi(S_۳) & \psi_۱(x_۴)\chi(S_۴)\\ \psi_۲(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۲(x_۲)\chi(S_۲) & \psi_۲(x_۳)\chi(S_۳) & \psi_۲(x_۴)\chi(S_۴)\\ \psi_۲(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۲(x_۲)\chi(S_۲) & \psi_۲(x_۳)\chi(S_۳) & \psi_۲(x_۴)\chi(S_۴)\\ \psi_۳(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۳(x_۲)\chi(S_۲) & \psi_۳(x_۳)\chi(S_۳) & \psi_۳(x_۴)\chi(S_۴)\end{vmatrix}$$

سومین حالت برانگیخته متناظر با موردی است که دو تا از آنها در پایین‌ترین حالت $\psi_۱$ (یکی با اسپین بالا و دیگری با اسپین پایین) و دو تای دیگر در حالت $\psi_۲$ (یکی با اسپین بالا و دیگری با اسپین پایین) قرار بگیرند (مطابق شکل). پس:

$$E^{(۳)}=۲\varepsilon_۱+۲\varepsilon_۲=۲\varepsilon_۱+۲(۴\varepsilon_۱)=۲۰\varepsilon_۱=\frac{۲۰\hbar^۲\pi^۲}{۲ma^۲}$$

$$\psi^{(۳)}(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴)=\frac{۱}{\sqrt{۴!}}\begin{vmatrix}\psi_۱(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۱(x_۲)\chi(S_۲) & \psi_۱(x_۳)\chi(S_۳) & \psi_۱(x_۴)\chi(S_۴)\\ \psi_۱(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۱(x_۲)\chi(S_۲) & \psi_۱(x_۳)\chi(S_۳) & \psi_۱(x_۴)\chi(S_۴)\\ \psi_۳(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۳(x_۲)\chi(S_۲) & \psi_۳(x_۳)\chi(S_۳) & \psi_۳(x_۴)\chi(S_۴)\\ \psi_۳(x_۱)\chi(S_۱) & \psi_۳(x_۲)\chi(S_۲) & \psi_۳(x_۳)\chi(S_۳) & \psi_۳(x_۴)\chi(S_۴)\end{vmatrix}$$



تمرین ۸-۱۱

سیستمی متشکل از چهار ذره‌ی غیربرهم‌کنشی یکسان با اسپین $\frac{۱}{۲}$ (هرکدام به جرم m) را درنظر بگیرید که حرکت آنها در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بُعدی به طول a محدود شده است. $V(x)=۰$ به‌ازای $۰<x<a$ و $V(x)=\infty$ برای سایر مقادیر x می‌باشد. انرژی‌ها و توابع موج حالت پایه، نخستین حالت برانگیخته و دومین حالت برانگیخته را تعیین کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

برای یک تک ذره، انرژی و تابع موج عبارتند از:

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \ , \ \psi_n(x_i) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x_i}{a}\right)$$

تابع موج یک سیستم چهار فرمیونی باید پاد متقارن باشد. در اینجا چون هر چهار ذره، حالت اسپینی یکسانی دارند بنابراین هیچ دو ذره‌ای نمی‌توانند در حالت فضایی یکسانی قرار بگیرند و هر سطح انرژی توسط حداکثر یک ذره اشغال می‌شود. بنابراین حالت پایه متناظر است با موردی که پایین‌ترین چهار سطح $n = 1,2,3,4$ اشغال شوند. انرژی و تابع حالت پایه طبق این توضیحات عبارتند از:

$$E^{(0)} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_1 + 9\varepsilon_1 + 16\varepsilon_1 = 30\varepsilon_1 = \frac{30\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

$$\psi^{(0)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{\sqrt{4!}}\begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \psi_1(x_3) & \psi_1(x_4) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \psi_2(x_3) & \psi_2(x_4) \\ \psi_3(x_1) & \psi_3(x_2) & \psi_3(x_3) & \psi_3(x_4) \\ \psi_4(x_1) & \psi_4(x_2) & \psi_4(x_3) & \psi_4(x_4) \end{vmatrix} \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_2 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_3 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_4$$

اولین حالت برانگیخته متناظر است با موردی که ذره‌ی چهارم به سطح پنجم برود، یعنی سطوح $n = 1,2,3,5$ هر یک توسط یک ذره اشغال شوند و سطح چهارم خالی باشد.

$$E^{(1)} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_1 + 9\varepsilon_1 + 25\varepsilon_1 = 39\varepsilon_1$$

$$\psi^{(1)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{\sqrt{4!}}\begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \psi_1(x_3) & \psi_1(x_4) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \psi_2(x_3) & \psi_2(x_4) \\ \psi_3(x_1) & \psi_3(x_2) & \psi_3(x_3) & \psi_3(x_4) \\ \psi_5(x_1) & \psi_5(x_2) & \psi_5(x_3) & \psi_5(x_4) \end{vmatrix} \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_2 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_3 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_4$$

دومین حالت برانگیخته متناظر با موردی است که سطوح $n = 1,2,4,5$ هر یک توسط یکی از ذرات اشغال شوند و بقیه‌ی سطوح خالی باشند:

$$E^{(2)} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_1 + 16\varepsilon_1 + 25\varepsilon_1 = 46\varepsilon_1 = \frac{46\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\psi^{(۲)}\left(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴\right)=\frac{۱}{\sqrt{۴!}}\begin{vmatrix}\psi_۱(x_۱) & \psi_۱(x_۲) & \psi_۱(x_۳) & \psi_۱(x_۴)\\ \psi_۲(x_۱) & \psi_۲(x_۲) & \psi_۲(x_۳) & \psi_۲(x_۴)\\ \psi_۴(x_۱) & \psi_۴(x_۲) & \psi_۴(x_۳) & \psi_۴(x_۴)\\ \psi_۵(x_۱) & \psi_۵(x_۲) & \psi_۵(x_۳) & \psi_۵(x_۴)\end{vmatrix}\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle_۱\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle_۲\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle_۳\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle_۴$$

تمرین ۸-۱۲

با فرض این‌که الکترون‌های موجود در اتم هلیوم، بوزون‌هایی بدون اسپین باشند و با چشم‌پوشی از برهمکنش‌های میان آنها، انرژی و تابع موج حالت پایه و نخستین حالت برانگیخته‌ی این سیستم (فرضی) را بیابید.

حل:

برای هر تک الکترون، انرژی آن ε_n و تابع موج آن $\phi_{nlm}\left(\vec{r}\right)$ می‌باشد به‌طوری‌که:

$$\varepsilon_n=-\frac{۴E_۰}{n^۲}=-\frac{۴\times ۱۳/۶\,\mathrm{eV}}{n^۲}=-\frac{۵۴/۴\,\mathrm{eV}}{n^۲}$$

اگر الکترون را بوزون بدون اسپین در نظر بگیریم، در اینجا حالت پایه متناظر با موردی است که هر دو الکترون در حالت پایه خود قرار بگیرند یعنی $n_۱=n_۲=۱$ و در نتیجه:

$$E^{(۰)}=\varepsilon_۱+\varepsilon_۲=۲\varepsilon_۱=-۲\times ۵۴/۴\,\mathrm{eV}=-۱۰۸/۸\,\mathrm{eV}$$

$$\psi^{(۰)}\left(\vec{r}_۱,\vec{r}_۲\right)=\phi_{۱۰۰}\left(\vec{r}_۱\right)\phi_{۱۰۰}\left(\vec{r}_۲\right)$$

اولین حالت برانگیخته متناظر با موردی است که یکی از الکترون‌ها در سطح $n=۱$ و دیگری در سطح $n=۲$ قرار بگیرد. بنابراین:

$$E^{(۱)}=\varepsilon_۱+\varepsilon_۲=\varepsilon_۱+\frac{\varepsilon_۱}{۴}=۱/۲۵\,\varepsilon_۱=-۶۸\,\mathrm{eV}$$

$$\psi^{(۱)}\left(\vec{r}_۱,\vec{r}_۲\right)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left[\psi_{۱۰۰}\left(\vec{r}_۱\right)\psi_{۲lm_l}\left(\vec{r}_۲\right)+\psi_{۲lm_l}\left(\vec{r}_۱\right)\psi_{۱۰۰}\left(\vec{r}_۲\right)\right]$$

واضح است که در اینجا l می‌تواند مقادیر صفر یا یک را اختیار کند و $-l\le m_l\le l$.

تمرین ۸-۱۳

با فرض این‌که الکترون‌های موجود در اتم لیتیوم، بوزون‌هایی بدون اسپین باشند و با چشم‌پوشی از برهمکنش‌های میان آنها، انرژی و تابع موج حالت پایه و نخستین حالت برانگیخته‌ی این سیستم (فرضی) را بیابید.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

در مورد اتم لیتیوم $Z=3$ می‌باشد به طوری‌که:

$$\varepsilon_n=-\frac{9E}{n^2}=-\frac{9\times 13/6\,\text{eV}}{n^2}=-\frac{122/4\,\text{eV}}{n^2}$$

در حالت پایه هر سه الکترون (که در اینجا بوزن در نظر گرفته شده‌اند) در حالت پایه خود قرار می‌گیرند یعنی $n_1=n_2=n_3=1$ و در نتیجه:

$$E^{(0)}=\varepsilon_1+\varepsilon_1+\varepsilon_1=-3\times 122/4\,\text{eV}=-367/2\,\text{eV}$$

در اولین حالت برانگیخته یکی از سه الکترون در سطح $n=2$ و دو الکترون دیگر در سطح $n=1$ قرار خواهند گرفت.

$$E^{(1)}=\varepsilon_1+\varepsilon_1+\varepsilon_2=2\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{4}=\frac{9}{4}\varepsilon_1=-275/4\,\text{eV}$$

$$\psi^{(1)}(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2)\psi_{21m_l}(\vec{r}_3)+\psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{21m_l}(\vec{r}_2)\psi_{100}(\vec{r}_3)$$
$$+\psi_{21m_l}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2)\psi_{100}(\vec{r}_3)\Big]$$

در اینجا واضح است که l می‌تواند مقادیر صفر و یک را داشته باشد و به‌ازای هر l نیز $-l\le m_l\le +l$.

تمرین ۸-۱۴

سیستمی متشکل از دو ذره یکسان غیربرهمکنشی با اسپین $\frac{1}{2}$ و جرم‌های یکسان m که حرکت آنها در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی به طول L محدود شده است را درنظر بگیرید. $V(x)=0$ به ازای $0<x<L$ و $V(x)=\infty$ برای سایر مقادیر x می‌باشد. فرض کنید که ذرات در حالتی با تابع موج $\chi(S_1,S_2)$ قرار دارند $\Psi(x_1,x_2)=\frac{\sqrt{2}}{L}\left[\sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{5\pi x_2}{L}\right)+\sin\left(\frac{5\pi x_1}{L}\right)\sin\left(2\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]\chi(S_1,S_2)$ که در آن x_1 و x_2 به ترتیب مکان‌های ذرات ۱ و ۲ هستند.

(آ) آیا $\chi(S_1,S_2)$ می‌خواهد به یک حالت یکتا یا سه‌تایی تبدیل شود؟

(ب) انرژی این سیستم را بیابید.

حل:

(آ)

چون تابع موج مربوط به سیستمی متشکل از دو ذره مشابه اسپین $\frac{1}{2}$ باید پاد متقارن باشد با توجه به اینکه قسمت فضایی $\psi(x_1,x_2)$ متقارن است لذا قسمت اسپینی آن باید پاد متقارن باشد و بنابراین

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$\chi\left(\tilde{S}_1,\tilde{S}_2\right)$ باید منفرد باشد.

(ب)

تابع موج داده شده متناظر با موردی است که یکی از ذرات در سطح $n=2$ و دیگری در سطح $n=5$ واقع است و با توجه به‌اینکه $\varepsilon_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ لذا:

$$E=\varepsilon_2+\varepsilon_5=4\varepsilon_1+25\varepsilon_1=29\varepsilon_1=\frac{29\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

خوانندهٔ حتماً می‌داند که تابع موج ذره‌ی محصور در جعبه به عرض a، $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ می‌باشد.

تمرین ۸-۱۵

سیستمی متشکل از دو ذره‌ی غیر برهم‌کنشی (در تقریبی که در آن از برهم‌کنش میان الکترون‌ها چشم‌پوشی می‌شود) با اسپین‌های یکسان $\frac{1}{2}$ (با جرم m) را درنظر بگیرید. ذرات در چاه پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک بُعدی حرکت می‌کنند. فرض کنید ذرات در حالتی با تابع موج زیر قرار دارند:

$$\Psi(x_1,x_2)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}x_0^2}(x_2-x_1)\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_0^2}\right)\chi(S_1,S_2)$$

که در آن x_1 و x_2 به ترتیب موقعیت ذره‌ها ۱ و ۲ و $\chi(S_1,S_2)$ حالت اسپینی دو ذره است.

(آ) آیا $\chi(S_1,S_2)$ حالتی یگانه است و یا حالتی سه‌گانه؟

(ب) انرژی سیستم را بیابید.

حل:

(آ)

با توجه به اینکه برای یک سیستم دو فرمیونی، $\psi(x_1,x_2)$ باید تحت جابه‌جایی ذرات پاد متقارن باشد، چون بخش فضایی آن پاد متقارن است لذا بخش اسپینی آن باید متقارن و یا به‌عبارتی حالت سه‌گانه باشد.

(ب)

تابع موج داده شده متناظر با موردی است که یکی از دو فرمیون در سطح $n=0$ و دیگری در سطح $n=1$ نوسانگر هماهنگ یک بعدی قرار گرفته باشد و بنابراین:

$$E=\varepsilon_0+\varepsilon_1=\hbar w\left(0+\frac{1}{2}\right)+\hbar w\left(1+\frac{1}{2}\right)=2\hbar w$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۸-۱۶

سیستمی متشکل از پنج الکترون غیربرهم‌کنشی (در تقریبی که در آن از برهم‌کنش میان الکترون‌ها چشم‌پوشی می‌شود) که حرکت آنها در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بُعدی به طول $L = ۰/۵\,\text{nm}$ مقید است را درنظر بگیرید.

(آ) انرژی حالت پایه‌ی سیستم را بیابید.

(ب) انرژی اولین حالت برانگیخته سیستم را بیابید.

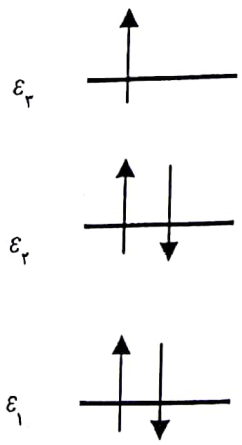
(پ) انرژی تحریک (برانگیختگی) اولین حالت برانگیخته را پیدا کنید.

حل:

برای هر تک ذره، سطح n دارای انرژی $\varepsilon_n = \frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}$ است. طبق اصل طرد پائولی، حداکثر دو الکترون در هر سطح می‌تواند قرار بگیرد، بنابراین:

(آ)

حالت پایه متناظر با موردی است که دو الکترون در سطح $n=۱$، دو تا در سطح $n=۲$ و یکی از آنها در سطح $n=۳$ قرار بگیرد یعنی:



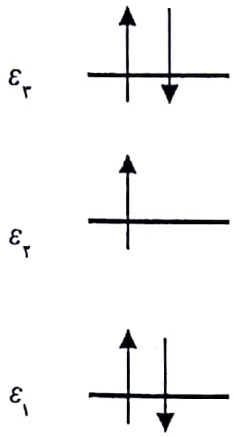
و در نتیجه:

$$E^{(۰)} = ۲\varepsilon_۱ + ۲\varepsilon_۲ + \varepsilon_۳ = ۲\varepsilon_۱ + ۲\left(۴\varepsilon_۱\right) + ۹\varepsilon_۱ = \frac{۱۹\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}$$

(ب)

اولین حالت برانگیخته متناظر با موردی است که در آرایش مربوط به حالت پایه، یکی از الکترون‌های سطح $n=۲$ به سطح $n=۳$ برود:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner



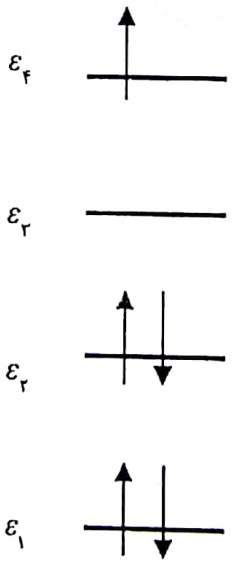
و در نتیجه:

$$E^{(1)} = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 = 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_1 + 2\left(9\varepsilon_1\right) = 24\varepsilon_1 = \frac{24\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

(پ)

دومین حالت برانگیخته مربوط به حالتی است که در آن دو الکترون در $n=1$، دو تا در $n=2$ و یکی در $n=4$ باشد و لذا:

$$E^{(2)} = 26E_1$$



تمرین ۸-۱۷

آرایش‌های الکترون حالت پایه برای اتم‌هایی دارای $z = 40, 53, 70, 82$ الکترون را تعیین کنید.

حل:

طبق رابطه‌ی (۸-۷۲) داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

آرایش حالت پایه

Z					
۴۰	$(1s)^2$	$(2s)^2(2p)^6$	$(3s)^2(3p)^6(3d)^{10}$	$(4s)^2(4p)^6(4d)^2$	$(5s)^2$
۵۳	$(1s)^2$	$(2s)^2(2p)^6$	$(3s)^2(3p)^6(3d)^{10}$	$(4s)^2(4p)^6(4d)^{10}$	$(5s)^2(5p)^5$
۷۰	$(1s)^2$	$(2s)^2(2p)^6$	$(3s)^2(3p)^6(3d)^{10}$	$(4s)^2(4p)^6(4d)^{10}(4f)^{14}$	$(5s)^2(5p)^6(6s)^2$

تمرین ۸-۱۸

مقدارهای ممکن J (یعنی اندازه‌حرکت‌های زاویه‌ای کل) مرتبط با هر کدام از حالت‌های:
$^1H, ^2G, ^4F, ^1P$ را مشخص کنید.

حل:

در مورد ^1P داریم:

$$L = ۱$$

$$S = ۰$$

و در نتیجه:

$$J = |L-S|,\ldots,|L+S| = |۱-۰| = ۱$$

بنابراین حالت‌های ممکن عبارتند از:

$$^1P_۱$$

در مورد ^4F داریم:

$$L = ۳$$

$$S = \frac{۳}{۲}$$

و در نتیجه:

$$J = \left|۳-\frac{۳}{۲}\right|,\ldots,\left|۳+\frac{۳}{۲}\right| = \frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲},\frac{۷}{۲},\frac{۹}{۲}$$

بنابراین حالت‌های ممکن عبارتند از:

$$^4F_{\frac{۳}{۲}}, ^4F_{\frac{۵}{۲}}, ^4F_{\frac{۷}{۲}}, ^4F_{\frac{۹}{۲}}$$

در مورد ^2G داریم:

$$L = ۴$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$S=\frac{۱}{۲}$$

و در نتیجه:

$$J=\left|۴-\frac{۱}{۲}\right|,\ldots,\left|۴+\frac{۱}{۲}\right|=\frac{۷}{۲},\frac{۹}{۲}$$

بنابراین حالت‌های ممکن عبارتند از:

$${}^{۲}G_{\frac{۷}{۲}},\ {}^{۲}G_{\frac{۹}{۲}}$$

در مورد ${}^{۱}H$ داریم:

$$L=۵$$

$$S=۰$$

و در نتیجه:

$$J=۵$$

و حالت‌های ممکن عبارتند از:

$${}^{۱}H_{۵}$$

تمرین ۸-۱۹

نمادگذاری طیف‌سنجی ${}^{۲S+۱}L_J$ (یعنی $\boldsymbol{L}$، $\boldsymbol{S}$ و $\boldsymbol{J}$) را برای آرایش‌های حالت پایه‌ی

(آ) Sc $(Z=۲۱)$ و

(ب) Cu $(Z=۲۹)$ پیدا کنید.

حل:

(آ)

آرایش حالت پایه Sc عبارتست از:

$$[Ar](۴s)^{۲}(۳d)^{۱}$$

هم برای $[Ar]$ و هم برای $(۴s)^{۲}$، L و S هر دو صفر می‌باشد. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای توسط الکترون $۳d$ تعیین می‌شود. چون $S=\frac{۱}{۲}$ و $L=۲$ و چون پوسته $۳d$ کمتر از نیمه، پُر است، طبق قانون سوم هوند اندازه حرکت زاویه‌ای توسط $J=|L-S|=\frac{۳}{۲}$ داده می‌شود و داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$^{۲}D_{\frac{۳}{۲}}$

(ب)

آرایش حالت پایه Cu عبارتست از:

$$[Ar](۳d)^{۱۰}(۴s)^{۱}$$

هم برای $[Ar]$ و هم برای $(۳d)^{۱۰}$، L و S هر دو صفر می‌باشند. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای توسط الکترون $۴s$ تعیین می‌شود. چون $S=\frac{۱}{۲}$ و $L=۰$ بنابراین $J=\frac{۱}{۲}$ و لذا داریم:

$^{۲}S_{\frac{۱}{۲}}$

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

فصل نهم

روش‌های تقریبی برای حالت‌های مانا

تمرین ۹-۱

انرژی حالت برانگیخته‌ی nاُم را برای یک جعبه‌ی پتانسیل یک‌بُعدی به طول $2L$ با دیواره‌هایی در $x=-L$ و $x=L$ تا مرتبه‌ی اول حساب کنید که در کف جعبه با اختلال‌های زیر با $V_0 \ll 1$ مشخص می‌شود:

(آ)
$$V_p(x)=\begin{cases} -V_0 & -L \le x \le L \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

(ب)
$$V_p(x)=\begin{cases} -V_0 & -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2} \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

حل:

از قبل می‌دانیم که سطوح انرژی و ویژه توابع مربوط به هامیلتونی مختل نشده H_0 عبارتند از:

$$E_n^{(0)}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\phi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{۱}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right) & ;\quad n=۱,۳,۵,...\\ \sqrt{\frac{۱}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right) & ;\quad n=۲,۴,۶,...\end{cases}$$

طبق تئوری اختلال غیرتبهگن، انرژی حالت nاُم تا مرتبه‌ی اول عبارتست از:

$$E_n=\frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{۸mL^۲}+E_n^{(۱)}$$

که:

$$E_n^{(۱)}=\langle\phi_n|V_p(x)|\phi_n\rangle$$

پس:

(آ)

$$E_n^{(۱)}=\begin{cases}-V_۰\int_{-L}^{+L}\frac{۱}{L}\cos^۲\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right)dx & ;\quad n=۱,۳,۵,...\\ -V_۰\int_{-L}^{+L}\frac{۱}{L}\sin^۲\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right)dx & ;\quad n=۲,۴,۶,...\end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$E_n^{(۱)}=-V_۰\quad ;\quad n=۱,۳,...$$

(ب)

$$E_n^{(۱)}=\begin{cases}-V_۰\int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}}\frac{۱}{L}\cos^۲\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right)dx & ;\quad n=۱,۳,۵,...\\ -V_۰\int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}}\frac{۱}{L}\sin^۲\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right)dx & ;\quad n=۲,۴,۶,...\end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$E_n^{(۱)}=\begin{cases}۰ & ;\quad n=۲,۴,۶,...\\ -V_۰\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{n\pi}\right) & ;\quad n=۱,۵,۹,...\\ -V_۰\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{n\pi}\right) & ;\quad n=۳,۷,۱۱,...\end{cases}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۹-۲

انرژی حالت برانگیخته‌ی nاُم را برای یک جعبه‌ی پتانسیل یک‌بُعدی به طول $۲L$ با دیواره‌هایی در $x=-L$ و $x=L$ تا مرتبه‌ی اول اختلال محاسبه کنید که در کف جعبه با اختلال‌های زیر با $V_۰ \ll ۱$ مشخص می‌شود:

(آ)
$$V_p(x)=\begin{cases} -V_۰ & -\frac{L}{۲}\le x\le ۰ \\ ۰ & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

(ب)
$$V_p(x)=\begin{cases} V_۰ & ۰\le x\le \frac{L}{۲} \\ ۰ & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

(پ)
$$V_p(x)=\begin{cases} -V_۰ & -\frac{L}{۲}\le x\le ۰ \\ V_۰ & ۰\le x\le \frac{L}{۲} \\ ۰ & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

حل:

سطوح انرژی و ویژه توابع مربوط به هامیلتونی مختل نشده $H_۰$ عبارتند از:

$$E_n^{(۰)}=\frac{\hbar^۲\pi^۲n^۲}{۸mL^۲}$$

$$\phi_n(x)=\begin{cases} \sqrt{\frac{۱}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right) & ;\ n=۱,۳,۵,... \\ \sqrt{\frac{۱}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right) & ;\ n=۲,۴,۶,... \end{cases}$$

طبق تئوری اختلال غیرتبهگن، انرژی حالت nاُم تا مرتبه‌ی اول عبارتست از:

$$E_n=\frac{\hbar^۲\pi^۲n^۲}{۸mL^۲}+E_n^{(۱)}$$

که:

$$E_n^{(۱)}=\langle\phi_n|V_p(x)|\phi_n\rangle$$

پس:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

$$E_n^{(1)} = \begin{cases} -V_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{0} \frac{1}{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx & ; \quad n = 1,3,5,\ldots \\ -V_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{0} \frac{1}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx & ; \quad n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$E_n^{(1)} = \begin{cases} -V_0 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) & ; \quad n = 1,3,5,\ldots \\ -V_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) & ; \quad n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

یا:

$$E_n^{(1)} = \begin{cases} -V_0 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n\pi}\right) & ; \quad n = 1,5,9,\ldots \\ -V_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n\pi}\right) & ; \quad n = 3,7,11,\ldots \\ -\frac{V_0}{4} & ; \quad n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

(ب)

$$E_n^{(1)} = \begin{cases} V_0 \int_{0}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx & ; \quad n = 1,3,5,\ldots \\ V_0 \int_{0}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) & ; \quad n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$E_n^{(1)} = \begin{cases} V_0 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n\pi}\right) & ; \quad n = 1,5,9,\ldots \\ V_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n\pi}\right) & ; \quad n = 3,7,11,\ldots \\ \frac{V_0}{4} & ; \quad n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

(پ)

$$E_n^{(1)} = \begin{cases} -V_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{0} \frac{1}{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx + V_0 \int_{0}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx & ; \quad n = 1,3,5,\ldots \\ -V_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{0} \frac{1}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx + V_0 \int_{0}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx & ; \quad n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

که نتیجه می‌دهد:

$$E_n^{(1)} = \begin{cases} -V_0\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{n\pi}\right)+V_0\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{n\pi}\right) & ; \quad n = 1,5,9,\ldots \\ -V_0\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n\pi}\right)+V_0\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n\pi}\right) & ; \quad n = 3,7,11,\ldots \\ \frac{-V_0}{4}+\frac{V_0}{4} & ; \quad n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

یا:

$$E_n^{(1)} = 0 \qquad ; \quad n = 1,2,3,\ldots$$

این نتیجه از ابتدا نیز قابل پیش‌بینی بود زیرا $\phi_n(x)$ دارای پاریته معینی است و از طرفی $V_p(x)$ نیز تابعی فرد است لذا نتیجه‌ی عبارت:

$$E_n^{(1)} = \langle \phi_n | V_p(x) | \phi_n \rangle$$

باید مقداری برابر صفر باشد.

تمرین ۹-۳

انرژی nاُمین حالت برانگیخته را تا اختلال مرتبه‌ی دوم و تابع موج را تا اختلال مرتبه‌ی اول برای یک جعبه‌ی پتانسیل یک بعدی به طول $2L$ با دیواره‌هایی در $x=-L$ و $x=L$ حساب کنید که در کف جعبه با اختلال‌های زیر با $V_0 \ll 1$ مشخص می‌شود:

(آ)

$$V_p(x) = \begin{cases} 0 & -L \le x \le 0 \\ V_0 & 0 \le x \le L \end{cases}$$

(ب)

$$V_p(x) = \begin{cases} -V_0\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right) & |x| < L \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

حل:

سطوح انرژی و ویژه توابع مربوط به هامیلتونی مختل نشده H_0 عبارتند از:

$$E_n^{(0)} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\phi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{۱}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right) & ; \quad n=۱,۳,۵,\ldots \\ \sqrt{\frac{۱}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right) & ; \quad n=۲,۴,۶,\ldots\end{cases}$$

طبق تئوری اختلال غیرتبهگن، انرژی حالت nاُم تا مرتبه‌ی دوم و ویژه تابع مربوطه‌ی آن تا مرتبه‌ی اول عبارتند از:

$$E_n=\frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{۸mL^۲}+E_n^{(۱)}+E_n^{(۲)} \quad , \quad |\psi_n\rangle=|\phi_n\rangle+|\psi_n^{(۱)}\rangle$$

که:

$$E_n^{(۱)}=\langle\phi_n|V_p(x)|\phi_n\rangle \quad , \quad E_n^{(۲)}=\sum_{m\neq n}\frac{\left|\langle\phi_m|\hat{V}_p|\phi_n\rangle\right|^۲}{E_n^{(۰)}-E_m^{(۰)}}$$

و:

$$|\psi_n^{(۱)}\rangle=\sum_{m\neq n}\frac{\langle\phi_m|\hat{V}_p|\phi_n\rangle}{E_n^{(۰)}-E_m^{(۰)}}|\phi_m\rangle$$

پس:

(آ)

$$E_n^{(۱)}=\begin{cases}V_۰\int_۰^L\frac{۱}{L}\cos^۲\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right) & ; \quad n=۱,۳,۵,\ldots \\ V_۰\int_۰^L\frac{۱}{L}\sin^۲\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right) & ; \quad n=۲,۴,۶,\ldots\end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$E_n^{(۱)}=\frac{V_۰}{۲} \quad ; \quad n=۱,۲,\ldots$$

برای محاسبه‌ی $\langle\phi_m|\hat{V}_p|\phi_n\rangle$ چهار حالت را در نظر می‌گیریم:

۱. n و m هر دو فرد باشند:

$$\langle\phi_m|V_p(x)|\phi_n\rangle=\frac{V_۰}{L}\int_۰^L\cos\left(\frac{m\pi x}{۲L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{۲L}\right)dx$$

$$=\frac{V_۰}{۲L}\int_۰^L\left\{\cos\left[\frac{(m+n)\pi x}{۲L}\right]+\cos\left[\frac{(m-n)\pi x}{۲L}\right]\right\}dx$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{V_0}{2L}\left\{\frac{2L}{(m+n)\pi}\sin\left[\frac{(m+n)\pi x}{2L}\right]\Bigg|_0^L + \frac{+2L}{(m-n)\pi}\sin\left[\frac{(m-n)\pi x}{2L}\right]\Bigg|_0^L\right\}$$

$$= \frac{V_0}{2L}\left\{\frac{2L}{(m+n)\pi}\sin\left[\frac{(m+n)\pi x}{2L}\right] + \frac{+2L}{(m-n)\pi}\sin\left[\frac{(m-n)\pi x}{2L}\right]\right\}$$

چون مجموع و تفاضل m و n عددی زوج است لذا حاصل عبارت اخیر صفر است و داریم:

$$\langle\phi_m|V_p|\phi_n\rangle = 0$$

۲. n و m هر دو زوج باشند:

$$\langle\phi_m|\hat{V}_p|\phi_n\rangle = \frac{V_0}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)dx = \frac{V_0}{2L}\int_0^L\left\{\cos\left[\frac{(m-n)\pi x}{2L}\right] - \cos\left[\frac{(m+n)\pi x}{2L}\right]\right\}dx = 0$$

۳. n فرد و m زوج باشد:

$$\langle\phi_m|\hat{V}_p|\phi_n\rangle = \frac{V_0}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)dx = \frac{V_0}{2L}\int_0^L\left\{\sin\left[\frac{(m+n)\pi x}{2L}\right] + \sin\left[\frac{(m-n)\pi x}{2L}\right]\right\}dx$$

$$= -\frac{V_0}{2L}\left(\frac{2L}{(m+n)\pi}\left[\cos\left(\frac{(m+n)\pi}{2}\right) - 1\right] + \frac{2L}{(m-n)\pi}\left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi}{2}\right) - 1\right]\right)$$

چون مجموع و تفاضل n و m عددی فرد است، لذا:

$$\langle\phi_m|\hat{V}_p|\phi_n\rangle = \frac{-V_0}{2L}\left(\frac{-2L}{(m+n)\pi} + \frac{-2L}{(m-n)\pi}\right) = \frac{2mV_0}{(m^2-n^2)\pi}$$

۴. n زوج و m فرد باشد:

$$\langle\phi_m|\hat{V}_p|\phi_n\rangle = \frac{V_0}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)dx = \frac{2nV_0}{(n^2-m^2)\pi}$$

پس:

$$E_n^{(2)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=even} \dfrac{\left[\dfrac{2mV_0}{(m^2-n^2)\pi}\right]^2}{E_n - E_m} & ; \quad n = 1,3,5,\ldots \\ \sum\limits_{m=odd} \dfrac{\left[\dfrac{2nV_0}{(n^2-m^2)\pi}\right]^2}{E_n - E_m} & ; \quad n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

در نتیجه:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_n^{(2)}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=even}\frac{4l^2V_\cdot^2}{\left(l^2-n^2\right)^2\pi^2\frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}\left(n^2-l^2\right)} & ;\quad n=1,3,5,\ldots\\ \displaystyle\sum_{l=odd}\frac{4n^2V_\cdot^2}{\left(n^2-l^2\right)^2\pi^2\frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}\left(n^2-l^2\right)} & ;\quad n=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

یا:

$$E_n^{(2)}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{128ml^2L^2V_\cdot^2}{\pi^4\hbar^2\left(n^2-4l^2\right)^2} & ;\quad n=1,3,5,\ldots\\ \displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}\frac{32mn^2L^2V_\cdot^2}{\pi^4\hbar^2\left(n^2-(2l-1)^2\right)^2} & ;\quad n=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

و:

$$\left|\psi_n^{(1)}\right\rangle=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=even}\frac{2lV_\cdot\left|\phi_l\right\rangle}{\left(n^2-l^2\right)^2\pi\frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}\left(n^2-l^2\right)} & ;\quad n=1,3,5,\ldots\\ \displaystyle\sum_{l=odd}\frac{2nV_\cdot\left|\phi_l\right\rangle}{\left(n^2-l^2\right)^2\pi\frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}\left(n^2-l^2\right)} & ;\quad n=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

یا:

$$\left\langle x\middle|\psi_n^{(1)}\right\rangle=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=even}\frac{16mlL^2V_\cdot\sqrt{\frac{1}{L}}\sin\left(\frac{l\pi x}{2L}\right)}{\pi^2\hbar^2\left(n^2-l^2\right)^2} & ;\quad n=1,3,5,\ldots\\ \displaystyle\sum_{l=odd}\frac{16mnL^2V_\cdot\sqrt{\frac{1}{L}}\cos\left(\frac{l\pi x}{2L}\right)}{\pi^2\hbar^2\left(n^2-l^2\right)^2} & ;\quad n=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

$$E_n^{(1)}=\begin{cases}-V_0\int_{-L}^{+L}\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)\frac{1}{L}\cos^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)dx & ;\quad n=1,3,5,\ldots\\ -V_0\int_{-L}^{+L}\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)\frac{1}{L}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)dx & ;\quad n=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

محاسبه‌ی انتگرال‌ها نتیجه می‌دهد که:

$$E_n^{(1)}=\begin{cases}-2V_0\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{(n\pi)^2}\right] & ;\quad n=1,3,5,\ldots\\ -2V_0\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{(n\pi)^2}\right] & ;\quad n=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

برای محاسبه‌ی $\langle\phi_m|V_p|\phi_n\rangle$ چهار حالت را در نظر می‌گیریم:

۱. m فرد و n زوج باشد:

$$\langle\phi_m|V_p|\phi_n\rangle=\int_{-L}^{+L}-V_0\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)\frac{1}{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)dx=0$$

علت صفر شدن انتگرال، فرد بودن انتگرالده و متقارن بودن بازه‌ی انتگرال‌گیری است.

۲. m زوج و n فرد باشد:

مشابه مورد اول، $\langle\phi_m|V_p|\phi_n\rangle=0$.

۳. n و m هر دو فرد باشند:

$$\langle\phi_m|V_p|\phi_n\rangle=\int_{-L}^{+L}-V_0\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)\frac{1}{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)dx=\frac{V_0}{L^3}\int_{-L}^{+L}x^2\cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)dx$$

$$=\frac{2V_0}{2L^3}\left[\int_0^L x^2\cos\left[\frac{\pi x}{2L}(m+n)\right]dx+\int_0^L x^2\cos\left[\frac{\pi x}{2L}(m-n)\right]dx\right]$$

$$=\frac{2V_0}{2L^3}\frac{8L^3}{\pi^2}\left[\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{(m+n)^2}+\frac{(-1)^{\frac{m-n}{2}}}{(m-n)^2}\right]=\frac{8V_0}{\pi^2}\left[\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{(m+n)^2}+\frac{(-1)^{\frac{m-n}{2}}}{(m-n)^2}\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

۴. n و m هر دو زوج باشند:

$$\langle \phi_m | V_p | \phi_n \rangle = \int_{-L}^{+L} -V_0 \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) \frac{1}{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx = \frac{V_0}{L^2} \int_{-L}^{+L} x^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx$$

$$= \frac{V_0}{L^2} \left[\int_0^L x^2 \cos\left[\frac{\pi x}{2L}(m-n)\right] dx - \int_0^L x^2 \cos\left[\frac{\pi x}{2L}(m+n)\right] dx \right]$$

$$= \frac{8V_0}{\pi^2} \left[\frac{(-1)^{\frac{m-n}{2}}}{(m-n)^2} - \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{(m+n)^2} \right]$$

پس:

$$E_n^{(2)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{l=odd \\ l \neq n}} \frac{\left(\frac{8V_0}{\pi^2}\right)^2 \left[\frac{(-1)^{\frac{l+n}{2}}}{(l+n)^2} + \frac{(-1)^{\frac{l-n}{2}}}{(l-n)^2} \right]^2}{\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}(n^2 - l^2)} & ; \quad n = 1, 3, 5, \ldots \\ \displaystyle\sum_{\substack{l=even \\ l \neq n}} \frac{\left(\frac{8V_0}{\pi^2}\right)^2 \left[\frac{(-1)^{\frac{l-n}{2}}}{(l-n)^2} - \frac{(-1)^{\frac{l+n}{2}}}{(l+n)^2} \right]^2}{\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}(n^2 - l^2)} & ; \quad n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

یا:

$$E_n^{(2)} = \frac{8192 m V_0^2 L^2 n^2}{\hbar^2 \pi^6} \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{l=odd \\ l \neq n}} \frac{l^2}{(n^2 - l^2)^5} & ; \quad n = 1, 3, 5, \ldots \\ \displaystyle\sum_{\substack{l=even \\ l \neq n}} \frac{l^2}{(n^2 - l^2)^5} & ; \quad n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

و نیز داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\psi_n^{(1)}(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{l=odd\\ l\neq n}}\frac{\frac{8V_0}{\pi^2}\left[\frac{(-1)^{\frac{l+n}{2}}}{(l+n)^2}+\frac{(-1)^{\frac{l-n}{2}}}{(l-n)^2}\right]\sqrt{\frac{1}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)}{\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\left(n^2-l^2\right)} & ;\quad n=1,3,5,\ldots\\ \displaystyle\sum_{\substack{l=even\\ l\neq n}}\frac{\frac{8V_0}{\pi^2}\left[\frac{(-1)^{\frac{l-n}{2}}}{(l-n)^2}-\frac{(-1)^{\frac{l+n}{2}}}{(l+n)^2}\right]\sqrt{\frac{1}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)}{\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}\left(n^2-l^2\right)} & ;\quad n=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

تمرین ۹-۴

سیستمی را در نظر بگیرید که هامیلتونی آن با $\hat{H}=E_0\begin{pmatrix}3 & 2\lambda & 0 & 0\\ 2\lambda & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -7 & \sqrt{2}\lambda\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda & 7\end{pmatrix}$ داده می‌شود و در آن $\lambda\ll 1$.

(آ) ویژه مقادیر دقیق $\hat{H}$ را محاسبه کنید. هر یک از این ویژه مقدارها را تا توان دوم λ بسط دهید.

(ب) ویژه مقدارهای انرژی را تا اختلال مرتبه‌ی دوم حساب کنید و آن‌ها را با نتایج دقیق به‌دست آمده در (آ) مقایسه کنید.

(پ) ویژه حالت‌های $\hat{H}$ را تا تصحیح مرتبه‌ی اول حساب کنید.

حل:

(آ)

ویژه مقادیر $\hat{H}$ را می‌توان از قطری کردن ماتریس مربوطه به‌دست آورد. برای این منظور باید معادله‌ی زیر حل شود:

$$\begin{vmatrix}3E_0-E & 2\lambda E_0 & 0 & 0\\ 2\lambda E_0 & -3E_0-E & 0 & 0\\ 0 & 0 & -7E_0-E & \sqrt{2}\lambda E_0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda E_0 & 7E_0-E\end{vmatrix}=0$$

با تعریف $\varepsilon=\frac{E}{E_0}$ معادله‌ی فوق به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\begin{vmatrix} ۳-\varepsilon & ۲\lambda & ۰ & ۰ \\ ۲\lambda & -۳-\varepsilon & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۷-\varepsilon & \sqrt{۲}\lambda \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲}\lambda & ۷-\varepsilon \end{vmatrix} = ۰$$

از حل این معادله نتیجه می‌شود که:

$$\varepsilon = \pm\sqrt{۴۹+۲\lambda^۲} \quad \text{یا} \quad \varepsilon = \pm\sqrt{۹+۴\lambda^۲}$$

و یا به‌طور معادل:

$$E = \pm E_۰\sqrt{۴۹+۲\lambda^۲} = \pm ۷E_۰\sqrt{۱+\frac{۲\lambda^۲}{۴۹}} \simeq \pm ۷E_۰\left(۱+\frac{\lambda^۲}{۴۹}\right) = \pm ۷E_۰ \pm \frac{\lambda^۲ E_۰}{۷}$$

$$E = \pm E_۰\sqrt{۹+۴\lambda^۲} = \pm ۳E_۰\sqrt{۱+\frac{۴\lambda^۲}{۹}} \simeq \pm ۳E_۰\left(۱+\frac{۲\lambda^۲}{۹}\right) = \pm ۳E_۰ \pm \frac{۲\lambda^۲ E_۰}{۳}$$

(ب)

هامیلتونی $\hat{H}$ را می‌توان به‌صورت $\hat{H} = \hat{H}_۰ + \hat{H}_p$ در نظر گرفت به‌طوری‌که:

$$\hat{H}_۰ = E_۰\begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۷ \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_p = E_۰\begin{pmatrix} ۰ & ۲\lambda & ۰ & ۰ \\ ۲\lambda & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \sqrt{۲}\lambda \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲}\lambda & ۰ \end{pmatrix}$$

ویژه مقادیر $\hat{H}_۰$ عبارتند از:

$$E_۱^{(۰)} = ۳E_۰ \quad , \quad E_۲^{(۰)} = -۳E_۰ \quad , \quad E_۳^{(۰)} = -۷E_۰ \quad , \quad E_۴^{(۰)} = ۷E_۰$$

ویژه بردارهای متناظر با این ویژه مقادیر عبارتند از:

$$|\phi_۱\rangle = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad |\phi_۲\rangle = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad |\phi_۳\rangle = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad |\phi_۴\rangle = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

از تئوری اختلال غیرتبهگن، تصحیحات مرتبه‌ی اول انرژی عبارتست از:

$$E_۱^{(۱)} = \langle\phi_۱|\hat{H}_p|\phi_۱\rangle = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} E_۰\begin{pmatrix} ۰ & ۲\lambda & ۰ & ۰ \\ ۲\lambda & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \sqrt{۲}\lambda \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲}\lambda & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = ۰$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

و به‌همین ترتیب نتیجه می‌شود که:

$$E_2^{(1)} = \langle \phi_2 | \hat{H}_p | \phi_2 \rangle = 0 \quad , \quad E_3^{(1)} = \langle \phi_3 | \hat{H}_p | \phi_3 \rangle = 0 \quad , \quad E_4^{(1)} = \langle \phi_4 | \hat{H}_p | \phi_4 \rangle = 0$$

اما تصحیح مرتبه‌ی دوم عبارتست از:

$$E_1^{(2)} = \sum_{m=2,3,4} \frac{\left|\langle \phi_m | \hat{H}_p | \phi_1 \rangle\right|^2}{E_1^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{\left|\langle \phi_2 | \hat{H}_p | \phi_1 \rangle\right|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} = \frac{\left(2\lambda E_0\right)^2}{3E_0 - \left(-3E_0\right)} = \frac{2}{3}\lambda^2 E_0$$

$$E_2^{(2)} = \sum_{m=1,3,4} \frac{\left|\langle \phi_m | \hat{H}_p | \phi_2 \rangle\right|^2}{E_2^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{\left|\langle \phi_1 | \hat{H}_p | \phi_2 \rangle\right|^2}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} = -\frac{2}{3}\lambda^2 E_0$$

$$E_3^{(2)} = \sum_{m=1,2,4} \frac{\left|\langle \phi_m | \hat{H}_p | \phi_3 \rangle\right|^2}{E_3^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{\left|\langle \phi_4 | \hat{H}_p | \phi_3 \rangle\right|^2}{E_3^{(0)} - E_4^{(0)}} = \frac{\left(\sqrt{2}\lambda E_0\right)^2}{-7E_0 - 7E_0} = -\frac{1}{7}\lambda^2 E_0$$

$$E_4^{(2)} = \sum_{m=1,2,3} \frac{\left|\langle \phi_m | \hat{H}_p | \phi_4 \rangle\right|^2}{E_4^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{\left|\langle \phi_4 | \hat{H}_p | \phi_4 \rangle\right|^2}{E_4^{(0)} - E_3^{(0)}} = \frac{\left(\sqrt{2}\lambda E_0\right)^2}{+7E_0 + 7E_0} = \frac{1}{7}\lambda^2 E_0$$

در محاسبات فوق از روابط زیر سود برده‌ایم:

$$0 = \langle \phi_1 | \hat{H}_p | \phi_4 \rangle = \langle \phi_4 | \hat{H}_p | \phi_4 \rangle = \langle \phi_1 | \hat{H}_p | \phi_4 \rangle = \langle \phi_1 | \hat{H}_p | \phi_4 \rangle = \langle \phi_4 | \hat{H}_p | \phi_4 \rangle = \langle \phi_4 | \hat{H}_p | \phi_4 \rangle$$
$$= \langle \phi_4 | \hat{H}_p | \phi_1 \rangle = \langle \phi_4 | \hat{H}_p | \phi_1 \rangle$$

خواننده می‌تواند با محاسبه‌ای سرراست، درستی این روابط را تحقیق کند.

بنابراین تا تصحیح مرتبه‌ی دوم داریم:

$$E_1 = E_1^{(0)} + E_1^{(1)} + E_1^{(2)} = 3E_0 + \frac{2}{3}\lambda^2 E_0$$

$$E_2 = E_2^{(0)} + E_2^{(0)} + E_2^{(2)} = -3E_0 - \frac{2}{3}\lambda^2 E_0$$

$$E_3 = E_3^{(0)} + E_3^{(1)} + E_3^{(2)} = -7E_0 - \frac{1}{7}\lambda^2 E_0$$

$$E_4 = E_4^{(0)} + E_4^{(1)} + E_4^{(2)} = +7E_0 + \frac{1}{7}\lambda^2 E_0$$

مقایسه نشان می‌دهد که این تقریب‌ها با جواب‌های دقیق همخوانی دارند.

(پ)

از تئوری اختلال غیرتبهگن، تصحیح مرتبه‌ی اول ویژه حالت‌های انرژی عبارتست از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left|\psi_1^{(1)}\right\rangle = \sum_{m=2,3,4} \frac{\langle\phi_m|\hat{H}_p|\phi_1\rangle|\phi_m\rangle}{E_1^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{\langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_1\rangle|\phi_1\rangle}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} = \frac{2\lambda E_0|\phi_1\rangle}{3E_0 + 3E_0} = \frac{1}{3}\lambda|\phi_1\rangle$$

$$\left|\psi_2^{(1)}\right\rangle = \sum_{m=1,3,4} \frac{\langle\phi_m|\hat{H}_p|\phi_2\rangle|\phi_m\rangle}{E_2^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{\langle\phi_2|\hat{H}_p|\phi_1\rangle|\phi_1\rangle}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} = \frac{2\lambda E_0|\phi_1\rangle}{3E_0 - 3E_0} = -\frac{1}{3}\lambda|\phi_1\rangle$$

$$\left|\psi_3^{(1)}\right\rangle = \sum_{m=1,2,4} \frac{\langle\phi_m|\hat{H}_p|\phi_3\rangle|\phi_m\rangle}{E_3^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{\langle\phi_4|\hat{H}_p|\phi_3\rangle|\phi_4\rangle}{E_3^{(0)} - E_4^{(0)}} = \frac{\sqrt{2}\lambda E_0|\phi_4\rangle}{-7E_0 - 7E_0} = -\frac{\sqrt{2}}{14}\lambda|\phi_4\rangle$$

$$\left|\psi_4^{(1)}\right\rangle = \sum_{m=1,2,3} \frac{\langle\phi_m|\hat{H}_p|\phi_4\rangle|\phi_m\rangle}{E_4^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{\langle\phi_3|\hat{H}_p|\phi_4\rangle|\phi_3\rangle}{E_4^{(0)} - E_3^{(0)}} = \frac{\sqrt{2}\lambda E_0|\phi_3\rangle}{7E_0 + 7E_0} = \frac{\sqrt{2}}{14}\lambda|\phi_3\rangle$$

پس تا تصحیح مرتبه‌ی اول داریم:

$$|\psi_1\rangle = |\phi_1\rangle + \left|\psi_1^{(1)}\right\rangle = |\phi_1\rangle + \frac{1}{3}\lambda|\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_2\rangle = |\phi_2\rangle + \left|\psi_2^{(1)}\right\rangle = |\phi_2\rangle - \frac{1}{3}\lambda|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_3\rangle = |\phi_3\rangle + \left|\psi_3^{(1)}\right\rangle = |\phi_3\rangle - \frac{\sqrt{2}}{14}\lambda|\phi_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{-\sqrt{2}\lambda}{14} \end{pmatrix}$$

$$|\psi_4\rangle = |\phi_4\rangle + \left|\psi_4^{(1)}\right\rangle = |\phi_4\rangle + \frac{\sqrt{2}}{14}\lambda|\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}\lambda}{14} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۹-۵

ذره‌ای به جرم m را درنظر بگیرید که در پتانسیل سه‌بعدی $V(r)=kr$ حرکت می‌کند و در آن k ثابتی دارای ابعاد نیرو است. با استفاده از روش وردشی انرژی حالت پایه‌ی آن را تخمین بزنید. می‌توانید $R(r)=e^{-r^2/2\alpha^2}$ را به عنوان تابع شعاعی آزمونی که در آن α یک پارامتر قابل‌تنظیم است درنظر بگیرید.

حل:

ابتدا $R(r)$ را بهنجار می‌کنیم. برای این منظور تعریف می‌کنیم:

$$\psi_0(r)=N\,R(r)$$

که N ثابت بهنجارش است که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$1=\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_0^2(r)\,r^2 dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

و یا:

$$1=4\pi N^2\int_0^{+\infty}e^{\frac{-r^2}{\alpha^2}}r^2\,dr$$

که نتیجه می‌دهد:

$$N=\alpha^{\frac{-3}{2}}\pi^{\frac{-3}{4}}$$

در رسیدن به این رابطه از تساوی زیر بهره برده‌ایم:

$$\int_0^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}dr=\frac{1}{4}\alpha^3\sqrt{\pi}$$

که اثبات آن به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

بنابراین انرژی حالت پایه توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$E_0^{VM}=\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle$$

پس:

$$E_0^{VM}=\langle\psi_0|-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+kr|\psi_0\rangle=\frac{\hbar^2}{2m}\int\left(\vec{\nabla}\psi_0^*(r)\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\psi(r)\right)d^3r+k\langle\psi_0|r|\psi_0\rangle$$

اما:

$$\langle\psi_0|r|\psi_0\rangle=\alpha^{-3}\pi^{\frac{-3}{2}}(4\pi)\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}r^3dr=4\pi^{\frac{-1}{2}}\alpha^{-3}\frac{\alpha^4}{2}=2\alpha\pi^{-\frac{1}{2}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\vec{\nabla}\psi_{\cdot}^{*}(r)=\vec{\nabla}\psi(r)=\frac{d\psi_{\cdot}(r)}{dr}\hat{r}=\alpha^{\frac{-۳}{۲}}\pi^{\frac{-۳}{۴}}\left(\frac{-۲r}{۲\alpha^{۲}}\right)e^{\frac{-r^{۲}}{۲\alpha^{۲}}}\hat{r}=-\alpha^{-\frac{۷}{۲}}\pi^{\frac{-۳}{۴}}re^{\frac{-r^{۲}}{۲\alpha^{۲}}}\hat{r}$$

در نتیجه:

$$E_{\cdot}^{VM}(\alpha)=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\left(\alpha^{-۷}\pi^{\frac{-۳}{۲}}\right)۴\pi\int_{\cdot}^{+\infty}e^{\frac{-r^{۲}}{\alpha^{۲}}}r^{۴}dr+۲\alpha k\pi^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$=\frac{۲\hbar^{۲}}{m}\alpha^{-۷}\pi^{-\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۳}{۸}\pi^{\frac{۱}{۲}}\alpha^{۵}\right)+۲\alpha k\pi^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۳\hbar^{۲}}{۴m\alpha^{۲}}+\frac{۲\alpha k}{\sqrt{\pi}}$$

در رسیدن به نتیجه‌ی اخیر از روابط زیر در انجام محاسبات سود برده‌ایم:

$$\int_{\cdot}^{+\infty}e^{-\frac{r^{۲}}{\alpha^{۲}}}r^{۳}dr=\frac{\alpha^{۴}}{۲}\ ,\ \int_{\cdot}^{+\infty}e^{-\frac{r^{۲}}{\alpha^{۲}}}r^{۴}dr=\frac{۳}{۸}\pi^{\frac{۱}{۲}}\alpha^{۵}$$

خواننده می‌تواند درستی این روابط را تحقیق کند.

با فرض اینکه $E_{\cdot}^{VM}(\alpha)$ کمینه‌ی مقدار خود را در $\alpha_{\cdot}$ دارد، داریم:

$$\left.\frac{\partial E_{\cdot}^{VM}(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{\cdot}}=-\frac{۶\hbar^{۲}}{۴m\alpha_{\cdot}^{۳}}+\frac{۲k}{\sqrt{\pi}}=۰$$

که نتیجه می‌شود:

$$\alpha_{\cdot}^{۲}=\frac{۳\hbar^{۲}\sqrt{\pi}}{۴mk}$$

در نتیجه:

$$E_{\cdot}^{VM}(\alpha_{\cdot})=\frac{۳\hbar^{۲}}{۴m}\left(\frac{۴mk}{۳\hbar^{۲}\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{۲}{۳}}+\frac{۲k}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{۳\hbar^{۲}\sqrt{\pi}}{۴mk}\right)^{\frac{۱}{۳}}=۳\left(\frac{۳}{۴}\right)^{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{\hbar^{۲}k^{۲}}{m\pi}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

تمرین ۹-۶

با استفاده از روش WKB انرژی حالت پایه‌ی ذره‌ای به جرم m را تخمین بزنید که در یک پتانسیل سه‌بُعدی $V(r)=kr$ حرکت می‌کند و در آن k ثابتی دارای ابعاد نیرو است.

حل:

ذره، تحت پتانسیل $V(r)=kr$ حرکت می‌کند و بنابراین می‌توان فرض کرد که بین دو دیواره‌ی سخت در $r=۰$ و $r=a$ حرکت می‌کند به‌طوری‌که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E = V(a) = ka$$

و یا:

$$a = \frac{E}{k}$$

و در نتیجه:

$$\int_0^a \sqrt{2m(E-kr)}\,dr = n\pi\hbar \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

یعنی:

$$n\pi\hbar = \frac{-1}{3mk}\left[(2m(E-kr))^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{-1}{3mk}\left\{\left[2m(E-ka)\right]^{\frac{3}{2}} - (2mE)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{+1}{3mk}(2mE)^{\frac{3}{2}}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$E_n = \frac{(3mkn\pi\hbar)^{\frac{2}{3}}}{2m} = \frac{1}{2}\left(\frac{3kn\pi\hbar}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

تمرین ۹-۷

هامیلتونی نوسانگر هماهنگ دوبعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{X}^2 + \hat{Y}^2\right)\left(1 + \lambda\hat{X}\hat{Y}\right)$$

که در آن $\lambda \ll 1$.

(آ) توابع موج را برای سه تراز اول انرژی که در آن $\lambda = 0$ به‌دست آورید.

(ب) با استفاده از نظریه‌ی اختلال تصحیح‌های مرتبه‌ی اول این ترازهای انرژی را هنگامی که $\lambda \neq 0$ تعیین کنید.

حل:

(آ)

با روش جداسازی متغیرها نتیجه می‌شود که:

$$\phi_{n_x n_y}(x,y) = \phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y) \;,\; E_{n_x n_y} = \hbar w(n_x + n_y + 1)$$

که در این رابطه $\phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)$ ویژه تابع حالت n_xاُم ذره وقتی که تحت تأثیر پتانسیل یک بعدی $\frac{1}{2}mw^2\hat{X}^2$ است، می‌باشد.

بنابراین حالت پایه فاقد تبهگنی و ویژه تابع آن $\phi_{00}(x,y)$ است. اولین حالت برانگیخته دارای تبهگنی

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

دوگانه و ویژه توابع آن $\phi_{۰}(x,y)$ و $\phi_{۱}(x,y)$ می‌باشند. دومین حالت برانگیخته دارای تبهگنی سه‌گانه و ویژه توابع آن $\phi_{۰}(x,y)$، $\phi_{۲}(x,y)$ و $\phi_{۱۱}(x,y)$ می‌باشند.

(ب)

حالت پایه فاقد تبهگنی و تصحیح مرتبه‌ی اول آن عبارتست از:

$$E^{(۱)}_{۰۰}=\langle\phi_{۰۰}|\hat{H}_p|\phi_{۰۰}\rangle$$

که:

$$\hat{H}_p=\frac{\lambda}{۲}m w^{۲}\left(\hat{X}^{۲}+\hat{Y}^{۲}\right)\hat{X}\hat{Y}=\frac{\lambda}{۲}m w^{۲}\left(\hat{X}^{۳}\hat{Y}+\hat{X}\hat{Y}^{۳}\right)$$

پس:

$$E^{(۱)}_{۰۰}=\langle\phi_{۰۰}|\frac{\lambda}{۲}mw^{۲}\left(\hat{X}^{۳}\hat{Y}+\hat{X}\hat{Y}^{۳}\right)|\phi_{۰۰}\rangle=\frac{\lambda}{۲}mw^{۲}\left[\langle\phi_{۰}|\hat{X}^{۳}|\phi_{۰}\rangle\langle\phi_{۰}|\hat{Y}|\phi_{۰}\rangle+\langle\phi_{۰}|\hat{X}|\phi_{۰}\rangle\langle\phi_{۰}|\hat{Y}^{۳}|\phi_{۰}\rangle\right]=۰$$

علت صفر شدن عبارت فوق نیز آن است که $\phi_{۰}$ تحت پاریته، زوج است اما x، y، $x^{۳}$ و $y^{۳}$ تحت پاریته، فرد هستند. حالت برانگیخته‌ی اول تبهگنی دوگانه دارد. چون $\phi_{۱۰}$ و $\phi_{۰۱}$ ویژه حالت‌های مربوط به اولین حالت برانگیخته هستند لذا تصحیح مرتبه‌ی اول انرژی مربوط به اولین حالت برانگیخته در واقع ویژه مقادیر مربوط به ماتریس زیر است:

$$V_p=\begin{pmatrix}\langle\phi_{۱۰}|V_p|\phi_{۱۰}\rangle & \langle\phi_{۱۰}|V_p|\phi_{۰۱}\rangle\\ \langle\phi_{۰۱}|V_p|\phi_{۱۰}\rangle & \langle\phi_{۰۱}|V_p|\phi_{۰۱}\rangle\end{pmatrix}$$

حال به محاسبه‌ی عناصر این ماتریس می‌پردازیم:

$$\langle\phi_{۱۰}|V_p|\phi_{۱۰}\rangle=\langle\phi_{۱۰}|\frac{\lambda}{۲}m w^{۲}\left(\hat{X}^{۳}\hat{Y}+\hat{X}\hat{Y}^{۳}\right)|\phi_{۱۰}\rangle$$

$$=\frac{\lambda}{۲}mw^{۲}\left(\langle\phi_{۱}|\hat{X}^{۳}|\phi_{۱}\rangle\langle\phi_{۰}|\hat{Y}|\phi_{۰}\rangle+\langle\phi_{۱}|\hat{X}|\phi_{۱}\rangle\langle\phi_{۰}|\hat{Y}^{۳}|\phi_{۰}\rangle\right)=۰$$

به‌همین ترتیب:

$$\langle\phi_{۰۱}|V_p|\phi_{۰۱}\rangle=۰$$

علت صفر شدن این دو عنصر، لحاظ کردن پاریته است.

و:

$$\langle\phi_{۱۰}|V_p|\phi_{۰۱}\rangle=\langle\phi_{۱۰}|\frac{\lambda}{۲}mw^{۲}\left(\hat{X}^{۳}\hat{Y}+\hat{X}\hat{Y}^{۳}\right)|\phi_{۰۱}\rangle$$

$$=\frac{\lambda}{۲}m w^{۲}\left[\langle\phi_{۱}|\hat{X}^{۳}|\phi_{۰}\rangle\langle\phi_{۰}|\hat{Y}|\phi_{۱}\rangle+\langle\phi_{۱}|\hat{X}|\phi_{۰}\rangle\langle\phi_{۰}|\hat{Y}^{۳}|\phi_{۱}\rangle\right]$$

اما:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{X}|n\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\left(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}\right)|n\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\left(\sqrt{n}\,|n-۱\rangle+\sqrt{n+۱}\,|n+۱\rangle\right)$$

$$\hat{X}^{۲}|m\rangle=\frac{\hbar}{۲mw}\left(\hat{a}^{۲}+\hat{a}^{\dagger^{۲}}+۲\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+۱\right)|m\rangle$$

$$=\frac{\hbar}{۲mw}\left(\sqrt{m}\sqrt{m-۱}\,|m-۲\rangle+\sqrt{m+۱}\sqrt{m+۲}\,|m+۲\rangle+\left(۲m+۱\right)|m\rangle\right)$$

پس:

$$\langle m|\hat{X}|n\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\left(\sqrt{n}\,\delta_{m,n-۱}+\sqrt{n+۱}\,\delta_{m,n+۱}\right)=\langle m|\hat{Y}|n\rangle$$

$$\langle m|\hat{X}^{۳}|n\rangle=\langle m|\hat{X}^{۲}|\hat{X}|n\rangle=\langle m|\hat{Y}^{۳}|n\rangle$$

$$=\frac{\hbar}{۲mw}\left(\sqrt{m}\sqrt{m-۱}\,\langle m-۲|+\sqrt{m+۱}\sqrt{m+۲}\,\langle m+۲|+\left(۲m+۱\right)\langle m|\right)$$

$$\times\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\left(\sqrt{n}\,|n-۱\rangle+\sqrt{n+۱}\,|n+۱\rangle\right)=\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^{\frac{۳}{۲}}\left(\sqrt{m}\sqrt{n}\sqrt{n-۱}\delta_{m-۲,n-۱}\right.$$

$$+\sqrt{m}\sqrt{m-۱}\sqrt{n+۱}\delta_{m-۲,n+۱}+\sqrt{m+۱}\sqrt{m+۲}\sqrt{n}\delta_{m+۲,n-۱}$$

$$\left.+\sqrt{m+۱}\sqrt{m+۲}\sqrt{n+۱}\delta_{m+۲,n+۱}+\left(۲m+۱\right)\sqrt{n}\delta_{m,n-۱}+\left(۲m+۱\right)\sqrt{n+۱}\delta_{m,n+۱}\right)$$

در نتیجه:

$$\langle\phi_{۱۰}|V_p|\phi_{۰۱}\rangle=\langle\phi_{۰۱}|V_p|\phi_{۱۰}\rangle=۳\lambda mw^{۲}\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^{\frac{۳}{۲}}\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۳\lambda mw^{۲}\hbar^{۲}}{۴m^{۲}w^{۲}}=\frac{۳}{۴}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m}$$

پس:

$$V_p=\begin{pmatrix}۰ & \frac{۳}{۴}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m}\\ \frac{۳}{۴}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m} & ۰\end{pmatrix}$$

از قطری کردن این ماتریس نتیجه می‌شود که سطح انرژی مربوط به اولین حالت برانگیخته (با انرژی $E_{fe}=\hbar w$) تا مرتبه‌ی اول اختلال به دو سطح $\hbar w\pm\frac{۳}{۴}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m}$ گسسته می‌شود که ویژه حالت‌های مربوط به آنها تا مرتبه‌ی صفرم $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\phi_{۱۰}\pm\phi_{۰۱}\right)$ می‌باشند.

حالت برانگیخته‌ی دوم، تبهگنی سه‌گانه دارد. چون $\phi_{۰۲}$، $\phi_{۱۱}$ و $\phi_{۲۰}$ ویژه حالت‌های مربوط به دومین

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حالت برانگیخته (با انرژی $E_{se}=۳\hbar w$) هستند لذا تصحیح مرتبه‌ی اول انرژی مربوط به دومین حالت برانگیخته در واقع ویژه مقادیر مربوط به ماتریس زیر است:

$$V_p=\begin{pmatrix}\langle\phi_{۰۲}|V_p|\phi_{۰۲}\rangle & \langle\phi_{۰۲}|V_p|\phi_{۱۱}\rangle & \langle\phi_{۰۲}|V_p|\phi_{۲۰}\rangle\\ \langle\phi_{۱۱}|V_p|\phi_{۰۲}\rangle & \langle\phi_{۱۱}|V_p|\phi_{۱۱}\rangle & \langle\phi_{۱۱}|V_p|\phi_{۲۰}\rangle\\ \langle\phi_{۲۰}|V_p|\phi_{۰۲}\rangle & \langle\phi_{۲۰}|V_p|\phi_{۱۱}\rangle & \langle\phi_{۲۰}|V_p|\phi_{۲۰}\rangle\end{pmatrix}$$

حال به محاسبه‌ی عناصر این ماتریس می‌پردازیم:

$$\langle\phi_{۰۲}|V_p|\phi_{۰۲}\rangle=\frac{\lambda}{۲}mw^{۲}\left[\langle\phi_{۰}|\hat{X}^{۳}|\phi_{۰}\rangle\langle\phi_{۲}|\hat{Y}|\phi_{۲}\rangle+\langle\phi_{۰}|\hat{X}|\phi_{۰}\rangle\langle\phi_{۲}|\hat{Y}^{۳}|\phi_{۲}\rangle\right]=۰$$

به همین ترتیب دو عنصر دیگر روی قطر اصلی نیز صفر می‌شوند.

$$\langle\phi_{۰۲}|V_p|\phi_{۱۱}\rangle=\langle\phi_{۱۱}|V_p|\phi_{۰۲}\rangle=\frac{\lambda}{۲}mw^{۲}\left[\langle\phi_{۰}|\hat{X}^{۳}|\phi_{۱}\rangle\langle\phi_{۲}|\hat{Y}|\phi_{۱}\rangle+\langle\phi_{۰}|\hat{X}|\phi_{۱}\rangle\langle\phi_{۲}|\hat{Y}^{۳}|\phi_{۱}\rangle\right]$$

$$=\frac{\lambda}{۲}mw^{۲}\left[\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^{\frac{۳}{۲}}(۲+۱)\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۲}+\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^{\frac{۳}{۲}}\left(\sqrt{۲}+۵\sqrt{۲}\right)\right]$$

$$=\frac{\lambda}{۲}mw^{۲}\frac{\hbar^{۲}\left(۹\sqrt{۲}\right)}{۴m^{۲}w^{۲}}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۸}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m}$$

بنا به ملاحظات مربوط به پاریته، دو عنصر $\langle\phi_{۰}|V_p|\phi_{۰۲}\rangle$ و $\langle\phi_{۰۲}|V_p|\phi_{۰}\rangle$ نیز صفر می‌شوند.

$$\langle\phi_{۱۱}|V_p|\phi_{۲۰}\rangle=\langle\phi_{۲۰}|V_p|\phi_{۱۱}\rangle=\frac{\lambda}{۲}mw^{۲}\left[\langle\phi_{۱}|\hat{X}^{۳}|\phi_{۲}\rangle\langle\phi_{۱}|\hat{Y}|\phi_{۰}\rangle+\langle\phi_{۱}|\hat{X}|\phi_{۲}\rangle\langle\phi_{۱}|\hat{Y}^{۳}|\phi_{۰}\rangle\right]$$

$$=\frac{\lambda}{۲}mw^{۲}\left[\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^{۲}\left(۳\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}\right)(۱)+\left[\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^{۲}\sqrt{۲}(۳)\right]\right]=\frac{۹\sqrt{۲}}{۸}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m}$$

پس:

$$V_p=\begin{pmatrix}۰ & \frac{۹\sqrt{۲}}{۸}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m} & ۰\\ \frac{۹\sqrt{۲}}{۸}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m} & ۰ & \frac{۹\sqrt{۲}}{۸}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m}\\ ۰ & \frac{۹\sqrt{۲}}{۸}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m} & ۰\end{pmatrix}$$

از قطری کردن این ماتریس نتیجه می‌شود که سطح انرژی مربوط به دومین حالت برانگیخته (با انرژی $E_{se}=۲\hbar w$) تا مرتبه‌ی اول اختلال به سه سطح $۲\hbar w$ و $\pm\frac{۹}{۴}\frac{\lambda\hbar^{۲}}{m}$ گسسته می‌شود که ویژه حالت‌های مربوط به آنها تا مرتبه‌ی صفرم عبارت از $\frac{\phi_{۰۲}-\phi_{۲۰}}{\sqrt{۲}}$ و $\frac{\phi_{۰۲}\pm\sqrt{۲}\phi_{۱۱}+\phi_{۲۰}}{۲}$ می‌باشند.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۹-۸

ذره‌ای را درنظر بگیرید که دارای هامیلتونی $\hat{H}=\hat{H}_{\circ}+\lambda\hbar\omega\left(\hat{a}^{\dagger}+\hat{a}^{\dagger\dagger}\right)$ است که در آن $\hat{H}_{\circ}$ هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی ساده است و $\hat{a}$ و $\hat{a}^{\dagger}$ عملگرهای فنا و خلق معمولی هستند که از رابطه‌ی $\left[\hat{a}\ ,\ \hat{a}^{\dagger}\right]=1$ پیروی می‌کنند. λ یک عدد حقیقی بسیار کوچک است.

(آ) انرژی حالت پایه را تا مرتبه‌ی دوم λ حساب کنید.

(ب) انرژی حالت برانگیخته‌ی nاُم، E_n را تا مرتبه‌ی دوم λ و ویژه حالت $|\Psi_n\rangle$ را تا مرتبه‌ی اول λ بیابید.

حل:

در اینجا $|\phi_n\rangle$ها همان ویژه حالت‌های نوسانگر هماهنگ یک بعدی هستند و:

$$E_n^{(\circ)}=\hbar w\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

با توجه به این توضیحات کار را ادامه می‌دهیم:

در اینجا هامیلتونی اختلال عبارتست از:

$$\hat{H}_p=\lambda\hbar w\left(\hat{a}^{2}+\hat{a}^{\dagger 2}\right)$$

پس:

$$\langle\phi_m|\hat{H}_p|\phi_n\rangle=\lambda\hbar w\left(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\,\delta_{m,n-2}+\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\delta_{m,n+2}\right)$$

(آ)

با استفاده از نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن داریم:

$$E_{\circ}^{(1)}=\langle\phi_{\circ}|\hat{H}_p|\phi_{\circ}\rangle=\circ$$

$$E_{\circ}^{(2)}=\sum_{m\neq\circ}\frac{\left|\langle\phi_m|H_p|\phi_{\circ}\rangle\right|^2}{E_{\circ}^{(\circ)}-E_m^{(\circ)}}=\frac{\left|\langle\phi_2|H_p|\phi_{\circ}\rangle\right|^2}{E_{\circ}^{(\circ)}-E_2^{(\circ)}}=\frac{\left(\lambda\hbar w\sqrt{2}\right)^2}{-2\hbar w}=\frac{2\lambda^2\hbar^2w^2}{-2\hbar w}=-\lambda^2\hbar w$$

پس تا مرتبه‌ی دوم λ داریم:

$$E_{\circ}=E_{\circ}^{(\circ)}+E_{\circ}^{(1)}+E_{\circ}^{(2)}=\frac{\hbar w}{2}+\circ-\lambda^2\hbar w=\frac{\hbar w}{2}\left(1-2\lambda^2\right)$$

(ب)

با استفاده از نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن داریم:

$$E_n^{(1)}=\langle\phi_n|\hat{H}_p|\phi_n\rangle=\circ$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_n^{(۲)} = \sum_{m\neq n} \frac{\left|\langle \phi_m | H_p | \phi_n \rangle\right|^۲}{E_n^{(۰)} - E_m^{(۰)}} = \frac{\left|\langle \phi_{n-۲} | H_p | \phi_n \rangle\right|^۲}{E_n^{(۰)} - E_{n-۲}^{(۰)}} + \frac{\left|\langle \phi_{n+۲} | H_p | \phi_n \rangle\right|^۲}{E_n^{(۰)} - E_{n+۲}^{(۰)}}$$

$$= \frac{\left(\lambda\hbar w\sqrt{n}\sqrt{n-۱}\right)^۲}{۲\hbar w} + \frac{\left(\lambda\hbar w\sqrt{n+۱}\sqrt{n+۲}\right)^۲}{-۲\hbar w} = \frac{\lambda^۲\hbar w n(n-۱)}{۲} - \frac{\lambda^۲\hbar w(n+۱)(n+۲)}{۲}$$

$$= \frac{\lambda^۲\hbar w}{۲}\left(n^۲ - n - n^۲ - ۳n - ۲\right) = -\lambda^۲\hbar w(۲n+۱)$$

پس تا مرتبه‌ی دوم λ داریم:

$$E_n = E_n^{(۰)} + E_n^{(۱)} + E_n^{(۲)} = \hbar w\left(n+\frac{۱}{۲}\right) + ۰ - \lambda^۲\hbar w(۲n+۱) = \hbar w\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\left(۱-۲\lambda^۲\right)$$

اما ویژه توابع تصحیح شده تا مرتبه‌ی اول λ عبارتند از:

$$|\psi_n\rangle = |\phi_n\rangle + |\psi_n^{(۱)}\rangle$$

به‌طوری‌که:

$$|\psi_n^{(۱)}\rangle = \sum_{m\neq n} \frac{\langle \phi_m | \hat{H}_p | \phi_n \rangle}{E_n^{(۰)} - E_m^{(۰)}} |\phi_m\rangle$$

پس:

$$|\psi_n^{(۱)}\rangle = \frac{\langle \phi_{n-۲} | H_p | \phi_n \rangle}{E_n^{(۰)} - E_{n-۲}^{(۰)}} |\phi_{n-۲}\rangle + \frac{\langle \phi_{n+۲} | H_p | \phi_n \rangle}{E_n^{(۰)} - E_{n+۲}^{(۰)}} |\phi_{n+۲}\rangle$$

$$= \frac{\lambda\hbar w\sqrt{n}\sqrt{n-۱}|\phi_{n-۲}\rangle}{۲\hbar w} + \frac{\lambda\hbar w\sqrt{n+۱}\sqrt{n+۲}|\phi_{n+۲}\rangle}{-۲\hbar w}$$

$$= \frac{\lambda}{۲}\left(\sqrt{n}\sqrt{n-۱}|\phi_{n-۲}\rangle - \sqrt{n+۱}\sqrt{n+۲}|\phi_{n+۲}\rangle\right)$$

تمرین ۹-۹

دو ذره‌ی یکسان با اسپین $\frac{۱}{۲}$ را درنظر بگیرید که در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی همسانگرد و با بسامد ω محدود هستند.

(آ) انرژی حالت پایه و تابع موج متناظر سیستم را وقتی که دو ذره برهم‌کنش ندارند بیابید.

(ب) اکنون فرض کنید که یک پتانسیل وابسته با جاذبه‌ی ضعیف میان دو ذره وجود دارد، $V(r_۱,r_۲) = -kr_۱r_۲ - \lambda\hat{S}_{۱z}\hat{S}_{۲z}$ که در آن k و λ دو عدد حقیقی مثبت کوچک هستند. حالت پایه را

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تا اختلال مستقل از زمان مرتبه‌ی اول بیابید.

(پ) با استفاده از روش وردشی انرژی حالت پایه‌ی این سیستم دو ذره‌ای غیربرهم‌کنشی اسپین $\frac{۱}{۲}$ را تخمین بزنید که در یک نوسانگر هماهنگ سه بعدی همسانگرد محدود شده‌اند. چگونه نتایج شما با نتایج به‌دست‌آمده در (آ) مقایسه می‌شود؟

حل:

(آ)

بنا به اصل طرد پائولی، ویژه تابع مربوط به حالت پایه‌ی این سیستم عبارتست از:

$$\phi_{۰}\left(\vec{r}_{۱},\vec{r}_{۲},\vec{S}_{۱},\vec{S}_{۲}\right)=\psi_{...}\left(r_{۱},\theta_{۱},\varphi_{۱}\right)\psi_{...}\left(r_{۲},\theta_{۲},\varphi_{۲}\right)\chi_{\text{منفرد}}$$

که $\psi_{...}\left(r,\theta,\varphi\right)$ ویژه تابع حالت پایه‌ی تک ذره‌ای است که تحت تأثیر پتانسیل نوسانگر هماهنگ کروی قرار دارد که با رابطه‌ی (۶-۱۰۳) داده می‌شود و انرژی آن نیز از رابطه‌ی (۶-۱۰۰) به‌دست می‌آید و $\chi_{\text{منفرد}}$ نیز حالت اسپینی یگانه است که:

$$\chi_{\text{منفرد}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left[\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle_{۱}\left|\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\right\rangle_{۲}-\left|\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle_{۱}\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle_{۲}\right]$$

با توجه به این توضیحات انرژی حالت پایه‌ی این سیستم دو ذره‌ای عبارتست از:

$$E_{۰}^{(۰)}=\hbar w\left(۰+\frac{۳}{۲}\right)+\hbar w\left(۰+\frac{۳}{۲}\right)=۳\hbar w$$

(ب)

بنا به نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن داریم:

$$E_{۰}^{(۱)}=\left\langle\phi_{۰}\middle|V\left(r_{۱},r_{۲}\right)\middle|\phi_{۰}\right\rangle$$

پس:

$$E_{۰}^{(۱)}=-k\langle\psi_{...}|r|\psi_{...}\rangle\langle\psi_{...}|r|\psi_{...}\rangle-\lambda\langle\phi_{۰}|\hat{S}_{۱z}\hat{S}_{۲z}|\phi_{۰}\rangle$$

اما:

$$\langle\phi_{۰}|\hat{S}_{۱z}\hat{S}_{۲z}|\phi_{۰}\rangle=-\frac{\hbar^{۲}}{۴}\langle\phi_{۰}|\phi_{۰}\rangle=-\frac{\hbar^{۲}}{۴}$$

زیرا:

$$\hat{S}_{۱z}\hat{S}_{۲z}\left|\chi_{\text{منفرد}}\right\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left[S_{۱z}\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle_{۱}S_{۲z}\left|\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle_{۲}-S_{۱z}\left|\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right\rangle_{۱}S_{۲z}\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle_{۲}\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\hbar}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_1\left(\frac{-\hbar}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle - \frac{-\hbar}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle_1 \frac{\hbar}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_2\right]\right.$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle_2 - \left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_2\right] = -\frac{\hbar^2}{4}\chi_{\text{منفرد}}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۶-۱۰۳) نیز داریم:

$$\langle\psi_{...}|r|\psi_{...}\rangle = \left[\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\left(\frac{mw}{\hbar}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^2 \int_0^\infty e^{\frac{-mwr^2}{\hbar}} r^3 dr = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{mw}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\left(\frac{mw}{\hbar}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\hbar}{mw}\right)^{\frac{1}{2}}$$

در نتیجه:

$$E_0^{(1)} = -k\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\hbar}{mw}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \frac{\lambda\hbar^2}{4} = -\frac{4k\hbar}{\pi mw} + \frac{\lambda\hbar^2}{4}$$

(پ)

برای این منظور (استفاده از روش وردشی) از تابع آزمون یگانه $\psi\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{S}_1,\vec{S}_2\right) = Ae^{-\alpha(r_1+r_2)}\chi$ استفاده می‌کنیم و مقدار چشمداشتی عملگر هامیلتونی $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2 + \frac{1}{2}mw^2r_1^2 + \frac{1}{2}mw^2r_2^2$ را با استفاده از ψ می‌یابیم. پیش از ادامه‌ی کار ابتدا ψ را بهنجار می‌کنیم:

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = |A|^2\left(4\pi\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha r_1} r_1^2 dr_1\right)\left(4\pi\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha r_2} r_2^2 dr_2\right) = |A|^2\frac{4\pi}{4\alpha^3}\frac{4\pi}{4\alpha^3} = \frac{|A|^2\pi^2}{\left(\alpha^3\right)^2}$$

پس:

$$|A|^2 = \left(\frac{\alpha^3}{\pi}\right)^2 = \frac{\alpha^6}{\pi^2}$$

لذا:

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = 2|A|^2\int_W e^{-2\alpha r_2}dv_2\int_W e^{-\alpha r_1}\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_1^2 + \frac{1}{2}mw^2r_1^2\right)e^{-\alpha r_1}dv_1$$

$$= \frac{2\alpha^6}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{\alpha^3}\left[\left(\frac{1}{2}mw^2\right)\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha r_1} 4\pi r_1^4 dr_1 + \frac{\hbar^2}{2m}\int\vec{\nabla}_1\left[e^{-\alpha r_1}\right]^*\cdot\vec{\nabla}\left(e^{-\alpha r_1}\right)dv_1\right]\right.$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{2\alpha^3}{\pi}\left(\frac{1}{2}mw^2\frac{4\pi\times 3}{\alpha^5}+\frac{\hbar^2\alpha^2\times 4\pi}{2m}\int_0^{+\infty}e^{-2\alpha r_1}r_1^2dr_1\right)=\frac{2\alpha^3}{\pi}\left(\frac{6\pi mw^2}{\alpha^5}+\frac{2\pi\hbar^2\alpha^2}{m}\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

$$= \frac{12mw^2}{\alpha^2}+\frac{4\hbar^2\alpha^2}{m}$$

منظور از W در $\int_W$، تمام فضا می‌باشد.

مقدار مینیمم $\langle\psi|H|\psi\rangle$ به‌ازای $\alpha_0=\left(\frac{\sqrt{3}mw}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$ اتفاق می‌افتد و برابر با $8\hbar w\sqrt{3}$ می‌باشد. بنابراین حد بالای انرژی حالت پایه، $8\hbar w\sqrt{3}$ می‌باشد، درحالی‌که مقدار دقیق انرژی حالت پایه $\frac{3}{2}\hbar w$ می‌باشد. واضح است که اگر برای تابع آزمون انتخابی خود برحسب اتفاق از ویژه تابع دقیق حالت پایه استفاده می‌کردیم دقیقاً به همان مقدار $\frac{3}{2}\hbar w$ می‌رسیدیم.

تمرین ۹-۱۰

دو ذره‌ی یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ در یک جعبه‌ی پتانسیل یک‌بعدی به اندازه‌ی L با دیواره‌هایی در $x=0$ و $x=L$ محدود هستند.

(آ) انرژی حالت پایه و انرژی اولین حالت برانگیخته و توابع موج مربوط به آن‌ها را برای این سیستم هنگامی که دو ذره برهم‌کنش ندارند بیابید.

(ب) اکنون فرض کنید که یک پتانسیل با جاذبه‌ی ضعیف میان دو ذره وجود دارد:

$$V_p(x)=\begin{cases}-V_0 & 0\le x\le\frac{L}{2}\\ 0 & \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases}$$

انرژی حالت پایه و نخستین حالت برانگیخته را تا اختلال مرتبه‌ی اول بیابید.

(پ) مقادیر عددی را برای انرژی‌های حالت پایه و نخستین حالت برانگیخته در (آ) برای حالتی‌که در آن $L=10^{-10}\,\mathrm{m}$ و $V_0=2\mathrm{eV}$ و جرم هر تک ذره برابر با جرم الکترون درنظر گرفته می‌شود پیدا کنید. اندازه‌های تصحیح‌های انرژی مرتبه‌ی اول را با انرژی حالت پایه و انرژی اولین حالت برانگیخته مقایسه کنید (به‌سادگی می‌توانید نسبت‌های میان تصحیح‌های مرتبه‌ی اول را با انرژی‌های حالت پایه و اولین حالت برانگیخته محاسبه کنید).

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ)

بنابر اصل طرد پائولی تابع موج یک سیستم متشکل از فرمیون‌ها باید تحت جابه‌جایی ذرات پاد متقارن باشد. بنابراین حالت پایه‌ی این سیستم فاقد تبهگنی و ویژه تابع و انرژی متناظر آن عبارتند از:

$$E_{\circ}^{(\circ)} = \frac{\hbar^{۲}\pi^{۲}}{۲mL^{۲}}\left(۱^{۲}+۱^{۲}\right) = \frac{۲\hbar^{۲}\pi^{۲}}{۲mL^{۲}}$$

$$\phi_{\circ}\left(x_{۱},x_{۲},S_{۱},S_{۲}\right) = \sqrt{\frac{۲}{L}}\sin\left(\frac{\pi x_{۱}}{L}\right)\sqrt{\frac{۲}{L}}\sin\left(\frac{\pi x_{۲}}{L}\right)\chi_{\text{یگانه}}$$

خواننده حتماً می‌داند که $\chi_{\text{یگانه}}$ تحت جابه‌جایی ذرات پاد متقارن است. زیرا:

$$\chi_{\text{یگانه}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left[\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle_{۱}\left|\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\right\rangle_{۲} - \left|\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\right\rangle_{۱}\left|\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right\rangle_{۲}\right]$$

$E_{۱}^{(\circ)} = \frac{\hbar^{۲}\pi^{۲}}{۲mL^{۲}}\left(۱^{۲}+۲^{۲}\right)$ اما در اولین حالت برانگیخته، تبهگنی چهارگانه وجود دارد و انرژی سیستم

می‌باشد و ویژه توابع آن عبارت از

$$\left(\sqrt{\frac{۲}{L}}\right)^{۲}\left[\sin\left(\frac{\pi x_{۱}}{L}\right)\sin\left(\frac{۲\pi x_{۱}}{L}\right)+\sin\left(\frac{\pi x_{۲}}{L}\right)\sin\left(\frac{۲\pi x_{۱}}{L}\right)\right]\chi_{\text{یگانه}}$$

و

$$\left(\sqrt{\frac{۲}{L}}\right)^{۲}\left[\sin\left(\frac{\pi x_{۱}}{L}\right)\sin\left(\frac{۲\pi x_{۱}}{L}\right)-\sin\left(\frac{\pi x_{۲}}{L}\right)\sin\left(\frac{۲\pi x_{۱}}{L}\right)\right]\chi_{\text{سه‌گانه}}$$

می‌باشند.

(ب)

تمرین ۹-۱۱

یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد را درنظر بگیرید.

(آ) انرژی اولین حالت برانگیخته و حالت‌های مختلف متناظر با این انرژی را بیابید.

(ب) اکنون اگر این نوسانگر را تحت تأثیر اختلال $\hat{V}_{p}(x,y) = -\lambda\hat{x}\hat{y}$ قرار دهیم که در آن λ یک عدد حقیقی کوچک است، انرژی نخستین حالت برانگیخته را تا اختلال مستقل از زمان مرتبه‌ی اول تبهگن پیدا کنید. (*راهنمایی:* می‌توانید از $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\left(\hat{a}_{x}+\hat{a}_{x}^{\dagger}\right)$، $\hat{y} = \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\left(\hat{a}_{y}+\hat{a}_{y}^{\dagger}\right)$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$\hat{z}=\sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\left(\hat{a}_z+\hat{a}_z^\dagger\right)$ با $\hat{a}_x|n_x\rangle=\sqrt{n_x}|n_x-۱\rangle$ و $\hat{a}_x^\dagger|n_x\rangle=\sqrt{n_x+۱}|n_x+۱\rangle$ استفاده کنید).

حل:

(آ)

انرژی و ویژه حالت‌های این سیستم به‌طور کلی عبارتند از:

$$E_{n_xn_yn_z}=\left(n_x+n_y+n_z+\frac{۳}{۲}\right)\hbar w$$

$$\phi_{n_xn_yn_z}=|n_x\rangle|n_y\rangle|n_z\rangle$$

اولین حالت برانگیخته دارای تبهگنی سه‌گانه است و ویژه حالت‌های آن عبارتند از $\phi_{۱۰۰}$، $\phi_{۰۱۰}$ و $\phi_{۰۰۱}$ و انرژی مربوطه‌ی آن نیز $E_۱^{(۰)}=\frac{۵}{۲}\hbar w$ می‌باشد که به‌ازای $n_x+n_y+n_z=۱$ به‌دست می‌آید.

یعنی:

$$n_x=۱\ ,\ n_y=n_z=۰\quad \text{یا}\quad n_x=n_z=۰\ ,\ n_y=۱\quad \text{یا}\quad n_z=۱\ ,\ n_x=n_y=۰$$

(ب)

چون تبهگنی داریم، تصحیح مرتبه‌ی اول انرژی در واقع همان ویژه مقادیر عملگر V_p است که در زیرفضای ویژه حالت‌های مربوط به اولین حالت برانگیخته نوشته شده است؛ یعنی از قطری کردن ماتریس زیر تصحیح مرتبه‌ی اول انرژی حاصل می‌شود:

$$V_p=\begin{pmatrix}\langle\phi_{۱۰۰}|V_p|\phi_{۱۰۰}\rangle & \langle\phi_{۱۰۰}|V_p|\phi_{۰۱۰}\rangle & \langle\phi_{۱۰۰}|V_p|\phi_{۰۰۱}\rangle\\ \langle\phi_{۰۱۰}|V_p|\phi_{۱۰۰}\rangle & \langle\phi_{۰۱۰}|V_p|\phi_{۰۱۰}\rangle & \langle\phi_{۰۱۰}|V_p|\phi_{۰۰۱}\rangle\\ \langle\phi_{۰۰۱}|V_p|\phi_{۱۰۰}\rangle & \langle\phi_{۰۰۱}|V_p|\phi_{۰۱۰}\rangle & \langle\phi_{۰۰۱}|V_p|\phi_{۰۰۱}\rangle\end{pmatrix}$$

اما:

$$\langle\phi_{۱۰۰}|V_p|\phi_{۱۰۰}\rangle=\langle\phi_{۱۰۰}|-\lambda\hat{x}\hat{y}|\phi_{۱۰۰}\rangle=-\lambda\langle۱|\hat{x}|۱\rangle\langle۰|\hat{y}|۰\rangle\langle۰|۰\rangle=-\lambda\times۰\times۰\times۱=۰$$

$$\langle\phi_{۱۰۰}|V_p|\phi_{۰۱۰}\rangle=\langle\phi_{۰۱۰}|V_p|\phi_{۱۰۰}\rangle=-\lambda\langle۱|\hat{x}|۰\rangle\langle۰|\hat{y}|۱\rangle\langle۰|۰\rangle=-\lambda\left(\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\right)\left(\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\right)(۱)=\frac{-\lambda\hbar}{۲mw}$$

$$\langle\phi_{۱۰۰}|V_p|\phi_{۰۰۱}\rangle=\langle\phi_{۰۰۱}|V_p|\phi_{۱۰۰}\rangle=-\lambda\langle۱|\hat{x}|۰\rangle\langle۰|\hat{y}|۰\rangle\langle۰|۱\rangle=-\lambda\left(\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\right)(۰)(۰)=۰$$

$$\langle\phi_{۰۱۰}|V_p|\phi_{۰۱۰}\rangle=-\lambda\langle۰|\hat{x}|۰\rangle\langle۱|\hat{y}|۱\rangle\langle۰|۰\rangle=-\lambda(۰)(۰)(۱)=۰$$

$$\langle\phi_{۰۱۰}|V_p|\phi_{۰۰۱}\rangle=\langle\phi_{۰۰۱}|V_p|\phi_{۰۱۰}\rangle=-\lambda\langle۰|\hat{x}|۰\rangle\langle۱|\hat{y}|۰\rangle\langle۰|۱\rangle=-\lambda(۰)\left(\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\right)(۰)=۰$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle \phi_{۰,۱} | V_p | \phi_{۰,۱} \rangle = -\lambda \langle ۰ | \hat{x} | ۰ \rangle \langle ۰ | \hat{y} | ۰ \rangle \langle ۱ | ۱ \rangle = -\lambda (۰)(۰)(۱) = ۰$$

پس:

$$V_p = \begin{pmatrix} ۰ & \frac{-\lambda\hbar}{۲mw} & ۰ \\ \frac{-\lambda\hbar}{۲mw} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

از قطری کردن این ماتریس نتیجه می‌شود که ویژه مقادیر آن عبارت از ۰ و $\pm\frac{\lambda\hbar}{۲mw}$ می‌باشند.

بنابراین سطح انرژی اولین خالت برانگیخته تا مرتبه‌ی اول به سه سطح با انرژی‌های:

$$\frac{۳}{۲}\hbar w$$

و

$$\frac{۳}{۲}\hbar w \pm \frac{\lambda\hbar}{۲mw}$$

تجزیه می‌شود.

تمرین ۹-۱۲

با استفاده از روش وردشی انرژی حالت پایه‌ی نوسانگر هماهنگ کروی را به‌وسیله‌ی توابع آزمون شعاعی زیر تخمین بزنید:

(آ) $R(r) = Ae^{-\alpha r^۲}$

(ب) $R(r) = Ae^{-\alpha r}$ که در آن‌ها A ثابت بهنجارش است که باید در هر حالت محاسبه شود و α یک پارامتر قابل تنظیم است.

(پ) با استفاده از این واقعیت که انرژی دقیق حالت پایه $E_۰^{\text{exact}} = \frac{۳\hbar\omega}{۲}$ می‌باشد، خطاهای نسبی متناظر با انرژی‌های به‌دست آمده در (آ) و (ب) را بیابید.

حل:

(آ)

از شرط بهنجارش نتیجه می‌شود که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$۱=\langle R|R\rangle=\int_{۰}^{+\infty}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}A^{*}e^{-ar^{۲}}Ae^{-ar^{۲}}r^{۲}dr\sin\theta d\theta d\varphi=۴\pi|A|^{۲}\int_{۰}^{+\infty}e^{-۲ar^{۲}}r^{۲}dr$$

$$=۴\pi|A|^{۲}\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{\pi}{۸a^{۳}}}=|A|^{۲}\left(\frac{\pi}{۲a}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

در نتیجه:

$$|A|^{۲}=\left(\frac{۲a}{\pi}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

پس:

$$\langle R|\hat{H}|R\rangle=\langle R|-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\nabla^{۲}+\frac{۱}{۲}mw^{۲}r^{۲}|R\rangle=\langle R|-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\nabla^{۲}|R\rangle+\frac{۱}{۲}mw^{۲}(۴\pi)|A|^{۲}\int_{۰}^{+\infty}e^{-۲ar^{۲}}r^{۴}dr$$

اما:

$$\langle R|-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\nabla^{۲}|R\rangle=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\int\vec{\nabla}\left[R^{*}(\vec{r})\right].\vec{\nabla}\left(R(\vec{r})\right)d^{۳}r=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}|A|^{۲}\int_{۰}^{+\infty}\left(-۲are^{-ar^{۲}}\right)^{۲}۴\pi r^{۲}dr$$

$$=\frac{۸\hbar^{۲}|A|^{۲}\pi a^{۲}}{m}\int_{۰}^{+\infty}e^{-۲ar^{۲}}r^{۴}dr$$

پس:

$$\langle\hat{H}\rangle_{R}=\langle R|\hat{H}|R\rangle=\left(\frac{۸\hbar^{۲}|A|^{۲}\pi a^{۲}}{m}+۲\pi mw^{۲}|A|^{۲}\right)\int_{۰}^{+\infty}e^{-۲ar^{۲}}r^{۴}dr$$

$$=۲\pi|A|^{۲}\left(\frac{۴\hbar^{۲}a^{۲}}{m}+mw^{۲}\right)\frac{۳}{۸}\sqrt{\frac{\pi}{(۲a)^{۵}}}=\frac{۳}{۴}\pi^{\frac{۳}{۲}}\left(\frac{۲a}{\pi}\right)^{\frac{۳}{۲}}\frac{۱}{(۲a)^{\frac{۵}{۲}}}\left(\frac{۴\hbar^{۲}a^{۲}}{m}+mw^{۲}\right)$$

$$=\frac{۳}{۸}\left(\frac{۴\hbar^{۲}a}{m}+\frac{mw^{۲}}{a}\right)$$

اما کمترین مقدار $\langle\hat{H}\rangle_{R}$ به‌ازای $a_{۰}=\frac{mw}{۲\hbar}$ اتفاق می‌افتد که به‌ازای این مقدار از a نتیجه می‌شود که:

$$\langle H\rangle_{R}\Big|_{a=a_{۰}}=\frac{۳}{۸}\left(\frac{۴\hbar^{۲}}{m}\frac{mw}{۲\hbar}+mw^{۲}\left(\frac{۲\hbar}{mw}\right)\right)=\frac{۳}{۸}\left(۲\hbar w+۲\hbar w\right)=\frac{۱۲}{۸}\hbar w=\frac{۳}{۲}\hbar w$$

این مقدار دقیقاً برابر با انرژی حالت پایه نوسانگر هماهنگ کروی است.

(ب)

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

از شرط بهنجارش نتیجه می‌شود که:

$$۱=\langle R|R\rangle=\int_{۰}^{+\infty}\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۲\pi}|A|^{۲}e^{-۲\alpha r}r^{۲}dr\sin\theta d\theta d\varphi=۴\pi|A|^{۲}\int_{۰}^{\infty}e^{-۲\alpha r}r^{۲}dr=\frac{۴\pi|A|^{۲}}{۴\alpha^{۳}}=\frac{\pi|A|^{۲}}{\alpha^{۳}}$$

در نتیجه:

$$|A|^{۲}=\frac{\alpha^{۳}}{\pi}$$

پس:

$$\langle H\rangle_{R}=\langle R|\hat{H}|R\rangle=\langle R|-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\nabla^{۲}+\frac{۱}{۲}mw^{۲}r^{۲}|R\rangle=\langle R|-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\nabla^{۲}|R\rangle+\frac{۱}{۲}mw^{۲}\langle R|r^{۲}|R\rangle$$

$$=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\int_{W}\vec{\nabla}\left(R^{*}(r)\right).\vec{\nabla}\left(R(r)\right)d^{۳}r+\frac{۱}{۲}mw^{۲}|A|^{۲}(۴\pi)\int_{۰}^{+\infty}e^{-۲\alpha r}r^{۴}dr$$

$$=\frac{\hbar^{۲}|A|^{۲}}{۲m}\int_{۰}^{+\infty}\left(-\alpha e^{-\alpha r}\right)^{۲}۴\pi r^{۲}dr+۲\pi mw^{۲}|A|^{۲}\int_{۰}^{+\infty}e^{-۲\alpha r}r^{۴}dr$$

$$=\frac{۲\pi\hbar^{۲}|A|^{۲}\alpha^{۲}}{m}\frac{۱}{۴\alpha^{۳}}+۲\pi mw^{۲}|A|^{۲}\frac{۳}{۴\alpha^{۵}}=\frac{\alpha^{۳}}{\pi}\frac{۲\pi\hbar^{۲}\alpha^{۲}}{۴m\alpha^{۳}}+\frac{۳\pi mw^{۲}}{۲\alpha^{۵}}\frac{\alpha^{۳}}{\pi}$$

$$=\frac{\hbar^{۲}\alpha^{۲}}{۲m}+\frac{۳mw^{۲}}{۲\alpha^{۲}}$$

منظور از W در $\int_{W}$، تمام فضا می‌باشد.

کمترین مقدار $\langle H\rangle_{R}$ به‌ازای $\alpha_{۰}=\left(\frac{۳m^{۲}w^{۲}}{\hbar^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۴}}$ اتفاق می‌افتد و به‌ازای این مقدار داریم:

$$\langle H\rangle_{R}\Big|_{\alpha=\alpha_{۰}}=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\left(\frac{۳m^{۲}w^{۲}}{\hbar^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۳mw^{۲}}{۲}\left(\frac{\hbar^{۲}}{۳m^{۲}w^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\hbar w+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\hbar w=\sqrt{۳}\hbar w$$

پس:

$$E_{۰}^{Vm}=\sqrt{۳}\,\hbar w$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

در حالت (آ) داریم:

$$\text{خطای نسبی} = \left|\frac{E_{\circ}^{exact} - E_{\circ}^{VM}}{E_{\circ}^{exact}}\right| = \frac{\frac{۳}{۲}\hbar w - \frac{۳}{۲}\hbar w}{\frac{۳}{۲}\hbar w} = ۰$$

در حالت (ب) داریم:

$$\text{خطای نسبی} = \left|\frac{E_{\circ}^{exact} - E_{\circ}^{VM}}{E_{\circ}^{exact}}\right| = \frac{\frac{۳}{۲}\hbar w - \sqrt{۳}\hbar w}{\frac{۳}{۲}\hbar w} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} - ۱ = \frac{۲\times ۱/۷}{۳} - ۱ = ۰/۱۳$$

تمرین ۹-۱۳

ذره‌ای به جرم m را درنظر بگیرید که به‌طور عمودی و کشسان بر روی یک سطح بازتابنده‌ی هموار در میدان گرانشی زمین

$$V(z) = \begin{cases} mgz & z > ۰ \\ \infty & z \le ۰ \end{cases}$$

می‌افتد که در آن g یک ثابت (شتاب گرانش) است. با استفاده از روش وردشی انرژی حالت پایه‌ی این ذره را به‌وسیله‌ی تابع موج آزمون $\Psi(z) = ze^{-\alpha z^{۴}}$ تخمین بزنید، که α یک پارامتر قابل تنظیم است و باید تعیین شود. نتیجه‌ی خود را با مقدار دقیق $E_{\circ}^{\text{exact}} = ۲/۳۳۸\left(\frac{۱}{۲}mg^{۲}\hbar^{۲}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ مقایسه کنید.

حل:

از روش وردشی، حد بالای انرژی حالت پایه عبارتست از:

$$E_{\circ}^{VM} = \frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

حال به محاسبه‌ی $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ و $\langle\psi|\psi\rangle$ می‌پردازیم:

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \int_{\circ}^{+\infty} z\exp\left(-\alpha z^{۴}\right)\left(-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\frac{d^{۲}}{dz^{۲}} + mgz\right)z\exp\left(-\alpha z^{۴}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\int_{\circ}^{+\infty} z\exp\left(-\alpha z^{۴}\right)\left(-۲۰\alpha z^{۳} + ۱۶\alpha^{۲}z^{۷}\right)\exp\left(-\alpha z^{۴}\right) + mg\int_{\circ}^{+\infty} z^{۳}\exp\left(-۲\alpha z^{۴}\right)dz$$

$$= -\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\left[\int_{\circ}^{+\infty} -۲۰\alpha z^{۴}\exp\left(-۲\alpha z^{۴}\right)dz + \int_{\circ}^{+\infty} ۱۶\alpha^{۲}z^{۸}\exp\left(-۲\alpha z^{۴}\right)dz\right] + mg\int_{\circ}^{+\infty} z^{۳}\exp\left(-۲\alpha z^{۴}\right)dz$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$=-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\left[-۲۰\alpha\int_{۰}^{+\infty}u^{\frac{۳}{۲}}\exp\left(-۲\alpha u^{۲}\right)\frac{du}{۲}+۱۶\alpha^{۲}\int_{۰}^{+\infty}u^{\frac{۷}{۲}}\exp\left(-۲\alpha u^{۲}\right)\frac{du}{۲}\right]+mg\left[\frac{-۱}{۸\alpha}\exp\left(-۲\alpha z^{۴}\right)\right]_{۰}^{+\infty}$$

$$=-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\left[-۱۰\alpha\left(\frac{\Gamma\left(\frac{۵}{۴}\right)}{۲(۲\alpha)^{\frac{۵}{۴}}}\right)+۸\alpha^{۲}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{۹}{۴}\right)}{۲(۲\alpha)^{\frac{۹}{۴}}}\right)\right]+\frac{mg}{۸\alpha}=-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\left(\frac{-۵\Gamma\left(\frac{۵}{۴}\right)}{\alpha^{\frac{۱}{۴}}۲^{\frac{۵}{۴}}}+\frac{۴\Gamma\left(\frac{۹}{۴}\right)}{\alpha^{\frac{۱}{۴}}۲^{\frac{۱}{۴}}}\right)+\frac{mg}{۸\alpha}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle=\int_{۰}^{+\infty}z^{۲}\exp\left(-۲\alpha z^{۴}\right)dz=\int_{۰}^{+\infty}u^{\frac{۱}{۲}}\exp\left(-۲\alpha u^{۲}\right)\frac{du}{۲}=\frac{۱}{۲}\frac{\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)}{۲(۲\alpha)^{\frac{۳}{۴}}}$$

در محاسبات فوق از تغییر متغیر $u=z^{۲}$ و رابطه‌ی $\int_{۰}^{+\infty}u^{m}e^{-\alpha u^{۲}}du=\frac{\Gamma\left[\frac{m+۱}{۲}\right]}{۲\alpha^{\left(\frac{m+۱}{۲}\right)}}$ استفاده شده است.

پس:

$$E_{۰}^{VM}=\frac{۵\hbar^{۲}\Gamma\left(\frac{۱}{۴}\right)\alpha^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{\frac{۵}{۲}}m\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)}+\frac{mg}{۲^{\frac{۱}{۴}}\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)\alpha^{\frac{۱}{۴}}}$$

کمترین مقدار $E_{۰}^{VM}$ به‌ازای $\alpha_{۰}=\left[\frac{۲^{\frac{۵}{۴}}m^{۲}g}{۵\hbar^{۲}\Gamma\left(\frac{۱}{۴}\right)}\right]^{\frac{۴}{۳}}$ اتفاق می‌افتد و به‌ازای این مقدار داریم:

$$E_{۰}^{VM}\left(\alpha_{۰}\right)=\frac{۳}{\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)}\left(\frac{۵\hbar^{۲}mg^{۲}}{۲^{۵}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

تمرین ۹-۱۴

انرژی حالت پایه را برای ذره‌ای که در حال حرکت در یک جعبه‌ی پتانسیل یک بُعدی به طول L با دیواره‌هایی در $x=۰$ و $x=L$ است تا مرتبه‌ی اول اختلال، هنگامی که پتانسیل ضعیف $\hat{H}_{p}=\lambda x^{۲}$ افزوده شود حساب کنید که در آن $\lambda\ll۱$ است.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

در اینجا داریم:

$$E_1^{(0)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \ , \ |\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

طبق نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن (چون ϕ_1 فاقد تبهگنی است) انرژی حالت پایه تا مرتبه‌ی اول λ عبارتست از:

$$E_1 = E_1^{(0)} + E_1^{(1)}$$

به‌طوری‌که:

$$E_1^{(1)} = \langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_1\rangle$$

پس:

$$E_1^{(1)} = \int_0^L \lambda x^2\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)^2 dx = \frac{2\lambda}{L}\int_0^L x^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{\lambda}{L}\int_0^L x^2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)dx$$

اما استفاده‌ی مکرر از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد:

$$\int x^2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx = \frac{Lx^2}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{L} + \frac{L^2}{2\pi^2}x\cos\frac{2\pi x}{L} - \frac{L^3}{4\pi^3}\sin\frac{2\pi x}{L}$$

پس:

$$E_1^{(1)} = \frac{\lambda}{L}\left(\frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{2\pi^2}L\cos 2\pi\right) = \lambda\left(\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2\pi^2}\right) = \lambda L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\right) = \lambda L^2\left(\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right)$$

و:

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} + \lambda L^2\left(\frac{2\pi^2-3}{6\pi^2}\right)$$

تمرین ۹-۱۵

یک سیستم نیمه‌کلاسیکی را در نظر بگیرید که انرژی آن با:

$$E = a^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{4} - a^2\right)p^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{\frac{b^2}{4} - a^2}\right)q^2$$

داده می‌شود و در آن a و b ثابت‌هایی حقیقی و مثبت هستند. با استفاده از قاعده‌ی کوانتش بور-

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

سامرفلد عبارت انرژی حالت مقید E_n را برای حالت برانگیخته‌ی nاُم برحسب a به‌دست آورید.

حل:

ابتدا نقاط بازگشت q_0 را از رابطه‌ی $P(q_0)=0$ می‌یابیم. پس:

$$E=a^2+\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{\frac{b^2}{4}-a^2}\right)q_0^2$$

که نتیجه می‌دهد:

$$q_0=\pm\frac{\sqrt{\left(E-a^2\right)\left(b^2-4a^2\right)}}{a\sqrt{8}}$$

از قاعده‌ی کوانتش ویلسون – سامرفلد داریم:

$$\oint P_q\left(q,E_n\right)dq=2\int_{q_1}^{q_2}P_q\,dq=nh$$

که در این رابطه، q_1 و q_2 نقاط بازگشتی، q مختصه تعمیم یافته و P_q تکانه تعمیم یافته‌ی متناظر با q می‌باشد. پس:

$$q_1=-\frac{\sqrt{\left(E-a^2\right)\left(b^2-4a^2\right)}}{a\sqrt{8}}\ ,\ q_2=\frac{\sqrt{\left(E-a^2\right)\left(b^2-4a^2\right)}}{a\sqrt{8}}$$

بنابراین:

$$nh=2\int_{q_1}^{q_2}\left[\frac{E_n-a^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{\frac{b^2}{4}-a^2}\right)q^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{4}-a^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}dq=\sqrt{\frac{2\left(E_n-a^2\right)}{\frac{b^2}{4}-a^2}}\int_{q_1}^{q_2}2\sqrt{1-\frac{2a^2q^2}{E_n-a^2}}\,dq$$

$$=\sqrt{\frac{2\left(E_n-a^2\right)}{\frac{b^2}{4}-a^2}}\frac{2}{2\sqrt{\frac{2a^2}{E_n-a^2}}}\left\{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{2a^2}{E-a^2}}q\right)+\frac{1}{2}\sin\left[2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{2a^2}{E_n-a^2}}q\right)\right]\right\}_{q_1}^{q_2}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= \frac{\left|\left(E_n - a^2\right)\right|}{\sqrt{a^2\left(\frac{b^2}{4} - a^2\right)}}\left\{2\sin^{-1}\left|\left(\frac{b^2}{4} - a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| + \frac{2\sqrt{2}a\sqrt{E_n - 3a^2}}{\left|E_n - a^2\right|}\right\}$$

تمرین ۹-۱۶

با استفاده از روش وردشی، انرژی حالت پایه‌ی ذره‌ای به جرم m را تخمین بزنید که در حال حرکت در یک پتانسیل یک‌بعدی $V(x) = V_0 x^4$ است. می‌توانید از تابع آزمون $\Psi_0(x,\alpha) = Ae^{-\alpha x^2/2}$ استفاده کنید که در آن A ثابت بهنجارش و α یک پارامتر قابل تنظیم است که باید تعیین شود.

حل:

در روش وردشی داریم:

$$E_0^{VM} = \frac{\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle}{\langle\psi_0|\psi_0\rangle}$$

که $\hat{H}$ عملگر هامیلتونی است و در اینجا داریم:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0 x^4$$

چون:

$$\langle\psi_0|\psi_0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\psi_0(x)\right|^2 dx = |A|^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = |A|^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (*)$$

$$\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0^*(x)\hat{H}\psi_0(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}A^* e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0 x^4\right)Ae^{\frac{-\alpha x^2}{2}}dx$$

$$= |A|^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}V_0 x^4 e^{-\alpha x^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{+\hbar^2}{2m}\alpha\left(1-\alpha x^2\right)e^{-\alpha x^2}dx\right]$$

از طرفی با یک و دو بار مشتق گرفتن از رابطه‌ی * نسبت به α داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}x^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}x^4dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

در نتیجه:

$$E_0^{VM} = \frac{V_0\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}\right) + \frac{\hbar^2\alpha}{2m}\left[\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - \alpha\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}\right)\right]}{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} = \frac{3V_0}{4\alpha^2} + \frac{\hbar^2\alpha}{4m}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حال $E_{\circ}^{VM}$ را کمینه می‌کنیم. از برابر صفر قرار دادن $\frac{dE_{\circ}^{VM}}{d\alpha}$ نتیجه می‌شود که:

$$\alpha_{\circ}=\left(\frac{۶mV_{\circ}}{\hbar^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

و داریم:

$$E_{\circ}^{VM}(\alpha_{\circ})=\frac{۳V_{\circ}}{۴}\left(\frac{\hbar^{۲}}{۶mV_{\circ}}\right)^{\frac{۲}{۳}}+\frac{\hbar^{۲}}{۴m}\left(\frac{۶mV_{\circ}}{\hbar^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\left(\frac{۸۱\hbar^{۲}V_{\circ}}{۲۵۶m^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

و در واقع مقدار به دست آمده، حد بالایی برای انرژی حالت پایه است.

تمرین ۹-۱۷

ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که در یک پتانسیل یک‌بعدی $V(x)=V_{\circ}x^{۴}$ در حرکت است. انرژی حالت پایه‌ی این ذره را به روش WKB تخمین بزنید.

حل:

در اینجا داریم:

$$E=\frac{p^{۲}}{۲m}+V_{\circ}x^{۴}$$

نقاط بازگشت $x_{\circ}$ نقاطی هستند که در رابطه‌ی $p=\circ$ و $\left(E=V(x)\right)$ صدق می‌نمایند، پس:

$$x_{۱/۲}=\pm\left(\frac{E}{V_{\circ}}\right)^{\frac{۱}{۴}}$$

در تقریب WKB داریم:

$$\oint p\,dx=۲\int_{x_{۱}}^{x_{۲}}\sqrt{۲m\left(E_n-V(x)\right)}\,dx=\left(n+\frac{۱}{۲}\right)h$$

که $x_{۱}$ و $x_{۲}$ نقاط بازگشت هستند؛ پس:

$$۲\int_{-\left(\frac{E_n}{V_{\circ}}\right)^{\frac{۱}{۴}}}^{\left(\frac{E_n}{V_{\circ}}\right)^{\frac{۱}{۴}}}\sqrt{۲m\left(E_n-V_{\circ}x^{۴}\right)}\,dx=\left(n+\frac{۱}{۲}\right)h\quad;\quad n=\circ,۱,۲,\ldots$$

پس:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$۴\sqrt{۲mV_۰}\int_۰^{\left(\frac{E_n}{V_۰}\right)^{\frac{۱}{۴}}}\sqrt{\left[\left(\frac{E_n}{V_۰}\right)^{\frac{۱}{۴}}\right]^۴-x^۴}\,dx=\left(n+\frac{۱}{۲}\right)h$$

اما از فرمول کلی:

$$\int_۰^a x^۵\left(a^{n'}-x^{n'}\right)^p dx=\frac{a^{m+۱+n'p}\Gamma\left(\frac{m+۱}{n'}\right)\Gamma\left(p+۱\right)}{n'\Gamma\left(\frac{m+۱}{n'}+p+۱\right)}$$

به‌ازای $a=\left(\frac{E_n}{V_۰}\right)^{\frac{۱}{۴}}$، $m=۰$، $n'=۴$ و $p=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$\int_۰^{\left(\frac{E_n}{V_۰}\right)^{\frac{۱}{۴}}}\sqrt{\left[\left(\frac{E_n}{V_۰}\right)^{\frac{۱}{۴}}\right]^۴-x^۴}\,dx=\left(\frac{E_n}{V_۰}\right)^{\frac{۳}{۴}}\frac{\Gamma\left(\frac{۱}{۴}\right)\Gamma\left(\frac{۳}{۲}\right)}{۴\Gamma\left(\frac{۷}{۴}\right)}=\left(\frac{E_n}{V_۰}\right)^{\frac{۳}{۴}}\frac{\frac{۱}{۲}\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)\Gamma\left(\frac{۱}{۴}\right)}{۴\left(\frac{۳}{۴}\right)\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)}=\frac{\left(\frac{E_n}{V_۰}\right)^{\frac{۳}{۴}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{۱}{۴}\right)}{۶\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)}$$

پس:

$$۴\sqrt{۲mV_۰}\frac{\left(\frac{E_n}{V_۰}\right)^{\frac{۳}{۴}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{۱}{۴}\right)}{۶\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)}=\left(n+\frac{۱}{۲}\right)h$$

یا:

$$E_n=V_۰\left(\frac{۳}{۲}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(n+\frac{۱}{۲}\right)h}{\Gamma\left(\frac{۱}{۴}\right)\sqrt{۲m\pi v_۰}}\right)^{\frac{۳}{۴}}$$

و:

$$E_۰=\left(\frac{۳}{۴}\frac{\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)}{\Gamma\left(\frac{۱}{۴}\right)}\frac{hV_۰^{\frac{۱}{۴}}}{\sqrt{۲m\pi}}\right)^{\frac{۴}{۳}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۹-۱۸

با استفاده از $\phi_{1..}(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-Zr/a}$ نشان دهید که

$$\int \phi_{..}^{2}(\vec{r}_1)\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\phi_{..}^{2}(\vec{r}_2)d^3r_1d^3r_2=\frac{5Z}{8a}.$$

حل:

برای محاسبه‌ی این انتگرال ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}=\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\gamma}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}p_l(\cos\gamma)$$

که در آن $r_>\left(r_<\right)$ مقدار بزرگتر (کوچکتر) بین r_1 و r_2 و γ زاویه بین $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ است. انتگرال زاویه‌ای به راحتی با نوشتن $P_l(\cos\gamma)$ برحسب $Y_l^m(\theta_1,\varphi_1)$ و $Y_l^m(\theta_2,\varphi_2)$ و استفاده از قضیه‌ی جمع هماهنگ‌های کروی انجام می‌شود:

$$P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{+l}Y_l^{m^*}(\theta_1,\varphi_1)Y_l^m(\theta_2,\varphi_2)$$

بدیهی است که:

$$\int Y_l^m(\theta_i,\varphi_i)d\Omega_i=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}(4\pi)\delta_{l0}\delta_{m0}$$

پس:

$$\int \phi_{..}^{2}(\vec{r}_1)\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\phi_{..}^{2}(\vec{r}_2)d^3r_1d^3r_2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{Z}{a}\right)^6\int e^{\frac{-2Z(r_1+r_2)}{a}}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_l^{m^*}(\theta_1,\varphi_1)d\Omega_1Y_l^m(\theta_2,\varphi_2)d\Omega_2r_1^2r_2^2dr_1dr_2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{Z}{a}\right)^6\int e^{\frac{-2Z(r_1+r_2)}{a}}\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\sqrt{4\pi}\,\delta_{l0}\delta_{m0}\sqrt{4\pi}\,\delta_{l0}\delta_{m0}r_1^2r_2^2dr_1dr_2$$

$$=\frac{(4\pi)^2}{\pi^2}\left(\frac{Z}{a}\right)^6\int e^{\frac{-2Z(r_1+r_2)}{a}}\left(\frac{1}{r_>}\right)r_2^2dr_2r_1^2dr_1=16\left(\frac{Z}{a}\right)^6\left\{\int_0^{+\infty}\left[\frac{-a}{2Z}e^{\frac{-2Zr_2}{a}}\left(r_2^2+\frac{ar_2}{Z}+\frac{a^2}{2Z^2}\right)\right]_0^{r_1}\right.$$

$$\times e^{\frac{-2Zr_1}{a}}r_1dr_1+\left.\int_0^{+\infty}\left[\frac{-a}{2Z}e^{\frac{-2Zr_2}{a}}\left(r_2+\frac{a}{2Z}\right)\right]_{r_1}^{+\infty}e^{\frac{-2Zr_1}{a}}r_1^2dr_1\right\}=16\left(\frac{Z}{a}\right)^6$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\times\left\{\int_{\cdot}^{+\infty}\left[\frac{-a}{۲Z}e^{\frac{-۲Zr_۲}{a}}\left(r_۱^۲+\frac{ar_۱}{Z}+\frac{a^۲}{۲Z^۲}\right)-\frac{a^۲}{۲Z^۲}\right]e^{\frac{-۲Zr_۱}{a}}r_۱dr_۱+\int_{\cdot}^{+\infty}\frac{+a}{۲Z}e^{\frac{-۲Zr_۱}{a}}\left(r_۱+\frac{a}{۲Z}\right)e^{\frac{-۲Zr_۱}{a}}r_۱^۲dr_۱\right\}$$

$$=۱۶\left(\frac{Z}{a}\right)^۶\left[\frac{-a^۲}{۴Z^۲}\int_{\cdot}^{+\infty}e^{\frac{-۴Zr_۱}{a}}r_۱^۲dr_۱-\frac{a^۳}{۴Z^۳}\int_{\cdot}^{+\infty}e^{\frac{-۴Zr_۱}{a}}r_۱dr_۱+\frac{a^۳}{۴Z^۳}\int_{\cdot}^{+\infty}e^{\frac{-۲Zr_۱}{a}}r_۱dr_۱\right]$$

$$=۱۶\left(\frac{Z}{a}\right)^۶\left\{\frac{-a^۲}{۴Z^۲}\frac{-a}{۴Z}\left[e^{\frac{-۴Zr_۱}{a}}\left(r_۱^۲+\frac{۲ar_۱}{۴Z}+\frac{۲a^۲}{(۴Z)^۲}\right)\right]_{\cdot}^{+\infty}-\frac{a^۳}{۴Z^۳}\frac{-a}{۴Z}\left[e^{\frac{-۴Zr_۱}{a}}\left(r_۱+\frac{a}{۴Z}\right)\right]_{\cdot}^{+\infty}\right.$$

$$\left.+\frac{a^۳}{۴Z^۳}\frac{-a}{۲Z}\left[e^{\frac{-۲Zr_۱}{a}}\left(r_۱+\frac{a}{۲Z}\right)\right]_{\cdot}^{+\infty}\right\}=۱۶\left(\frac{Z}{a}\right)^۶\left[\frac{a^۳}{۱۶Z^۳}\left(\frac{-۲a^۲}{۱۶Z^۲}\right)+\frac{a^۴}{۱۶Z^۴}\left(-\frac{a}{۴Z}\right)-\frac{a^۴}{۸Z^۴}\left(\frac{-a}{۲Z}\right)\right]=\frac{۵Z}{۸a}$$

تمرین ۹-۱۹

انرژی حالت پایه‌ی اتم بریلیوم دوبار یونیده، Be را به‌وسیله‌ی دو روش زیر محاسبه کنید و سپس دو نتیجه را مقایسه کنید:

(آ) روش اختلال مرتبه‌ی اول

(ب) روش وردشی با تابع آزمون $\Psi(r_۱,r_۲)=Ae^{\frac{-a(r_۱+r_۲)}{a}}$ که در آن A ثابت بهنجارش، α یک پارامتر قابل تنظیم و a شعاع بور است.

حل:

این تمرین دقیقاً مسئله‌ی حل شده‌ی (۹-۱۷) است که در آن، Z مقداری برابر با ۴ دارد. پس:

(آ)

طبق رابطه‌ی (۹-۴۷۲) داریم:

$$E=-\frac{۴e^۲}{a}\left(۴-\frac{۵}{۸}\right)=\frac{-۲۷e^۲}{۲a}$$

(ب)

طبق رابطه‌ی (۹-۴۸۳) داریم:

$$E=-\left[۱-\frac{۵}{۸\times۴}+\left(\frac{۵}{۱۶\times۴}\right)^۲\right]\frac{۴^۲e^۲}{a}=-\frac{۳۴\times۱}{۵۶}\frac{e^۲}{a}$$

تمرین ۹-۲۰

با استفاده از روش وردشی، انرژی دومین حالت برانگیخته‌ی ذره‌ای به جرم m را تخمین بزنید که در

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حال حرکت در یک چاه نامتناهی یک‌بعدی با دیواره‌هایی در $x=0$ و $x=L$ است. خطای نسبی میان نتیجه‌ی شما و مقدار دقیق را محاسبه کنید (به خاطر آورید که انرژی دومین حالت برانگیخته با $E_2^{exact}=\frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ داده می‌شود).

حل:

با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی (۹-۷) در متن کتاب به حل این تمرین می‌پردازیم. چون تابع موج دقیق دومین حالت برانگیخته، دارای صفرهایی در نقاط $x=\frac{L}{3}$ و $x=\frac{2L}{3}$ است و نسبت به $x=\frac{L}{2}$ متقارن است و باید بر $\psi_0(x)$ و $\psi_1(x)$ عمود باشد؛ بنابراین آن را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\psi_2(x)=x\left(x-\frac{L}{3}\right)\left(x-\frac{2L}{3}\right)(x-l)$$

برای یافتن E_2^{VM} نیاز به یافتن $\langle\psi_2|\psi_2\rangle$ و $\langle\psi_2|\hat{H}|\psi_2\rangle$ داریم:

$$\langle\psi_2|\psi_2\rangle=\int_0^L\psi_2^2(x)\,dx=\int_0^L x^2\left(x-\frac{L}{3}\right)^2\left(x-\frac{2L}{3}\right)^2(x-L)^2\,dx=\frac{L^9}{17010}$$

$$\langle\psi_2|\hat{H}|\psi_2\rangle=\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^L\left(\frac{d\psi_2(x)}{dx}\right)^2dx$$

$$=\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^L\left(16x^6-48Lx^5+\frac{500}{9}L^2x^4-\frac{280}{9}L^3x^3+\frac{700}{81}L^4x^2-\frac{88}{81}\left(x^5+\frac{4}{81}L^6\right)\right)$$

$$=\frac{\hbar^2L^7}{81(2m)}\left(\frac{1296}{7}-648+900-630+\frac{700}{3}-44+4\right)=\frac{5\hbar^2L^7}{17010m}$$

پس:

$$E_2^{VM}=\frac{\langle\psi_2|\hat{H}|\psi_2\rangle}{\langle\psi_2|\psi_2\rangle}=\frac{\frac{5\hbar^2L^7}{17010m}}{\frac{L^9}{17010}}=\frac{50\hbar^2}{mL^2}$$

$$\text{خطای نسبی}=\left|\frac{E_2^{exact}-E_2^{VM}}{E_2^{exact}}\right|=\left|\frac{\frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}-\frac{50\hbar^2}{mL^2}}{\frac{9\pi\hbar^2}{2mL^2}}\right|\simeq\left|\frac{450-50}{45}\right|=\frac{1}{9}\simeq 11/1\,\%$$

تمرین ۹-۲۱

یک ذره‌ی بدون اسپین با اندازه‌حرکت زاویه‌ای $l=1$ را درنظر بگیرید که هامیلتونی آن

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$\hat{H}_0 = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\left(\hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2\right)$ می‌باشد و در آن ε ثابتی دارای ابعاد انرژی است.

(آ) ترازهای انرژی دقیق و ویژه حالت‌های متناظر این ذره را حساب کنید.

(ب) اکنون اختلال $\hat{H}_1 = \frac{\alpha \hat{L}_z}{\hbar}$ را اضافه می‌کنیم که در آن α یک ثابت کوچک (در مقایسه با ε) است و دارای ابعاد انرژی می‌باشد. ترازهای انرژی این ذره را تا اختلال مرتبه‌ی دوم حساب کنید.

(پ) ماتریس $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ را قطری کنید و ویژه مقادیر دقیق انرژی را بیابید. آن‌گاه هر ویژه مقدار را تا توان دوم α بسط دهید و آن‌ها را با نتایج به‌دست آمده از اختلال در (آ) مقایسه کنید.

حل:

(آ)

با استفاده از نمایش ماتریسی $\hat{L}_x$ و $\hat{L}_y$، نمایش ماتریسی $\hat{H}_0$ را می‌نویسیم:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

پس:

$$\hat{H}_0 = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\left[\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حال جهت محاسبه‌ی $E_n^{(0)} = \lambda_n \varepsilon$ و $|\phi_n\rangle$، ویژه بردارها و ویژه مقادیر متناظر آنها را می‌یابیم. برای یافتن ویژه مقادیر باید معادله زیر را حل کنیم:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

نتیجه عبارتست از:

$$E_1^{(0)} = \lambda_1 \varepsilon = -\varepsilon\ ,\ E_2^{(0)} = \lambda_2 \varepsilon = \varepsilon\ ,\ E_3^{(0)} = \lambda_3 \varepsilon = 2\varepsilon$$

ویژه بردارهای متناظر نیز عبارت خواهند بود از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$|\phi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\ ,\ |\phi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\ |\phi_3\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

(ب)

با استفاده از نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن تا تصحیح مرتبه‌ی دوم داریم:

$$E_n=E_n^{(0)}+E_n^{(1)}+E_n^{(2)}$$

به‌طوری‌که:

$$E_n^{(1)}=\langle\phi_n|\hat{H}_p|\phi_n\rangle\ ,\ E_n^{(2)}=\sum_{m\neq n}\frac{|\langle\phi_n|\hat{H}_p|\phi_m\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}$$

با توجه به اینکه:

$$\hat{H}_p=\frac{\alpha L_z}{\hbar}=\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

نتیجه می‌شود که:

$$E_1^{(1)}=\langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 0\ \ -1)\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{2}(1\ \ 0\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0$$

$$E_2^{(1)}=\langle\phi_2|\hat{H}_p|\phi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 0\ \ 1)\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{2}(1\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$E_3^{(1)}=\langle\phi_3|\hat{H}_p|\phi_3\rangle=(0\ \ 1\ \ 0)\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha(0\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0$$

و:

$$\langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_2\rangle=\langle\phi_2|\hat{H}_p|\phi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 0\ \ -1)\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{2}(1\ \ 0\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\alpha$$

$$\langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_3\rangle=\langle\phi_3|\hat{H}_p|\phi_1\rangle=(1\ \ 0\ \ -1)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle \phi_2 | \hat{H}_p | \phi_3 \rangle = \langle \phi_3 | \hat{H}_p | \phi_2 \rangle = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

و بنابراین:

$$E_1^{(2)} = \frac{\left|\langle \phi_1 | \hat{H}_p | \phi_2 \rangle\right|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} - \frac{\left|\langle \phi_1 | \hat{H}_p | \phi_3 \rangle\right|^2}{E_1^{(0)} - E_3^{(0)}} = \frac{\alpha^2}{-\varepsilon - \varepsilon} + \frac{0}{-\varepsilon - 2\varepsilon} = -\frac{\alpha^2}{2\varepsilon}$$

$$E_2^{(2)} = \frac{\left|\langle \phi_2 | \hat{H}_p | \phi_1 \rangle\right|^2}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} + \frac{\left|\langle \phi_2 | \hat{H}_p | \phi_3 \rangle\right|^2}{E_2^{(0)} - E_3^{(0)}} = \frac{\alpha^2}{\varepsilon + \varepsilon} + \frac{0}{\varepsilon - 2\varepsilon} = \frac{\alpha^2}{2\varepsilon}$$

$$E_3^{(2)} = \frac{\left|\langle \phi_3 | \hat{H}_p | \phi_1 \rangle\right|^2}{E_3^{(0)} - E_1^{(0)}} + \frac{\left|\langle \phi_3 | \hat{H}_p | \phi_2 \rangle\right|^2}{E_3^{(0)} - E_2^{(0)}} = \frac{0}{2\varepsilon + \varepsilon} + \frac{0}{2\varepsilon - \varepsilon} = 0$$

و لذا:

$$E_1 = E_1^{(0)} + E_1^{(1)} + E_1^{(2)} = -\varepsilon + 0 - \frac{\alpha^2}{2\varepsilon} = -\varepsilon - \frac{\alpha^2}{2\varepsilon}$$

$$E_2 = E_2^{(0)} + E_2^{(1)} + E_2^{(2)} = \varepsilon + 0 + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon} = \varepsilon + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon}$$

$$E_3 = E_3^{(0)} + E_3^{(1)} + E_3^{(2)} = 2\varepsilon + 0 + 0 = 2\varepsilon$$

(پ)

نمایش ماتریسی $\hat{H}$ عبارتست از:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix}\alpha & 0 & \varepsilon\\ 0 & 2\varepsilon & 0\\ \varepsilon & 0 & -\alpha\end{pmatrix}$$

از قطری کردن آن نتیجه می‌شود که:

$$E_1 = \sqrt{\alpha^2 + \varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}} = \varepsilon\left(1 + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon^2} + \ldots\right) = \varepsilon + \frac{\alpha^2}{2\varepsilon} + \ldots$$

$$E_2 = 2\varepsilon$$

$$E_3 = -\sqrt{\alpha^2 + \varepsilon^2} = -\varepsilon - \frac{\alpha^2}{2\varepsilon} + \ldots$$

ملاحظه می‌شود که نتایج قسمت (پ) با نتایج قسمت (ب) در توافق است.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۹-۲۲

سیستمی را در نظر بگیرید که هامیلتونی آن با $\hat{H} = E_0 \begin{pmatrix} -5 & 3\lambda & 0 & 0 \\ 3\lambda & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & -8 \end{pmatrix}$ داده می‌شود و در آن $\lambda \ll 1$ است.

(آ) با تجزیه نمودن این هامیلتونی به‌صورت $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_p$ ویژه مقدارها و ویژه حالت‌های هامیلتونی مختل نشده‌ی $\hat{H}_0$ را بیابید.

(ب) $\hat{H}$ را قطری کنید و ویژه مقدارهای دقیق آن را بیابید. هر ویژه مقدار را تا توان دوم λ بسط دهید.

(پ) با استفاده از اختلال مرتبه‌ی اول و دوم غیرتبهگن، انرژی‌های تقریبی $\hat{H}$ را بیابید و آن را با مقدارهای دقیق به دست آمده در (ب) مقایسه کنید.

حل:

(آ)

در صورتی‌که بخواهیم $\hat{H}$ را به‌صورت $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_p$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\hat{H}_0 = E_0 \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_p = E_0 \begin{pmatrix} 0 & 3\lambda & 0 & 0 \\ 3\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$|E_1 = -5E_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |E_2 = 5E_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|E_3 = 8E_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |E_4 = -8E_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ب)

از قطری کردن $\hat{H}$، ویژه مقادیر آن یعنی E_nها عبارت خواهند بود از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_1 = -E_0\sqrt{25+9\lambda^2} = -E_0\left(5+\frac{9}{10}\lambda^2+O\left(\lambda^4\right)\right)$$

$$E_2 = E_0\sqrt{25+9\lambda^2} = E_0\left(5+\frac{9}{10}\lambda^2+O\left(\lambda^4\right)\right)$$

$$E_3 = E_0\sqrt{\lambda^2+64} = E_0\left(8+\frac{\lambda^2}{16}+O\left(\lambda^4\right)\right)$$

$$E_4 = -E_0\sqrt{\lambda^2+64} = E_0\left(-8-\frac{\lambda^2}{16}+O\left(\lambda^4\right)\right)$$

(پ)

با استفاده از نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن تا تصحیح مرتبه‌ی دوم داریم:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)}$$

به‌طوری‌که $E_n^{(0)}$ ویژه مقدار متناظر با ویژه حالت $|\phi_n\rangle$ عملگر $\hat{H}_0$ است و

$$E_n^{(1)} = \langle\phi_n|\hat{H}_p|\phi_n\rangle \ , \ E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{|\langle\phi_m|\hat{H}_p|\phi_n\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}$$

در اینجا داریم:

$$E_1^{(0)} = -5E_0 \ , \ E_2^{(0)} = 5E_0 \ , \ E_3^{(0)} = 8E_0 \ , \ E_4^{(0)} = -8E_0$$

و:

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} , \ |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} , \ |\phi_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} , \ |\phi_4\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

و:

$$E_1^{(1)} = \langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}E_0\begin{pmatrix}0&3\lambda&0&0\\3\lambda&0&0&0\\0&0&0&-\lambda\\0&0&-\lambda&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = E_0\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\lambda\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$E_2^{(1)} = \langle\phi_2|\hat{H}_p|\phi_2\rangle = \begin{pmatrix}0&1&0&0\end{pmatrix}E_0\begin{pmatrix}0&3\lambda&0&0\\3\lambda&0&0&0\\0&0&0&-\lambda\\0&0&-\lambda&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = E_0\begin{pmatrix}0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\lambda\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_{۲}^{(۱)}=\langle\phi_{۲}|\hat{H}_{p}|\phi_{۲}\rangle=\begin{pmatrix}۰ & ۰ & ۱ & ۰\end{pmatrix}E_{۰}\begin{pmatrix}۰ & ۳\lambda & ۰ & ۰\\ ۳\lambda & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & -\lambda\\ ۰ & ۰ & -\lambda & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ ۱\\ ۰\end{pmatrix}=E_{۰}\begin{pmatrix}۰ & ۰ & ۱ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ ۰\\ -\lambda\end{pmatrix}=۰$$

$$E_{۴}^{(۱)}=\langle\phi_{۴}|\hat{H}_{p}|\phi_{۴}\rangle=\begin{pmatrix}۰ & ۰ & ۰ & ۱\end{pmatrix}E_{۰}\begin{pmatrix}۰ & ۳\lambda & ۰ & ۰\\ ۳\lambda & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & -\lambda\\ ۰ & ۰ & -\lambda & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ ۰\\ ۱\end{pmatrix}=E_{۰}\begin{pmatrix}۰ & ۰ & ۰ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ -\lambda\\ ۰\end{pmatrix}=۰$$

و:

$$\langle\phi_{۱}|\hat{H}_{p}|\phi_{۲}\rangle=\langle\phi_{۲}|\hat{H}_{p}|\phi_{۱}\rangle=E_{۰}\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۳\lambda\\ ۰\\ ۰\\ ۰\end{pmatrix}=۳E_{۰}\lambda$$

$$\langle\phi_{۱}|\hat{H}_{p}|\phi_{۳}\rangle=\langle\phi_{۳}|\hat{H}_{p}|\phi_{۱}\rangle=E_{۰}\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ ۰\\ -\lambda\end{pmatrix}=۰$$

$$\langle\phi_{۱}|\hat{H}_{p}|\phi_{۴}\rangle=\langle\phi_{۴}|\hat{H}_{p}|\phi_{۱}\rangle=E_{۰}\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ -\lambda\\ ۰\end{pmatrix}=۰$$

$$\langle\phi_{۲}|\hat{H}_{p}|\phi_{۳}\rangle=\langle\phi_{۳}|\hat{H}_{p}|\phi_{۲}\rangle=E_{۰}\begin{pmatrix}۰ & ۱ & ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ ۰\\ -\lambda\end{pmatrix}=۰$$

$$\langle\phi_{۲}|\hat{H}_{p}|\phi_{۴}\rangle=\langle\phi_{۴}|\hat{H}_{p}|\phi_{۲}\rangle=E_{۰}\begin{pmatrix}۰ & ۱ & ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ -\lambda\\ ۰\end{pmatrix}=۰$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle\phi_۳|\hat{H}_p|\phi_۴\rangle=\langle\phi_۴|\hat{H}_p|\phi_۳\rangle=E_۰\begin{pmatrix}۰ & ۰ & ۱ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ -\lambda\\ ۰\end{pmatrix}=-E_۰\lambda$$

و بنابراین:

$$E_۱^{(۲)}=\frac{\left|\langle\phi_۱|\hat{H}_p|\phi_۲\rangle\right|^۲}{E_۱^{(۰)}-E_۲^{(۰)}}+\frac{\left|\langle\phi_۱|\hat{H}_p|\phi_۳\rangle\right|^۲}{E_۱^{(۰)}-E_۳^{(۰)}}+\frac{\left|\langle\phi_۱|\hat{H}_p|\phi_۴\rangle\right|^۲}{E_۱^{(۰)}-E_۴^{(۰)}}=\frac{(۳E_۰\lambda)^۲}{-۵E_۰-۵E_۰}+\frac{۰}{-۵E_۰-۸E_۰}+\frac{۰}{-۵E_۰+۸E_۰}$$

$$=-\frac{۹}{۱۰}\lambda^۲E_۰$$

$$E_۲^{(۲)}=\frac{\left|\langle\phi_۲|\hat{H}_p|\phi_۱\rangle\right|^۲}{E_۲^{(۰)}-E_۱^{(۰)}}+\frac{\left|\langle\phi_۲|\hat{H}_p|\phi_۳\rangle\right|^۲}{E_۲^{(۰)}-E_۳^{(۰)}}+\frac{\left|\langle\phi_۲|\hat{H}_p|\phi_۴\rangle\right|^۲}{E_۲^{(۰)}-E_۴^{(۰)}}=\frac{(۳E_۰\lambda)^۲}{۵E_۰+۵E_۰}+۰+۰=\frac{۹}{۱۰}\lambda^۲E_۰$$

$$E_۳^{(۲)}=\frac{\left|\langle\phi_۳|\hat{H}_p|\phi_۱\rangle\right|^۲}{E_۳^{(۰)}-E_۱^{(۰)}}+\frac{\left|\langle\phi_۳|\hat{H}_p|\phi_۲\rangle\right|^۲}{E_۳^{(۰)}-E_۲^{(۰)}}+\frac{\left|\langle\phi_۳|\hat{H}_p|\phi_۴\rangle\right|^۲}{E_۳^{(۰)}-E_۴^{(۰)}}=۰+۰+\frac{(-E_۰\lambda)^۲}{۸E_۰+۸E_۰}=\frac{۱}{۱۶}\lambda^۲E_۰$$

$$E_۴^{(۲)}=\frac{\left|\langle\phi_۴|\hat{H}_p|\phi_۱\rangle\right|^۲}{E_۴^{(۰)}-E_۱^{(۰)}}+\frac{\left|\langle\phi_۴|\hat{H}_p|\phi_۲\rangle\right|^۲}{E_۴^{(۰)}-E_۲^{(۰)}}+\frac{\left|\langle\phi_۴|\hat{H}_p|\phi_۳\rangle\right|^۲}{E_۴^{(۰)}-E_۳^{(۰)}}=۰+۰+\frac{(-E_۰\lambda)^۲}{-۸E_۰-۸E_۰}=-\frac{۱}{۱۶}\lambda^۲E_۰$$

پس تا تصحیح مرتبه‌ی دوم داریم:

$$E_۱=E_۱^{(۰)}+E_۱^{(۱)}+E_۱^{(۲)}=-۵E_۰+۰-\frac{۹}{۱۰}\lambda^۲E_۰=-E_۰\left(۵+\frac{۹}{۱۰}\lambda^۲\right)$$

$$E_۲=E_۲^{(۰)}+E_۲^{(۱)}+E_۲^{(۲)}=۵E_۰+۰+\frac{۹}{۱۰}\lambda^۲E_۰=E_۰\left(۵+\frac{۹}{۱۰}\lambda^۲\right)$$

$$E_۳=E_۳^{(۰)}+E_۳^{(۱)}+E_۳^{(۲)}=۸E_۰+۰+\frac{۱}{۱۶}\lambda^۲E_۰=E_۰\left(۸+\frac{۱}{۱۶}\lambda^۲\right)$$

$$E_۴=E_۴^{(۰)}+E_۴^{(۱)}+E_۴^{(۲)}=-۸E_۰+۰-\frac{۱}{۱۶}\lambda^۲E_۰=-E_۰\left(۸+\frac{۱}{۱۶}\lambda^۲\right)$$

نتایج به‌دست آمده دقیقاً همان نتایج قسمت (ب) هستند.

تمرین ۹-۲۳

انرژی حالت پایه‌ی اتم هیدروژن را به‌وسیله‌ی روش وردشی با استفاده از دو تابع آزمون زیر تخمین بزنید. خطای نسبی آنها را بیابید. آنگاه دو نتیجه را مقایسه کنید و در مورد قابلیت هر تابع آزمون

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

بحث کنید.

(آ)
$$\phi_\alpha=\begin{cases}1-\dfrac{r}{\alpha} & r\le\alpha\\ 0 & r>\alpha\end{cases}$$
که در آن α یک پارامتر قابل تنظیم است. رابطه‌ی میان $\alpha_{\min}$ و شعاع بور پیدا کنید.

(ب)
$$\phi_\alpha(r)=Ae^{-\alpha r^2}$$

حل:

(آ)

ابتدا به محاسبه‌ی $E(\alpha)=\dfrac{\langle\phi_\alpha|\hat{H}|\phi_\alpha\rangle}{\langle\phi_\alpha|\phi_\alpha\rangle}$ می‌پردازیم. در اینجا:

$$\hat{H}=\frac{P^2}{2\mu}-\frac{e^2}{r}$$

پس:

$$\langle\phi_\alpha|\hat{H}|\phi_\alpha\rangle=\langle\phi_\alpha|\frac{P^2}{2\mu}|\phi_\alpha\rangle-e^2\langle\phi_\alpha|\frac{1}{r}|\phi_\alpha\rangle$$

اما با توجه به رابطه‌ی (۹-۱۲۸) داریم:

$$\langle\phi_\alpha|\frac{P^2}{2\mu}|\phi_\alpha\rangle=-\langle\phi_\alpha|\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2|\phi_\alpha\rangle=\frac{\hbar^2}{2\mu}\int\left(\vec{\nabla}\phi_\alpha^*(r)\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\left(\phi_\alpha(r)\right)\right)d^3r$$

و چون:

$$\vec{\nabla}\phi_\alpha^*(r)=\vec{\nabla}\phi_\alpha(r)=\frac{d\phi_\alpha(r)}{dr}\hat{r}=\frac{-1}{\alpha}\hat{r}$$

پس:

$$\langle\phi_\alpha|\frac{p^2}{2\mu}|\phi_\alpha\rangle=\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{4}{3}\pi\alpha^3\right)=\frac{2\pi\hbar^2\alpha}{3\mu}$$

از طرفی:

$$\langle\phi_\alpha|\frac{1}{r}|\phi_\alpha\rangle=\int_0^\alpha\frac{\phi_\alpha^2(r)}{r}4\pi r^2dr=\int_0^\alpha 4\pi r\left(1-\frac{2r}{a}+\frac{r^2}{\alpha^2}\right)dr=4\pi\left(\frac{\alpha^2}{2}-\frac{2\alpha^3}{3\alpha}+\frac{\alpha^4}{4\alpha^2}\right)=\frac{\pi\alpha^2}{3}$$

و:

$$\langle\phi_\alpha|\phi_\alpha\rangle=\int\phi_\alpha^2(r)d^3r=4\pi\int_0^\alpha\left(1-\frac{2r}{\alpha}+\frac{r^2}{\alpha^2}\right)r^2dr=4\pi\left(\frac{\alpha^3}{3}-\frac{2}{\alpha}\frac{\alpha^4}{4}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{\alpha^5}{5}\right)=\frac{2\pi\alpha^3}{15}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

درنتیجه:

$$E(\alpha)=\frac{\frac{۲\pi\hbar^{۲}\alpha}{۳\mu}-\frac{\pi\alpha^{۲}e^{۲}}{۳}}{\frac{۲\pi\alpha^{۲}}{۱۵}}=\frac{۱۵}{۲\pi\alpha^{۲}}\left(\frac{۲\pi\hbar^{۲}\alpha}{۳\mu}-\frac{\pi\alpha^{۲}e^{۲}}{۳}\right)=\frac{۵}{۲}\left(\frac{۲\hbar^{۲}}{\mu\alpha^{۲}}-\frac{e^{۲}}{\alpha}\right)$$

از کمینه کردن $E(\alpha)$ مقدار $\alpha_{\min}=\frac{۴\hbar^{۲}}{\mu e^{۲}}=۴a_{۰}$ حاصل می‌شود و در نتیجه:

$$E_{۰}^{VM}=E(\alpha_{\min})=\frac{۵}{۲}\left[\frac{۲\hbar^{۲}}{\mu}\frac{\mu^{۲}e^{۴}}{۱۶\hbar^{۴}}-e^{۲}\left(\frac{\mu e^{۲}}{۴\hbar^{۲}}\right)\right]=\frac{۵}{۲}\left(\frac{\mu e^{۴}}{۸\hbar^{۲}}-\frac{\mu e^{۴}}{۴\hbar^{۲}}\right)=-\frac{۵}{۱۶}\frac{\mu e^{۴}}{\hbar^{۲}}$$

و:

$$\text{خطای نسبی}=\left|\frac{E_{ground}-E_{۰}^{VM}}{E_{ground}}\right|=\left|\frac{-\frac{۱}{۲}\frac{\mu e^{۴}}{\hbar^{۲}}+\frac{۵}{۱۶}\frac{\mu e^{۲}}{\hbar^{۲}}}{\frac{-۱}{۲}\frac{\mu e^{۲}}{\hbar^{۲}}}\right|=\left|\frac{-۸+۵}{-۸}\right|=\frac{۳}{۸}=۳۷/۵\ \%$$

(ب)

در اینجا داریم:

$$\vec{\nabla}\phi_{\alpha}^{*}(r)=\vec{\nabla}\phi_{\alpha}(r)=\frac{d\phi_{\alpha}(r)}{dr}\hat{r}=-۲\alpha A r e^{-\alpha r^{۲}}$$

پس:

$$\left\langle\phi_{\alpha}\left|\frac{P^{۲}}{۲\mu}\right|\phi_{\alpha}\right\rangle=\frac{\hbar^{۲}}{۲\mu}\int\vec{\nabla}\left(\phi_{\alpha}^{*}(r)\right).\left(\vec{\nabla}\phi_{\alpha}(r)\right)d^{۳}r=\frac{\hbar^{۲}}{۲\mu}(۴\pi)\int_{۰}^{+\infty}۴\alpha^{۲}A^{۲}e^{-۲\alpha r^{۲}}r^{۲}r^{۲}dr$$

$$=\frac{۸\pi\hbar^{۲}\alpha^{۲}A^{۲}}{\mu}\int_{۰}^{+\infty}e^{-۲\alpha r^{۲}}r^{۴}dr=\frac{۸\pi\hbar^{۲}\alpha^{۲}A^{۲}}{\mu}\frac{۳}{۸}\sqrt{\frac{\pi}{(۲\alpha)^{۵}}}$$

از طرفی:

$$\left\langle\phi_{\alpha}\left|\frac{۱}{r}\right|\phi_{\alpha}\right\rangle=\int_{۰}^{+\infty}\frac{\phi_{\alpha}^{۲}(r)}{r}d^{۳}r=۴\pi\int_{۰}^{+\infty}\frac{A^{۲}e^{-۲\alpha r^{۲}}}{r}r^{۲}dr=۴\pi A^{۲}\int_{۰}^{+\infty}e^{-۲\alpha r^{۲}}r\,dr=\frac{\pi A^{۲}}{\alpha}$$

و:

$$\left\langle\phi_{\alpha}\middle|\phi_{\alpha}\right\rangle=\int_{۰}^{+\infty}\phi_{\alpha}^{۲}(r)d^{۳}r=۴\pi A^{۲}\int_{۰}^{+\infty}e^{-۲\alpha r^{۲}}r^{۲}dr=۴\pi A^{۲}\left(\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{\pi}{(۲\alpha)^{۳}}}\right)=\pi A^{۲}\sqrt{\frac{\pi}{(۲\alpha)^{۳}}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

درنتیجه:

$$E(\alpha)=\frac{\frac{۳\pi\hbar^{۲}\alpha^{۲}A^{۲}}{\mu}\sqrt{\frac{\pi}{(۲\alpha)^{۴}}}-\frac{\pi A^{۲}e^{۲}}{\alpha}}{\pi A^{۲}\sqrt{\frac{\pi}{(۲\alpha)^{۳}}}}=\frac{۳\hbar^{۲}\alpha}{\mu}-\frac{۲e^{۲}\sqrt{۲}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}$$

از کمینه کردن $E(\alpha)$ مقدار $\alpha_{\min}=\frac{۲e^{۴}\mu^{۲}}{۹\pi\hbar^{۲}}=\frac{۲}{۹\pi a_{۰}^{۲}}$ حاصل می‌شود و در نتیجه:

$$E_{۰}^{VM}=E(\alpha_{\min})=\frac{۳\hbar^{۲}}{\mu}\frac{۲e^{۴}\mu^{۲}}{۹\pi\hbar^{۴}}-\frac{۲e^{۲}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{۲}e^{۲}\mu}{۳\sqrt{\pi}\hbar^{۲}}=\frac{۲}{۳}\frac{\mu e^{۴}}{\pi\hbar^{۲}}-\frac{۴e^{۴}\mu}{۳\pi\hbar^{۲}}=\frac{-۲\mu e^{۴}}{۳\pi\hbar^{۲}}$$

و:

$$\text{خطای نسبی}=\left|\frac{E_{ground}-E_{۰}^{VM}}{E_{ground}}\right|=\left|\frac{\frac{-۱}{۲}+\frac{۲}{۳\pi}}{\frac{-۱}{۲}}\right|=\left|۱-\frac{۴}{۳\pi}\right|\simeq ۵۷/۵\ \%$$

بنابراین، خطای نسبی با استفاده از تابع آزمون قسمت (آ) کمتر است و لذا این تابع برای روش وردشی مناسب‌تر می‌باشد.

تمرین ۹-۲۴

(آ) اختلال مرتبه اول انرژی را برای nاُمین حالت برانگیخته‌ی یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی که در اختلال کوچک زیر قرار دارد محاسبه کنید:

$$\hat{H}_{p}=\lambda\left(V_{۰}\hat{x}^{۳}+V_{۱}\hat{x}^{۴}\right)$$

که در آن $V_{۰}$ و $V_{۱}$ و a ثابت هستند و $\lambda\ll ۱$.

(ب) با استفاده از رابطه‌ی به دست آمده در(آ) انرژی‌های سه حالت نخست (یعنی $n=۰,۱,۲$) را با اختلال مرتبه‌ی اول پیدا کنید.

حل:

(آ)

از آنجا که ویژه حالات (ویژه توابع) نوسانگر هماهنگ یک بُعدی فاقد تبهگنی هستند لذا از نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن استفاده می‌کنیم:

$$E_{n}=E_{n}^{(۰)}+E_{n}^{(۱)}+\dots$$

که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_n^{(0)} = \hbar w\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$E_n^{(1)} = \langle \phi_n | \hat{H}_p | \phi_n \rangle$$

که $|\phi_n\rangle$ ویژه حالت سطح n اُم نوسانگر هماهنگ یک بعدی است. چون به‌ازای n زوج (فرد)، ویژه توابع نوسانگر هماهنگ یک بعدی، زوج (فرد) هستند لذا حاصل $\langle \phi_n | \hat{x}^3 | \phi_n \rangle$ صفر خواهد بود و بنابراین:

$$E_n^{(1)} = \lambda V_0 \langle \phi_n | x^2 | \phi_n \rangle + \lambda V_1 \langle \phi_n | x^4 | \phi_n \rangle = \lambda V_1 \langle \phi_n | x^4 | \phi_n \rangle$$

با توجه به اینکه:

$$x^2 | \phi_n \rangle = \frac{\hbar}{2mw}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1\right) | \phi_n \rangle$$

که در آن $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ عملگرهای پایین برنده و بالا برنده هستند که اثر آنها بر $|\phi_n\rangle$ به‌صورت زیر است:

$$\hat{a} | \phi_n \rangle = \sqrt{n} | \phi_{n-1} \rangle$$

$$\hat{a}^\dagger | \phi_n \rangle = \sqrt{n+1} | \phi_{n+1} \rangle$$

پس تعریف می‌کنیم:

$$|\beta\rangle = x^2 | \phi_n \rangle = \frac{\hbar}{2mw}\left(\sqrt{n}\sqrt{n-1} | \phi_{n-2} \rangle + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} | \phi_{n+2} \rangle + (2n+1) | \phi_n \rangle\right)$$

و از این رابطه نتیجه می‌شود که:

$$\langle \phi_n | x^4 | \phi_n \rangle = \langle \beta | \beta \rangle$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2mw}\right)^2 \left[n(n-1) + (n+1)(n+2) + (2n+1)^2\right] = \frac{3}{4}\left(\frac{\hbar}{mw}\right)^2 \left[(n+1)^2 + n^2\right]$$

پس:

$$E_n^{(1)} = \frac{3}{4}\lambda V_1 \left(\frac{\hbar}{mw}\right)^2 \left[(n+1)^2 + n^2\right]$$

و:

$$E_n = \hbar w\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}\lambda V_1 \left(\frac{\hbar}{mw}\right)^2 \left[n^2 + (n+1)^2\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

به‌ازای $n = ۰,۱,۲$ نتیجه می‌شود که:

$$E_۰ = \frac{۱}{۲}\hbar w + \frac{۳}{۴}\lambda V_۱\left(\frac{\hbar}{m w}\right)^۲$$

$$E_۱ = \frac{۳}{۲}\hbar w + \frac{۱۵}{۴}\lambda V_۱\left(\frac{\hbar}{m w}\right)^۲$$

$$E_۲ = \frac{۵}{۲}\hbar w + \frac{۳۹}{۴}\lambda V_۱\left(\frac{\hbar}{m w}\right)^۲$$

تمرین ۹-۲۵

با استفاده از تابع آزمون $\Psi(x,\alpha)=\begin{cases} A\left(\alpha^۲ - x^۲\right)^۲ & |x|\le\alpha \\ ۰ & |x|\ge\alpha \end{cases}$ انرژی حالت پایه‌ی یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی را با روش وردشی تخمین بزنید. α یک پارامتر قابل تنظیم و A ثابت بهنجارش است. خطای نسبی را محاسبه و دقت نتیجه را ارزیابی کنید.

حل:

ابتدا به محاسبه‌ی $E(\alpha)=\dfrac{\langle\psi_۰|\hat{H}|\psi_۰\rangle}{\langle\psi_۰|\psi_۰\rangle}$ می‌پردازیم. در اینجا $\hat{H}$ عملگر هامیلتونی است که برای نوسانگر هماهنگ ساده در یک بُعد عبارتست از:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{d^۲}{dx^۲} + \frac{۱}{۲}m w^۲ \hat{x}^۲$$

پس:

$$\langle\psi_۰|\hat{H}|\psi_۰\rangle = -\langle\psi_۰|\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{d^۲}{dx^۲}|\psi_۰\rangle = \frac{۱}{۲}m w^۲\langle\psi_۰|x^۲|\psi_۰\rangle$$

طبق رابطه‌ی (۹-۱۲۴) داریم:

$$-\langle\psi_۰|\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{d^۲}{dx^۲}|\psi_۰\rangle = \frac{\hbar^۲}{۲m}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{d\psi(x)}{dx}\right|^۲ dx$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

در نتیجه:

$$-\left\langle \psi_{\circ}\middle|\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}\middle|\psi_{\circ}\right\rangle = \frac{\hbar^{۲}}{۲m}\int_{-a}^{+a}\left|۲A\left(-۲x\right)\left(a^{۲}-x^{۲}\right)\right|^{۲}dx = \frac{۱۶\hbar^{۲}\left|A\right|^{۲}}{m}\int_{\circ}^{a}x^{۲}\left(a^{۲}-x^{۲}\right)^{۲}dx$$

$$= \frac{۱۶\hbar^{۲}\left|A\right|^{۲}}{m}\int_{\circ}^{a}\left(a^{۴}x^{۲}-۲a^{۲}x^{۴}+x^{۶}\right)dx = \frac{۱۶\hbar^{۲}\left|A\right|^{۲}}{m}\left[a^{۴}\left(\frac{a^{۳}}{۳}\right)-۲a^{۲}\left(\frac{a^{۵}}{۵}\right)+\frac{a^{۷}}{۷}\right]$$

$$= \frac{۱۲۸\hbar^{۲}\left|A\right|^{۲}}{۱۰۵m}$$

از طرفی:

$$\left\langle \psi_{\circ}\middle|x^{۲}\middle|\psi_{\circ}\right\rangle = \int x^{۲}\left|\psi_{\circ}\left(x\right)\right|^{۲}dx = \int_{-a}^{+a}\left|A\right|^{۲}x^{۲}\left(a^{۲}-x^{۲}\right)^{۴}$$

$$= ۲\left|A\right|^{۲}\int_{\circ}^{a}\left(a^{۸}x^{۲}-۴a^{۶}x^{۴}+۶a^{۴}x^{۶}-۴a^{۲}x^{۸}+x^{۱۰}\right)dx$$

$$= ۲\left|A\right|^{۲}\left[a^{۸}\left(\frac{a^{۳}}{۳}\right)-۴a^{۶}\left(\frac{a^{۵}}{۵}\right)+۶a^{۴}\left(\frac{a^{۷}}{۷}\right)-۴a^{۲}\left(\frac{a^{۹}}{۹}\right)+\frac{a^{۱۱}}{۱۱}\right] = \frac{۲۵۶\left|A\right|^{۲}a^{۱۱}}{۳۴۶۵}$$

پس نتیجه می‌شود که:

$$\left\langle \psi_{\circ}\middle|\hat{H}\middle|\psi_{\circ}\right\rangle = \frac{۱۲۸\hbar^{۲}\left|A\right|^{۲}a^{۷}}{۱۰۵m}+\frac{۱۲۸mw^{۲}\left|A\right|^{۲}a^{۱۱}}{۳۴۶۵}$$

همچنین داریم:

$$\left\langle \psi_{\circ}\middle|\psi_{\circ}\right\rangle = \int\left|\psi_{\circ}\left(x\right)\right|^{۲}dx = \left|A\right|^{۲}\int_{-a}^{+a}\left(a^{۲}-x^{۲}\right)^{۴}dx$$

$$= ۲\left|A\right|^{۲}\int_{\circ}^{a}\left(a^{۸}-۴a^{۶}x^{۲}+۶a^{۴}x^{۴}-۴a^{۲}x^{۶}+x^{۸}\right)dx$$

$$= ۲\left|A\right|^{۲}\left[a^{۸}a-۴a^{۶}\left(\frac{a^{۳}}{۳}\right)+۶a^{۴}\left(\frac{a^{۵}}{۵}\right)-۴a^{۲}\left(\frac{a^{۷}}{۷}\right)+\frac{a^{۹}}{۹}\right] = \frac{۲۵۶\left|A\right|^{۲}a^{۹}}{۳۱۵}$$

در نتیجه:

$$E\left(a\right) = \frac{\frac{۱۲۸\hbar^{۲}\left|A\right|^{۲}a^{۷}}{۱۰۵m}+\frac{۱۲۸mw^{۲}\left|A\right|^{۲}a^{۱۱}}{۳۴۶۵}}{\frac{۲۵۶\left|A\right|^{۲}a^{۹}}{۳۱۵}} = \frac{۳}{۲}\frac{\hbar^{۲}}{ma^{۲}}+\frac{۱}{۲۲}mw^{۲}a^{۲}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

از کمینه کردن $E(\alpha)$ مقدار $\alpha_0 = \left(\frac{33\hbar^2}{m^2w^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ حاصل می‌شود و در نتیجه:

$$E_0^{VM} = E(\alpha_0) = \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{m^2w^2}{33\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{22}mw^2\left(\frac{33\hbar^2}{mw^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{33}} + \frac{1}{22}\sqrt{33}\right)\hbar w = \frac{\sqrt{33}}{11}\hbar w$$

یا:

$$E_0^{VM} \simeq 0/52\hbar w$$

و لذا:

$$\text{خطای نسبی} = \left|\frac{E_0^{VM} - E_{ground}}{E_{ground}}\right| = \left|\frac{0/52\hbar w - 0/5\hbar w}{0/5\hbar w}\right| = 0/04 = 4\,\%$$

تمرین ۹-۲۶

با استفاده از تقریب WKB ضریب عبور یک ذره به جرم m و انرژی E را تخمین بزنید که در حال حرکت در پتانسیل زیر است:

$$V(x) = \begin{cases} V_0\left(1+\frac{x}{a}\right) & -a < x < 0 \\ V_0\left(1-\frac{x}{a}\right) & 0 < x < a \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

به ازای $0 < E < V_0$ این پتانسیل را رسم کنید.

حل:

در تقریب WKB ضریب عبور از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

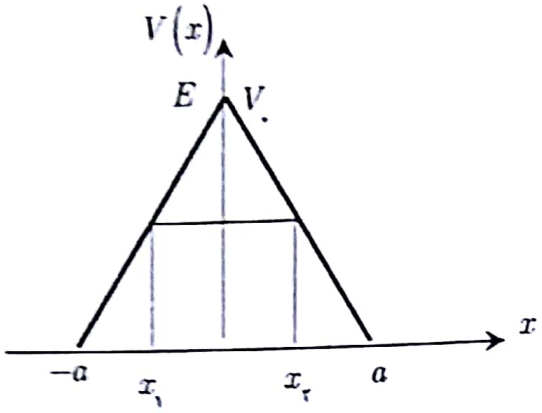
$$T = e^{-2\gamma} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m\left(V(x)-E\right)}dx$$

که در این رابطه x_1 و x_2 نقاط بازگشت هستند. در اینجا نقاط بازگشت عبارتند از:

$$-x_1 = x_2 = a\left(1-\frac{E}{V_0}\right)$$

این نقاط در شکل زیر نشان داده شده‌اند.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner



حال به محاسبه‌ی γ می‌پردازیم:

$$\gamma=\frac{۱}{\hbar}\int_{-x_۲}^{x_۲}\sqrt{۲m\left(V(x)-E\right)}dx=\frac{۲}{\hbar}\int_{۰}^{x_۲}\sqrt{۲m\left[V_۰\left(۱-\frac{x}{a}\right)-E\right]}dx$$

$$=\frac{۲}{\hbar}\left(-\frac{a}{۲mV_۰}\right)\frac{۲}{۳}(۲m)^{\frac{۱}{۲}}\left[\left(V_۰\left(۱-\frac{x}{a}\right)-E\right)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۰}^{x_۲}=\frac{-\frac{۳}{۲}a(۲m)^{\frac{۱}{۲}}}{\hbar mV_۰}\left\{\left[V_۰\left(۱-\frac{a\left(۱-\frac{E}{V_۰}\right)}{a}\right)-E\right]^{\frac{۳}{۲}}-\left(V_۰-E\right)^{\frac{۳}{۲}}\right\}$$

$$=\frac{۲a}{۳\hbar mV_۰}\left[۲m\left(V_۰-E\right)\right]^{\frac{۳}{۲}}$$

و بنابراین ضریب عبور T عبارتست از:

$$T=\exp\left\{\frac{-۴a}{۳\hbar mV_۰}\left[۲m\left(V_۰-E\right)\right]^{\frac{۳}{۲}}\right\}$$

تمرین ۹-۲۷

با استفاده از روش وردشی انرژی حالت پایه‌ی یک نوسانگر هماهنگ یک بعدی را با درنظر گرفتن تابع آزمون زیر تخمین بزنید :

$$\Psi_۰(x,\alpha)=A\left(۱+\alpha|x|\right)e^{-\alpha|x|}$$

که در آن α یک پارامتر قابل تنظیم و A ثابت بهنجارش است.

حل:

ابتدا به محاسبه‌ی $E(\alpha)=\dfrac{\langle\psi_۰|\hat{H}|\psi_۰\rangle}{\langle\psi_۰|\psi_۰\rangle}$ می‌پردازیم. در مورد نوسانگر هماهنگ یک بعدی، عملگر هامیلتونی $\hat{H}$ عبارتست از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}+\frac{۱}{۲}m\,w^{۲}x^{۲}$$

پس:

$$\langle\psi_{۰}|\hat{H}|\psi_{۰}\rangle=-\langle\psi_{۰}|\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}|\psi_{۰}\rangle+\frac{۱}{۲}m\,w^{۲}\langle\psi_{۰}|x^{۲}|\psi_{۰}\rangle$$

اما:

$$\langle\psi_{۰}|x^{۲}|\psi_{۰}\rangle=\int x^{۲}|\psi_{۰}(x)|^{۲}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{۲}|A|^{۲}\left(۱+\alpha|x|\right)^{۲}e^{-۲\alpha|x|}dx$$
$$=۲|A|^{۲}\int_{۰}^{+\infty}\left(x^{۲}+۲\alpha x^{۳}+\alpha^{۲}x^{۴}\right)e^{-۲\alpha x}dx$$

اما:

$$\int_{۰}^{+\infty}x^{۲}e^{-۲\alpha x}dx=\left[\frac{-e^{-۲\alpha x}}{۲\alpha}\left(x^{۲}+\frac{x}{\alpha}+\frac{۱}{۲\alpha^{۲}}\right)\right]_{۰}^{+\infty}=\frac{۱}{۴\alpha^{۳}}$$

$$\int_{۰}^{+\infty}x^{۳}e^{-۲\alpha x}dx=\left[\frac{e^{-۲\alpha x}}{-۲\alpha}\left(x^{۳}+\frac{۳x^{۲}}{۲\alpha}+\frac{۳x}{۴\alpha^{۲}}+\frac{۱}{۸\alpha^{۳}}\right)\right]_{۰}^{+\infty}=\frac{۱}{۱۶\alpha^{۴}}$$

$$\int_{۰}^{+\infty}x^{۴}e^{-۲\alpha x}dx=\left[\frac{e^{-۲\alpha x}}{-۲\alpha}\left(x^{۴}+\frac{۲x^{۳}}{\alpha}+\frac{۳x^{۲}}{۲\alpha^{۲}}+\frac{x}{۲\alpha^{۳}}+\frac{۱}{۱۶\alpha^{۴}}\right)\right]_{۰}^{+\infty}=\frac{۱}{۳۲\alpha^{۵}}$$

و درنتیجه:

$$\langle\psi_{۰}|x^{۲}|\psi_{۰}\rangle=۲|A|^{۲}\left(\frac{۱}{۴\alpha^{۳}}+\frac{۲\alpha}{۱۶\alpha^{۴}}+\frac{\alpha^{۲}}{۳۲\alpha^{۵}}\right)=\frac{۱۳|A|^{۲}}{۱۶\alpha^{۳}}$$

با توجه به رابطه‌ی (۹-۱۲۴) داریم:

$$-\langle\psi_{۰}|\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}|\psi_{۰}\rangle=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{d\psi_{۰}(x)}{dx}\right|^{۲}dx=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|-A\alpha^{۲}xe^{-\alpha(x)}\right|^{۲}dx$$
$$=\frac{\hbar^{۲}|A|^{۲}\alpha^{۴}}{۲m}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{۲}e^{-۲\alpha|x|}dx=\frac{\hbar^{۲}|A|^{۲}\alpha^{۲}}{m}\int_{۰}^{+\infty}x^{۲}e^{-۲\alpha x}dx$$
$$=\frac{\hbar^{۲}|A|^{۲}\alpha^{۴}}{m}\frac{۱}{۴\alpha^{۳}}=\frac{\hbar^{۲}|A|^{۲}\alpha}{۴m}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

بنابراین:

$$\langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle = \frac{13 m w^2 |A|^2}{32 \alpha^2} + \frac{\hbar^2 |A|^2}{4 m \alpha}$$

از طرفی:

$$\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = \int |\psi_0(x)|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + 2\alpha |x| + \alpha^2 x^2\right) e^{-2\alpha|x|} dx$$
$$= 2|A|^2 \int_0^{+\infty} \left(1 + 2\alpha x + \alpha^2 x^2\right) e^{-2\alpha x} dx$$

و چون:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha x} dx = \left[\frac{-1}{2\alpha} e^{-2\alpha x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-2\alpha x} dx = \left[\frac{e^{-2\alpha x}}{-2\alpha}\left(x + \frac{1}{2\alpha}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4\alpha^2}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2\alpha x} dx = \frac{1}{4\alpha^3}$$

لذا:

$$\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 2|A|^2 \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{2\alpha}{4\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{4\alpha^3}\right) = \frac{5|A|^2}{2\alpha}$$

و نتیجه می‌شود که:

$$E(\alpha) = \frac{\frac{13 m w^2 |A|^2}{32\alpha^2} + \frac{\hbar^2 |A|^2 \alpha}{4m}}{\frac{5|A|^2}{2\alpha}} = \frac{13 m w^2}{80 \alpha^2} + \frac{\hbar^2 \alpha^2}{10 m}$$

مقدار کمینه‌ی $E(\alpha)$ به‌ازای $\alpha_0 = \left(\frac{65 m^2 w^2}{40 \hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ حاصل می‌شود. پس:

$$E_0^{VM} = E(\alpha_0) = \frac{13 m w^2}{80}\left(\frac{40\hbar^2}{65 m^2 w^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\hbar^2}{10 m}\left(\frac{65 m^2 w^2}{40 \hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{13}{2}}\hbar w$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۹-۲۸

با استفاده از تقریب WKB ضریب عبور ذره‌ای به جرم m و انرژی E را تخمین بزنید که در حال حرکت در پتانسیل زیر است:

$$V(x)=\begin{cases} V_0\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right) & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$$

و در آن $0<E\le V_0$.

حل:

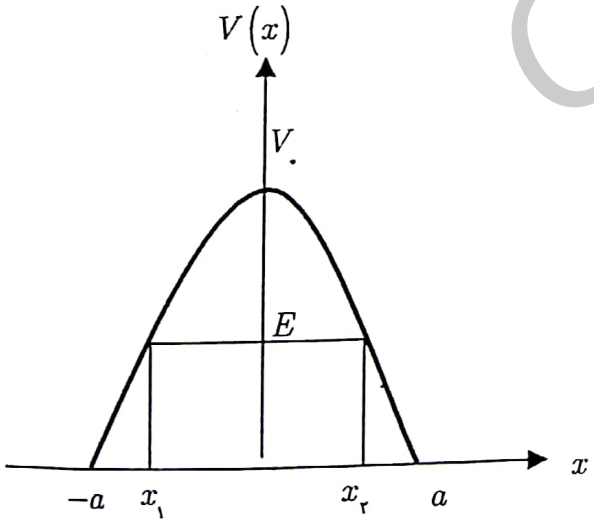
در تقریب WKB ضریب عبور از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$T=e^{-2\gamma}\ ,\ \gamma=\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m\left(V(x)-E\right)}\,dx$$

که در این رابطه، x_1 و x_2 نقاط بازگشتی هستند که از شرط $E=V(x)$ به‌دست می‌آیند. در اینجا نقاط بازگشتی عبارتند از:

$$-x_1=x_2=a\sqrt{1-\frac{E}{V_0}}$$

این نقاط در شکل نشان داده شده‌اند:



حال به محاسبه‌ی γ می‌پردازیم:

$$\gamma=\frac{1}{\hbar}\int_{-x_2}^{x_2}\sqrt{2m\left[V_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-E\right]}\,dx=\frac{2}{\hbar}\int_0^{x_2}\sqrt{2m\left[V_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-E\right]}\,dx$$

$$=\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m\left(V_0-E\right)}\int_0^{x_2}\left(1-\frac{V_0}{V_0-E}\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

با تغییر متغیر $\sin\theta = \sqrt{\frac{V_0}{V_0 - E}}\frac{x}{a}$ نتیجه می‌شود که:

$$\gamma = \frac{2}{\hbar}\sqrt{2m\left(V_0 - E\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{\frac{V_0 - E}{V_0}}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{a}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{V_0}}\left(V_0 - E\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{a}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{V_0}}\left(V_0 - E\right)\left|\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{V_0}}\left(V_0 - E\right)\frac{\pi}{2}$$

و بنابراین ضریب عبور T عبارتست از:

$$T = \exp\left[-\frac{a\pi}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{V_0}}\left(V_0 - E\right)\right]$$

تمرین ۹-۲۹

با استفاده از تقریب WKB ترازهای انرژی ذره‌ای به جرم m را بیابید که در حال حرکت در پتانسیل زیر است:

$$V(x) = \begin{cases} V_0\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

حل:

در اینجا باید از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$$\oint p\left(x, E_n\right)dx = 2\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m\left(E_n - V\left(x\right)\right)}\,dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)h$$

که x_1 و x_2 نقاط بازگشت هستند و در اینجا عبارتند از:

$$-x_1 = x_2 = a\sqrt{\frac{E}{V_0} + 1}$$

پس:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)h = 4\int_0^{x_2}\sqrt{2m\left[E_n - V_0\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\right]}\,dx = 4\int_0^{x_2}\sqrt{2m\left(E_n + V_0\right) - 2mV_0\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

$$= 4\sqrt{2m\left[E_n + V_0\right]}\int_0^{x_2}\left(1 - \frac{V_0}{V_0 + E}\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

با تغییر متغیر $\sin\theta = \sqrt{\frac{V_0}{V_0 + E}}\frac{x}{a}$ نتیجه می‌شود که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)h = 4\sqrt{2m\left(E_n+V_0\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{\frac{V_0+E_n}{V_0}}\cos^2\theta\, d\theta = 2a\sqrt{\frac{2m}{V_0}}\left(E_n+V_0\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= 2a\sqrt{\frac{2m}{V_0}}\left(E_n+V_0\right)\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a\pi\sqrt{\frac{2m}{V_0}}\left(E_n+V_0\right)$$

و یا:

$$E_n = -V_0 + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)h}{a\pi}\sqrt{\frac{V_0}{2m}} = -V_0 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{2V_0}{ma^2}}$$

تمرین ۹- ۳۰

ذره‌ای به جرم m در حال حرکت در پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی $V(x)=\frac{m\omega^2x^2}{2}$ می‌باشد.

(آ) انرژی حالت پایه و

(ب) انرژی نخستین حالت برانگیخته

را تا اختلال مرتبه‌ی اول محاسبه کنید که در آن یک اختلال کوچک $\hat{H}_p=\lambda\delta(x)$ با $\lambda\ll 1$ به پتانسیل افزوده می‌شود.

حل:

با استفاده از نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن تا تصحیح مرتبه‌ی اول داریم:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)}$$

که در اینجا:

$$E_n^{(0)} = \hbar w\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

و

$$E_n^{(1)} = \left\langle \phi_n \middle| \hat{H}_p \middle| \phi_n \right\rangle$$

که $|\phi_n\rangle$ ویژه حالت مربوط به سطح nام نوسانگر هماهنگ ساده است. پس:

(آ)

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)}$$

$$E_0^{(1)} = \left\langle \phi_0 \middle| \hat{H}_p \middle| \phi_0 \right\rangle = \int \lambda\phi_0^2(x)\delta(x)\,dx = \lambda\phi_0^2(0)$$

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

اما طبق رابطه‌ی (۴-۱۵۸) داریم:

$$\phi_{\circ}(x)=\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,x_{\circ}}}\exp\left(\frac{-x^{۲}}{۲x_{\circ}^{۲}}\right)$$

که در آن $x_{\circ}=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. پس:

$$E_{\circ}^{(۱)}=\lambda\left|\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,x_{\circ}}}e^{\circ}\right|^{۲}=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}\,x_{\circ}}$$

و در نتیجه:

$$E_{\circ}=\frac{\hbar\omega}{۲}+\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}\,x_{\circ}}$$

(ب)

$$E_{۱}=E_{۱}^{(\circ)}+E_{۱}^{(۱)}$$

$$E_{۱}^{(۱)}=\langle\phi_{۱}|\hat{H}_{p}|\phi_{۱}\rangle=\lambda\phi_{۱}^{۲}(\circ)$$

طبق رابطه‌ی (۴-۱۶۰):

$$\phi_{۱}(x)=\sqrt{\frac{۲}{\sqrt{\pi}\,x_{\circ}}}\,x\exp\left(\frac{-x^{۲}}{۲x_{\circ}^{۲}}\right)$$

پس:

$$E_{۱}^{(۱)}=\lambda\times\circ=\circ$$

و در نتیجه:

$$E_{۱}=\frac{۳}{۲}\hbar\omega+\circ=\frac{۳}{۲}\hbar\omega$$

تمرین ۹-۳۱

ذره‌ای به جرم m در پتانسیل نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی $V(x)=\frac{m\omega^{۲}x^{۲}}{۲}$ حرکت می‌کند.

(آ) انرژی حالت پایه و

(ب) انرژی اولین حالت برانگیختگی را تا اختلال مرتبه‌ی اول در حالی‌که اختلال کوچک $\hat{H}_{p}=\lambda x'$ با این پتانسیل جمع شود به دست آورید $(\lambda\ll۱)$.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

با استفاده از نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن تا تصحیح مرتبه‌ی اول داریم:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)}$$

که در اینجا:

$$E_n^{(0)} = \hbar w\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$E_n^{(1)} = \left\langle \phi_n \middle| \hat{H}_p \middle| \phi_n \right\rangle$$

که $\left|\phi_n\right\rangle$ ویژه حالت مربوط به سطح nام نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی است. طبق رابطه‌ی (۴-۱۸۴) داریم:

$$x^2\left|\phi_n\right\rangle = \frac{\hbar}{2mw}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\right)\left|\phi_n\right\rangle$$

و چون:

$$\hat{a}\left|\phi_n\right\rangle = \sqrt{n}\left|\phi_{n-1}\right\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger\left|\phi_n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|\phi_{n+1}\right\rangle$$

لذا:

$$x^2\left|\phi_n\right\rangle = \frac{\hbar}{2mw}\left(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\left|\phi_{n-2}\right\rangle + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\left|\phi_{n+2}\right\rangle + (2n+1)\left|\phi_n\right\rangle\right)$$

حال با استفاده از رابطه‌ی $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)$، $x^2\left|\phi_n\right\rangle$ را می‌یابیم.

$$x^3\left|\phi_n\right\rangle = x\left(x^2\left|\phi_n\right\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\left[\frac{\hbar}{2mw}\left(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\left|\phi_{n-2}\right\rangle + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\left|\phi_{n+2}\right\rangle + (2n+1)\left|\phi_n\right\rangle\right)\right]$$

$$+\sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-2}\left|\phi_{n-3}\right\rangle + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+3}\left|\phi_{n+3}\right\rangle + (2n+1)\sqrt{n+1}\left|\phi_{n+1}\right\rangle\Big]$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2mw}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg[\sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-2}\left|\phi_{n-3}\right\rangle + 3n^{\frac{3}{2}}\left|\phi_{n-1}\right\rangle + 3(n+1)^{\frac{3}{2}}\left|\phi_{n+1}\right\rangle$$

$$+\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+3}\left|\phi_{n+3}\right\rangle\Bigg]$$

اگر تعریف $\left|\beta\right\rangle \equiv x^3\left|\phi_n\right\rangle$ را در نظر بگیریم آنگاه:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle\phi_n|x^۶|\phi_n\rangle=\langle\beta|\beta\rangle=\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^۳\left[n(n-۱)(n-۲)+۹n^۳+۹(n+۱)^۳+(n+۱)(n+۲)(n+۳)\right]$$

پس:

(آ)

$$E_۰=E_۰^{(۰)}+E_۰^{(۱)}=\frac{\hbar w}{۲}+۱۵\lambda\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^۳$$

(ب)

$$E_۱=E_۱^{(۰)}+E_۱^{(۱)}=\frac{۳}{۲}\hbar w+۱۰۵\lambda\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^۳$$

تمرین ۹-۳۲

ذره‌ای به جرم m در پتانسیل نوسانگر هماهنگ سه بعدی $V(x)=\frac{m\omega^۲(x^۲+y^۲+z^۲)}{۲}$ در حال حرکت است. انرژی حالت برانگیخته‌ی nاُم را تااختلال مرتبه‌ی اول هنگامی‌که یک اختلال کوچک $\hat{H}_p=\lambda\hat{X}^۲\hat{Y}^۴\hat{Z}^۲$ به پتانسیل $(\lambda\ll۱)$ افزوده شود محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{aligned}E_n^{(۱)}&=\langle n_x,n_y,n_z|H_p|n_x,n_y,n_z\rangle\\&=\lambda\langle n_x,n_y,n_z|x^۲y^۴z^۲|n_x,n_y,n_z\rangle\\&=\lambda\langle n_x|x^۲|n_x\rangle\langle n_y|y^۴|n_y\rangle\langle n_z|z^۲|n_z\rangle\end{aligned}$$

با توجه به اینکه می‌دانیم:

$$\langle n_x|x^۲|n_x\rangle=\frac{\hbar}{۲mw}(۲n+۱)$$

$$\langle n_y|y^۴|n_y\rangle=\frac{۳}{۲}\left(\frac{\hbar}{mw}\right)^۲\left(\frac{۱}{۲}+n+n^۲\right)$$

$$\langle n_z|z^۲|n_z\rangle=\frac{\hbar}{۲mw}(۲n+۱)$$

$$E_n^{(۱)}=\frac{۳}{۲}\lambda\left(\frac{\hbar}{۲mw}\right)^۲\left(\frac{\hbar}{mw}\right)^۲(۲n+۱)^۲\left(\frac{۱}{۲}+n+n^۲\right)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۹-۳۳

با استفاده از دو تابع آزمون زیر:

(آ) $Ae^{-\alpha|x|}$

(ب) $A(1+\alpha|x|)e^{-\alpha|x|}$

و به‌وسیله‌ی روش وردشی، انرژی حالت پایه‌ی ذره‌ای به جرم m را که در حال حرکت در پتانسیل یک بعدی $V(x)=\lambda|x|$ است تخمین بزنید. α پارامتر مقیاس، λ ثابت و A ثابت بهنجارش است. نتایج به‌دست آمده را مقایسه کنید.

حل:

(آ)

ابتدا به محاسبه‌ی $E(\alpha)=\dfrac{\langle\phi_\alpha|\hat{H}|\phi_\alpha\rangle}{\langle\phi_n|\phi_n\rangle}$ می‌پردازیم. در اینجا داریم:

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\lambda|x|$$

پس:

$$\langle\phi_\alpha|\hat{H}|\phi_\alpha\rangle=-\langle\phi_\alpha|\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}|\phi_\alpha\rangle+\lambda\langle\phi_\alpha||x||\phi_\alpha\rangle$$

اما:

$$\langle\phi_\alpha||x||\phi_\alpha\rangle=\int|x||\phi_\alpha(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x||A|^2e^{-2\alpha|x|}dx=2|A|^2\int_0^{+\infty}xe^{-2\alpha x}dx$$

$$=2|A|^2\left[\frac{e^{-2\alpha x}}{-2\alpha}\left(x+\frac{1}{2\alpha}\right)\right]_0^{+\infty}=2|A|^2\left(\frac{1}{4\alpha^2}\right)=\frac{|A|^2}{2\alpha^2}$$

و:

$$-\langle\phi_\alpha|\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}|\phi_\alpha\rangle=\frac{\hbar^2}{2m}\int\left|\frac{d\phi_\alpha(x)}{dx}\right|^2dx=\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{-\alpha x}{|x|}Ae^{-\alpha x}\right|^2dx$$

$$=\frac{2\hbar^2\alpha^2|A|^2}{2m}\int_0^{+\infty}e^{-2\alpha x}dx=\frac{\hbar^2\alpha^2|A|^2}{m}\left[-\frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha}\right]_0^{+\infty}=\frac{\hbar^2|A|^2\alpha}{2m}$$

و درنتیجه:

$$\langle\phi_\alpha|\hat{H}|\phi_\alpha\rangle=\frac{\lambda|A|^2}{2\alpha^2}+\frac{\hbar^2|A|^2\alpha}{2m}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

از طرفی:

$$\langle \phi_\alpha | \phi_\alpha \rangle = \int |\phi_\alpha(x)|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha|x|} dx = 2|A|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha x} dx = \frac{|A|^2}{\alpha}$$

و بنابراین:

$$E(\alpha) = \frac{\lambda}{2\alpha} + \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}$$

مقدار کمینه‌ی $E(\alpha)$ به‌ازای $\alpha_0 = \left(\frac{\lambda m}{2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ حاصل می‌شود و لذا:

$$E_0^{VM} = E(\alpha_0) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{2\hbar^2}{\lambda m}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\lambda m}{2\hbar^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}\left(\frac{\lambda^2\hbar^2}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(ب)

با توجه به تمرین (۹-۲۷) داریم:

$$\langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle = \frac{5|A|^2}{2\alpha}$$

$$\langle \psi_\alpha | \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} | \psi_\alpha \rangle = \frac{\hbar^2 |A|^2 \alpha}{4m}$$

از طرفی:

$$\langle \psi_\alpha | V(x) | \psi_\alpha \rangle = \lambda \int |x| |\psi_\alpha(x)|^2 dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |x| |A|^2 \left(1 + 2\alpha|x| + \alpha^2 |x|^2\right) e^{-2\alpha|x|} dx$$

$$= 2\lambda |A|^2 \int_0^{+\infty} \left(x + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^3\right) e^{-2\alpha x} dx = 2\lambda |A|^2 \left(\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{2\alpha}{4\alpha^3} + \frac{\alpha^2}{16\alpha^4}\right)$$

$$= \frac{13}{8}\frac{\lambda |A|^2}{\alpha^2}$$

پس:

$$\langle \psi_\alpha | \hat{H} | \psi_\alpha \rangle = \langle \psi_\alpha | \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) | \psi_\alpha \rangle = \frac{\hbar^2 |A|^2 \alpha}{4m} + \frac{13}{8}\frac{\lambda |A|^2}{\alpha^2}$$

در نتیجه:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E(\alpha)=\frac{\frac{\hbar^{۲}|A|^{۲}\alpha}{۴m}+\frac{۱۳}{۸}\frac{\lambda|A|^{۲}}{\alpha^{۲}}}{\frac{۵|A|^{۲}}{۲\alpha}}=\frac{\hbar^{۲}\alpha^{۲}}{۱۰m}+\frac{۱۳}{۲۰}\frac{\lambda}{\alpha}$$

مقدار کمینه‌ی $E(\alpha)$ به‌ازای $\alpha_{۰}=\left(\frac{۱۳m\lambda}{۴\hbar^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ حاصل می‌شود و پس:

$$E_{۰}^{VM}=E(\alpha_{۰})=\frac{\hbar^{۲}}{۱۰m}\left(\frac{۱۳m\lambda}{۴\hbar^{۲}}\right)^{\frac{۲}{۳}}+\frac{۱۳\lambda}{۲۰}\left(\frac{۴\hbar^{۲}}{۱۳m\lambda}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۱۰}\left(\frac{۱۳}{۴}\right)^{\frac{۲}{۳}}\left(\frac{\lambda^{۲}\hbar^{۲}}{m}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

ملاحظه می‌شود که در حالت (ب) مقدار $E_{۰}^{VM}$ بیشتر است و از آنجا که در روش وردشی، $E_{۰}^{VM}$ حد بالایی برای انرژی حالت پایه است لذا استفاده از تابع آزمون حالت (آ) جواب دقیق‌تری را به‌دست می‌دهد.

تمرین ۹-۳۴

سه ذره‌ی متمایز با جرم یکسان m در یک جعبه‌ی پتانسیل یک‌بعدی با دیواره‌هایی صلب در $x=۰$ و $x=L$ محبوس هستند. اگر سه ذره در برابر پتانسیل جاذبه‌ای کوتاه بُرد ضعیف:

$$\hat{H}_{p}=-V_{۰}\left[\delta(x_{۱}-x_{۲})+\delta(x_{۲}-x_{۳})+\delta(x_{۳}-x_{۱})\right]$$

قرار بگیرند، با استفاده از اختلال مرتبه‌ی اول، ترازهای انرژی

(آ) حالت پایه و

(ب) نخستین حالت برانگیخته‌ی سیستم را

محاسبه کنید.

حل:

ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی، قبل از اعمال اختلال عبارتند از:

$$E^{(۰)}_{n_{۱}n_{۲}n_{۳}}=\frac{\hbar^{۲}}{۲mL^{۲}}\left(n_{۱}^{۲}+n_{۲}^{۲}+n_{۳}^{۲}\right)$$

$$\phi_{n_{۱}n_{۲}n_{۳}}(x_{۱},x_{۲},x_{۳})=\left(\frac{۲}{L}\right)^{\frac{۳}{۲}}\sin\left(\frac{n_{۱}\pi x_{۱}}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{۲}\pi x_{۲}}{L}\right)\sin\left(\frac{n_{۳}\pi x_{۳}}{L}\right)$$

حالت پایه فاقد تبهگنی است و انرژی ($E_{۰}^{(۰)}$) و ویژه تابع آن ($\phi_{۰}(x_{۱},x_{۲},x_{۳})$) عبارتند از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_{\cdot}^{(\cdot)} = E_{۱۱۱} = \frac{\hbar^{۲}\pi^{۲}}{۲mL^{۲}}\left(۱^{۲}+۱^{۲}+۱^{۲}\right) = \frac{۳\hbar^{۲}\pi^{۲}}{۲mL^{۲}}$$

$$\phi_{\cdot}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right) = \phi_{۱۱۱}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right) = \left(\frac{۲}{L}\right)^{\frac{۳}{۲}}\sin\left(\frac{\pi x_{۱}}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x_{۲}}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x_{۳}}{L}\right)$$

اولین حالت برانگیخته دارای تبهگنی سه‌گانه است و انرژی و ویژه توابع آن که آنها را با $E_{۱}^{(\cdot)}$، $\phi_{۱}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right)$، $\phi_{۲}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right)$ و $\phi_{۳}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right)$ نشان می‌دهیم عبارتند از:

$$E_{۱}^{(\cdot)} = E_{۲۱۱}^{(\cdot)} = \frac{\hbar^{۲}\pi^{۲}}{۲mL^{۲}}\left(۲^{۲}+۱^{۲}+۱^{۲}\right) = \frac{۳\hbar^{۲}\pi^{۲}}{mL^{۲}}$$

$$\phi_{۱}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right) = \phi_{۲۱۱}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right) = \left(\frac{۲}{L}\right)^{\frac{۳}{۲}}\sin\left(\frac{۲\pi x_{۱}}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x_{۲}}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x_{۳}}{L}\right)$$

$$\phi_{۲}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right) = \phi_{۱۲۱}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right) = \left(\frac{۲}{L}\right)^{\frac{۳}{۲}}\sin\left(\frac{\pi x_{۱}}{L}\right)\sin\left(\frac{۲\pi x_{۲}}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x_{۳}}{L}\right)$$

$$\phi_{۳}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right) = \phi_{۱۱۲}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right) = \left(\frac{۲}{L}\right)^{\frac{۳}{۲}}\sin\left(\frac{\pi x_{۱}}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x_{۲}}{L}\right)\sin\left(\frac{۲\pi x_{۳}}{L}\right)$$

با توجه به این توضیحات به ادامه کار می‌پردازیم:

(آ)

طبق نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن داریم:

$$E_{\cdot} = E_{\cdot}^{(\cdot)} + E_{\cdot}^{(۱)}$$

که در این رابطه:

$$E_{\cdot}^{(۱)} = \left\langle \phi_{\cdot}\middle|\hat{H}_{p}\middle|\phi_{\cdot}\right\rangle$$

پس:

$$E_{\cdot}^{(۱)} = \int \phi_{\cdot}^{۲}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right)H_{p}\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right)dx_{۱}dx_{۲}dx_{۳}$$

$$= -\left(\frac{۲}{L}\right)^{۳}V_{\cdot}\int \sin^{۲}\left(\frac{\pi x_{۱}}{L}\right)\sin^{۲}\left(\frac{\pi x_{۲}}{L}\right)\sin^{۲}\left(\frac{\pi x_{۳}}{L}\right)\left[\delta\left(x_{۱}-x_{۲}\right)+\delta\left(x_{۲}-x_{۳}\right)+\delta\left(x_{۳}-x_{۱}\right)\right]dx_{۱}dx_{۲}dx_{۳}$$

$$= -\left(\frac{۲}{L}\right)^{۳}V_{\cdot}\left[\int_{\cdot}^{L}\sin^{۴}\left(\frac{\pi x_{۲}}{L}\right)dx_{۲}\int_{\cdot}^{L}\sin^{۲}\left(\frac{\pi x_{۳}}{L}\right)dx_{۳} + \int_{\cdot}^{L}\sin^{۲}\left(\frac{\pi x_{۱}}{L}\right)dx_{۱}\int \sin^{۴}\left(\frac{\pi x_{۲}}{L}\right)dx_{۲}\right.$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$+\int_0^L \sin^4\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)dx_1\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)dx_2\Bigg] = -3\left(\frac{2}{L}\right)^3 V_0\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)dx_1\int_0^L \sin^4\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)dx_2$$

$$= -\frac{24V_0}{L^3}\frac{L}{2}\int_0^L \sin^4\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = -\frac{12V_0}{L^2}\int_0^L \sin^4\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

اما:

$$\int_0^L \sin^4\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \left[\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^L \left(1-2\cos\frac{2\pi x}{L}+\cos^2\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x-\frac{2L}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{L}\right)_0^L + \frac{1}{8}\int_0^L \left(1+\cos\frac{4\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{4}+\frac{L}{8} = \frac{3L}{8}$$

پس:

$$E_0^{(1)} = -\frac{12V_0}{L^2}\frac{3L}{8} = -\frac{9}{2}\frac{V_0}{L}$$

و لذا:

$$E_0 = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2} - \frac{9}{2}\frac{V_0}{L}$$

(ب)

برای بررسی مورد تبهگن باید ماتریس زیر قطری شود (یا به عبارتی ویژه مقادیر آن یافته شود):

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$V_{11} = \langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_1\rangle$$

$$= \int -V_0\left(\frac{2}{L}\right)^3 \sin^2\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x_3}{L}\right)\left[\delta(x_1-x_2)+\delta(x_2-x_3)+\delta(x_3-x_1)\right]dx_1dx_2dx_3$$

$$= -V_0\left(\frac{2}{L}\right)^3\left[\int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)dx_2\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x_3}{L}\right)dx_3 + \int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)dx_1\int \sin^4\left(\frac{\pi x_3}{L}\right)dx_3\right.$$

$$\left.+\int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)dx_1\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)dx_2\right]$$

اما:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right]\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^L \left[1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)-\cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)+\cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x-\frac{L}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)-\frac{L}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right]_0^L + \frac{1}{4}\int_0^L \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{L}{4}+\frac{1}{8}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{6\pi x}{L}\right)+\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]dx$$

$$= \frac{L}{4}+\frac{1}{8}\left[\frac{L}{6\pi}\sin\frac{6\pi x}{L}+\frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{L}\right]_0^L = \frac{L}{4}$$

لذا:

$$V_{11} = -\frac{4V_0}{L^2}\left(\frac{L}{4}+\frac{3L}{8}+\frac{L}{4}\right) = -\frac{7V_0}{2L}$$

به همین ترتیب:

$$V_{22} = \langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_1\rangle = V_{33} = \langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_1\rangle = -\frac{7V_0}{2L}$$

اما:

$$V_{12} = \langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_2\rangle$$

$$= -V_0\left(\frac{2}{L}\right)^3\int \sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x_3}{L}\right)$$

$$\times\left[\delta(x_1-x_2)+\delta(x_2-x_3)+\delta(x_3-x_1)\right]dx_1dx_2dx_3 = -V_0\left(\frac{2}{L}\right)^3\left[\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)dx_2\right.$$

$$\times\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x_3}{L}\right)dx_3 + \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)dx_1\int_0^L \sin^4\left(\frac{\pi x_3}{L}\right)dx_3$$

$$\left.+\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right)dx_1\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)dx_2\right] = -\frac{4V_0}{L^2}\left(\frac{L}{4}+0+0\right) = -\frac{V_0}{L}$$

$$= V_{21} = V_{12} = V_{31} = V_{32} = V_{23}$$

یعنی:

$$V = \frac{-V_0}{2L}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

از قطری کردن V نتیجه می‌شود که ویژه مقادیر آن عبارتند از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{-5V_0}{2L}, \frac{-11V_0}{2L}$$

که در این بین ویژه مقدار $\frac{-5V_0}{2L}$ تبهگنی دوگانه دارد. لذا تا تصحیح مرتبه‌ی اول در اثر اختلال، سطح انرژی اولین حالت برانگیخته به دو سطح $\frac{3\hbar^2\pi^2}{m}-\frac{11V_0}{L}, \frac{3\hbar^2\pi^2}{m}-\frac{5V_0}{2L}$ شکافته می‌شود که سطح $\frac{3\hbar^2\pi^2}{m}-\frac{5V_0}{2L}$ تبهگنی دوگانه دارد.

تمرین ۹-۳۵

سه ذره متمایز با جرم یکسان m در پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی $\hat{H}_0=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{p_i^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x_i^2\right)$ قرار دارند. اگر سه ذره در پتانسیل جاذبه‌ای کوتاه بُرد ضعیف

$$\hat{H}_p=-V_0\left[\delta(x_1-x_2)+\delta(x_2-x_3)+\delta(x_3-x_1)\right]$$

قرار بگیرند، با استفاده از اختلال مرتبه‌ی اول، ترازهای انرژی

(آ) حالت پایه و

(ب) نخستین حالت برانگیخته‌ی سیستم را محاسبه کنید.

حل:

ویژه توابع و ویژه مقادیر $\hat{H}_0$ عبارتند از:

$$E^{(0)}_{n_1n_2n_3}=\hbar w\left(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right)$$

$$\phi_{n_1n_2n_3}(x_1,x_2,x_3)=\phi_{n_1}(x_1)\phi_{n_2}(x_2)\phi_{n_3}(x_3)$$

به طوری‌که $\phi_{n_i}(x_i)$ ویژه تابع ذره iاُم است وقتی که به تنهایی در پتانسیل $\frac{1}{2}mw^2x_i^2$ واقع شده باشد.

حالت پایه فاقد تبهگنی است. انرژی ($E_0^{(0)}$) و ویژه تابع آن $(\phi_0(x_1,x_2,x_3))$ عبارتند از:

$$E_0^{(0)}=E_{111}^{(0)}=\frac{3}{2}\hbar w$$

$$\phi_0(x_1,x_2,x_3)=\phi_{111}(x_1,x_2,x_3)=\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\phi_0(x_3)$$

اما اولین حالت برانگیخته دارای تبهگنی سه‌گانه است. انرژی و ویژه توابع آن که آنها را با $E_1^{(0)}$، $\phi_1(x_1,x_2,x_3)$، $\phi_2(x_1,x_2,x_3)$ و $\phi_3(x_1,x_2,x_3)$ نشان می‌دهیم، عبارتند از:

$$E_1^{(0)}=\frac{5}{2}\hbar w$$

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\phi_1(x_1,x_2,x_3)=\phi_{10}(x_1,x_2,x_3)=\phi_1(x_1)\phi_0(x_2)\phi_0(x_3)$$

$$\phi_2(x_1,x_2,x_3)=\phi_{01}(x_1,x_2,x_3)=\phi_0(x_1)\phi_1(x_2)\phi_0(x_3)$$

$$\phi_3(x_1,x_2,x_3)=\phi_{00}(x_1,x_2,x_3)=\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\phi_1(x_3)$$

بنا به این توضیحات:

(آ)

طبق نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن داریم:

$$E_0=E_0^{(0)}+E_0^{(1)}$$

که:

$$E_0^{(1)}=\langle\phi_0|\hat{H}_p|\phi_0\rangle$$

پس:

$$\begin{aligned}E_0^{(1)}&=\int\phi_0^2(x_1,x_2,x_3)H_p(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3\\&=-V_0\int\phi_0^2(x_1)\phi_0^2(x_2)\phi_0^2(x_3)\left[\delta(x_1-x_2)+\delta(x_2-x_3)+\delta(x_3-x_1)\right]dx_1dx_2dx_3\\&=-V_0\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^4(x_2)dx_2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^2(x_3)dx_3+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^2(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^4(x_3)dx_3\right.\\&\quad\left.+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^4(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^2(x_2)dx_2\right]=-3V_0\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^4(x)dx\end{aligned}$$

اما:

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,x_0}}\exp\left(\frac{-x^2}{2x_0^2}\right)$$

که در این رابطه داریم:

$$x_0=\sqrt{\frac{\hbar}{mw}}$$

پس:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^4(x)dx=\frac{1}{\pi x_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{-2x^2}{x_0^2}\right)dx=\frac{1}{\pi x_0^2}\sqrt{\frac{\pi x_0^2}{2}}=\left(\frac{1}{2\pi x_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پس:

$$E_{\cdot}^{(1)} = -3V_{\cdot}\left(\frac{1}{2\pi\, x_{\cdot}^{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{-3}{\sqrt{2\pi}}\frac{V_{\cdot}}{x_{\cdot}}$$

و لذا:

$$E_{\cdot} = \frac{3}{2}\hbar w - \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{V_{\cdot}}{x_{\cdot}}$$

(ب)

برای بررسی مورد تبهگن، باید ماتریس زیر قطری شود (یا به عبارتی ویژه مقادیر آن یافته شود):

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} V_{11} &= \langle \phi_1 | \hat{H}_p | \phi_1 \rangle \\ &= -V_{\cdot}\int \phi_1^{2}(x_1)\phi_{\cdot}^{2}(x_2)\phi_{\cdot}^{2}(x_3)\left[\delta(x_1-x_2)+\delta(x_2-x_3)+\delta(x_3-x_1)\right]dx_1dx_2dx_3 \\ &= -V_{\cdot}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\cdot}^{2}(x_2)\phi_1^{2}(x_2)dx_2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\cdot}^{2}(x_2)dx_2 + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1^{2}(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\cdot}^{4}(x_2)dx_2\right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\cdot}^{2}(x_1)\phi_1^{2}(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\cdot}^{2}(x_2)dx_2\right] = -V_{\cdot}\left(\frac{1}{x_{\cdot}\sqrt{2\pi}} + 2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\cdot}^{2}(x)\phi_1^{2}(x)dx\right) \end{aligned}$$

اما:

$$\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}x_{\cdot}^{3}}}\, x\exp\left(\frac{-x^{2}}{2x_{\cdot}^{2}}\right)$$

پس:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\cdot}^{2}(x)\phi_1^{2}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_{\cdot}}}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}x_{\cdot}^{3}}}x\exp\left(\frac{-x^{2}}{x_{\cdot}^{2}}\right)\right]^{2}dx = \frac{2}{\pi x_{\cdot}^{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2}\exp\left(\frac{-2x^{2}}{x_{\cdot}^{2}}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi x_{\cdot}^{4}}\frac{1}{2}\frac{x_{\cdot}^{2}}{2}\left(\frac{\pi x_{\cdot}^{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x_{\cdot}\sqrt{2\pi}}$$

پس:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$V_{11}=-V_0\left(\frac{1}{x_0\sqrt{2\pi}}+\frac{2}{2x_0\sqrt{2\pi}}\right)=-\frac{V_0}{x_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

به همین ترتیب:

$$V_{22}=\langle\phi_2|\hat{H}_p|\phi_2\rangle=V_{33}=\langle\phi_3|\hat{H}_p|\phi_3\rangle=-\frac{V_0}{x_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

اما:

$$\begin{aligned}V_{12}&=\langle\phi_1|\hat{H}_p|\phi_2\rangle\\&=-V_0\int\phi_0(x_1)\phi_1(x_1)\phi_0(x_2)\phi_1(x_2)\phi_0^2(x_3)\left[\delta(x_1-x_2)+\delta(x_2-x_3)+\delta(x_3-x_1)\right]dx_1dx_2dx_3\\&=-V_0\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^2(x_2)\phi_1^2(x_2)dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^2(x_3)dx_3+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0(x_1)\phi_1(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0^2(x_2)\phi_1(x_2)dx_2\right.\\&\left.+\int\phi_0^2(x_1)\phi_1(x_1)dx_1\int\phi_0(x_2)\phi_1(x_2)dx_2\right]=-V_0\left(\frac{1}{2x_0\sqrt{2\pi}}+0+0\right)=-\frac{V_0}{4x_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=V_{21}\end{aligned}$$

به همین ترتیب:

$$V_{13}=V_{31}=V_{23}=V_{32}=-\frac{V_0}{4x_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

بنابراین برای یافتن تصحیح مرتبه‌ی اول انرژی باید ویژه مقادیر ماتریس زیر را بیابیم:

$$V=\frac{-V_0}{4x_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$$

ویژه مقادیر این ماتریس عبارتند از:

$$\frac{V_0}{x_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{5V_0}{2x_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ -\frac{3V_0}{2x_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

بنابراین سطح انرژی اولین حالت برانگیخته در اثر اختلال تا تصحیح مرتبه‌ی اول به سه سطح با انرژی‌های $\frac{V_0}{x_0\sqrt{2\pi}}+\frac{5}{2}\hbar w$ ، $\frac{5V_0}{2x_0\sqrt{2\pi}}+\frac{5}{2}\hbar w$ و $-\frac{3V_0}{2x_0\sqrt{2\pi}}+\frac{5}{2}\hbar w$ تجزیه می‌شود.

تمرین ۹ـ۳۶

یک پوزیترونیوم را درنظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی ضعیف در صفحه‌ی xy $\vec{B}=B\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$ قرار دارد و در آن $\boldsymbol{B}$ یک ثابت کوچک است. با نادیده گرفتن برهم‌کنش اسپین–مدار ترازهای انرژی حالت $n=2$ را تا اختلال مرتبه‌ی اول محاسبه کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

با صرف‌نظر کردن از اندرکنش اسپین - مدار و با فرض ثابت بودن میدان مغناطیسی می‌توان هامیلتونی سیستم را به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{H}=\frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu}+V(r)+\frac{e}{2\mu c}\vec{B}.\vec{L}+\frac{e^{2}}{8\mu c^{2}}\left[B^{2}r^{2}-\left(\vec{B}.\vec{r}\right)^{2}\right]$$

چون $\vec{B}$ ناچیز است لذا می‌توان از عبارت شامل B^{2} صرف‌نظر کرد. پس:

$$\hat{H}=\hat{H}_{0}+\hat{H}_{p}$$

که:

$$\hat{H}_{0}=\frac{p^{2}}{2\mu}+V(r)$$

$$\hat{H}_{p}=\frac{e}{2\mu c}\vec{B}.\vec{L}=\frac{eB}{2\mu c}\left(\hat{L}_{x}+\hat{L}_{z}\right)$$

در غیاب میدان اولین حالت برانگیخته $(n=2)$ تبهگنی چهارگانه دارد. حالت‌های $|200\rangle$ ، $|210\rangle$، $|211\rangle$ و $|2-1\rangle$ دارای انرژی یکسان $E_{2}=-\frac{E_{1}}{4}$ هستند که در این رابطه $E_{1}=\frac{\mu e^{4}}{2\hbar^{2}}=6/8\,\text{eV}$.

برای یافتن تصحیح مرتبه‌ی اول انرژی باید ویژه مقادیر ماتریس $\hat{H}_{p}$ را که در زیر فضای ویژه حالات اولین حالت برانگیخته نوشته شده است بیابیم، یعنی باید ماتریس زیر قطری شود:

$$H_{p}=\begin{pmatrix}\langle 1|\hat{H}_{p}|1\rangle & \langle 1|\hat{H}_{p}|2\rangle & \langle 1|\hat{H}_{p}|3\rangle & \langle 1|\hat{H}_{p}|4\rangle\\ \langle 2|\hat{H}_{p}|1\rangle & \langle 2|\hat{H}_{p}|2\rangle & \langle 2|\hat{H}_{p}|3\rangle & \langle 2|\hat{H}_{p}|4\rangle\\ \langle 3|\hat{H}_{p}|1\rangle & \langle 3|\hat{H}_{p}|2\rangle & \langle 3|\hat{H}_{p}|3\rangle & \langle 3|\hat{H}_{p}|4\rangle\\ \langle 4|\hat{H}_{p}|1\rangle & \langle 4|\hat{H}_{p}|2\rangle & \langle 4|\hat{H}_{p}|3\rangle & \langle 4|\hat{H}_{p}|4\rangle\end{pmatrix}$$

که در این رابطه:

$$|1\rangle=|200\rangle\ ,\ |2\rangle=|211\rangle\ ,\ |3\rangle=|210\rangle\ ,\ |4\rangle=|2-1\rangle$$

پس:

$$\hat{H}_{p}=\frac{eB\hbar}{2\mu c}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

قطری کردن این ماتریس به ویژه مقادیر زیر منجر می‌شود:

$$E^{(1)}_{2_1}=-\frac{\sqrt{2}eB\hbar}{2\mu c}\quad,\quad E^{(1)}_{2_2}=E^{(1)}_{2_3}=0\quad,\quad E^{(1)}_{2_4}=\frac{\sqrt{2}eB\hbar}{2\mu c}$$

بنابراین، سطوح انرژی حالات $n=2$ تا مرتبه‌ی اول توسط روابط زیر داده می‌شوند:

$$E_{2_1}=-\frac{E_1}{4}-\frac{\sqrt{2}eB\hbar}{2\mu c}$$

$$E_{2_2}=E_{2_3}=-\frac{E_1}{4}$$

$$E_{2_4}=-\frac{E_1}{4}+\frac{\sqrt{2}eB\hbar}{2\mu c}$$

تمرین ۹-۳۷

یک فرفره‌ی متقارن کروی با گشتاورهای لختی اصلی I را درنظر بگیرید.

(آ) ترازهای انرژی فرفره را پیدا کنید.

(ب) با فرض این‌که فرفره در حالت تکانه‌ی زاویه‌ای $l=1$ باشد. انرژی آن را تا اختلال مرتبه‌ی اول هنگامی‌که یک اختلال ضعیف $\hat{H}_p=\frac{\varepsilon}{I}\left(\hat{L}_x^2-\hat{L}_y^2\right)$ $(\varepsilon\ll 1)$ به آن افزوده شود بیابید.

حل:

(آ)

در اینجا هامیلتونی سیستم عبارتست از:

$$\hat{H}_0=\frac{\hat{L}^2}{2I}$$

پس $|l,m_l\rangle$ها ویژه حالت‌های انرژی هستند که انرژی متناظر آنها عبارتند از:

$$E_l^{(0)}=\frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}$$

(ب)

$l=1$ متناظر با سه حالت تبهگنی $|11\rangle$ ، $|10\rangle$ و $|1,-1\rangle$ است. بنابراین، تصحیح مرتبه‌ی اول انرژی در واقع همان ویژه مقادیر عملگر $\hat{H}_p$ است که در پایه ویژه حالات $l=1$ نوشته شده است یعنی:

$$H_p=\begin{pmatrix}\langle 11|\hat{H}_p|11\rangle & \langle 11|\hat{H}_p|10\rangle & \langle 11|\hat{H}_p|1,-1\rangle\\ \langle 10|\hat{H}_p|11\rangle & \langle 10|\hat{H}_p|10\rangle & \langle 10|\hat{H}_p|1,-1\rangle\\ \langle 1,-1|\hat{H}_p|11\rangle & \langle 1,-1|\hat{H}_p|10\rangle & \langle 1,-1|\hat{H}_p|1,-1\rangle\end{pmatrix}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

اما برای $l=1$ داریم:

$$\hat{L}_x=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad,\quad \hat{L}_y=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$$

بنابراین با یافتن L_x^2 و L_y^2 نتیجه می‌شود که:

$$\hat{H}_p=\frac{\varepsilon}{I}\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1-1&0-0&1-(-1)\\0-0&2-2&0-0\\1-(-1)&0-0&1-1\end{pmatrix}=\frac{\varepsilon\hbar^2}{2I}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$$

از قطری کردن این ماتریس ویژه مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$$E_{11}^{(1)}=-\frac{\varepsilon\hbar^2}{I}\quad,\quad E_{12}^{(1)}=0\quad,\quad E_{13}^{(1)}=\frac{\varepsilon\hbar^2}{I}$$

بنابراین، سطوح انرژی حالات $n=2$ تا مرتبه‌ی اول توسط روابط زیر داده می‌شوند:

$$E_{11}=E_1^{(0)}+E_{11}^{(1)}=\frac{\hbar^2}{I}-\frac{\varepsilon\hbar^2}{I}=\frac{\hbar^2}{I}(1-\varepsilon)$$

$$E_{12}=E_1^{(0)}+E_{12}^{(1)}=\frac{\hbar^2}{I}+0=\frac{\hbar^2}{I}$$

$$E_{13}=E_1^{(0)}+E_{13}^{(1)}=\frac{\hbar^2}{I}+\frac{\varepsilon\hbar^2}{I}=\frac{\hbar^2}{I}(1+\varepsilon)$$

تمرین ۹-۳۸

مقدارهای تقریبی انرژی حالت پایه‌ی ذره‌ای به جرم m را که در حال حرکت در پتانسیل $V(x)=V_0|x|$ $(V_0>0)$ است، با استفاده از: (آ) روش وردشی و (ب) تقریب WKB تخمین بزنید و دو نتیجه را مقایسه کنید.

حل:

(آ)

طبق تمرین ۹-۳۳، استفاده از روش وردشی و استفاده از تابع آزمون $\phi_\alpha(x)=Ae^{-\alpha|x|}$ نتیجه می‌شود:

$$E_0^{VM}=\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}\left(\frac{V_0^2\hbar}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

در تقریب WKB باید از روابط زیر استفاده شود:

$$\oint p(x,E_n)\,dx = ۲\int_{x_۱}^{x_۲}\sqrt{۲m\left(E_n - V(x)\right)}\,dx = \left(n+\frac{۱}{۲}\right)h$$

که $x_۱$ و $x_۲$ نقاط بازگشت هستند که از رابطه‌ی $E = V(x)$ به‌دست می‌آیند. پس:

$$-x_۱ = x_۲ = \frac{E}{V_۰}$$

لذا:

$$\left(n+\frac{۱}{۲}\right)h = ۲\int_{-x_۲}^{x_۲}\sqrt{۲m\left(E_n - V_۰|x|\right)} = ۴\int_۰^{x_۲}\sqrt{۲m\left(E_n - V_۰x\right)}\,dx$$

$$= -\frac{۴}{۲mV_۰}\frac{۲}{۳}\left[\left(۲m\left(E_n - V_۰x\right)^{\frac{۳}{۲}}\right)\right]_۰^{x_۱}$$

$$= +\frac{۴}{۳mV_۰}\left(۲mE_n\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

و در نتیجه:

$$E_n = \frac{۱}{۲m}\left[\frac{۳mV_۰}{۴}\left(n+\frac{۱}{۲}\right)h\right]^{\frac{۲}{۳}}$$

و

$$E_۰ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳}{۸}\right)^{\frac{۲}{۳}}\left(\frac{V_۰^۲h^۲}{m}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

خواننده می‌تواند به مقایسه‌ی دو روش بپردازد.

تمرین ۹-۳۹

تصحیح نسبیتی حالت پایه‌ی یک ذره‌ی بدون اسپین به جرم m را که در حال حرکت در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک بُعدی می‌باشد تا مرتبه‌ی اول اختلال محاسبه کنید. (*راهنمایی*: ابتدا لازم است نشان دهید که هامیلتونی را می‌توان به‌صورت $\hat{H} = \hat{H}_۰ + \hat{H}_p$ نوشت که در آن $\hat{H}_۰ = \frac{\hat{P}^۲}{۲m} + \frac{m\omega^۲\hat{X}^۲}{۲}$ و $\hat{H}_p = -\frac{\hat{P}^۴}{۸m^۳c^۲}$ جمله‌ی تصحیح نسبیتی است که می‌تواند به عنوان اختلال درنظر گرفته شود.)

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

طبق نظریه‌ی اختلال غیرتبهگن، تا مرتبه‌ی اول اختلال داریم:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)}$$

که:

$$E_n^{(0)} = \hbar w\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$E_n^{(1)} = \langle \phi_n | \hat{H}_p | \phi_n \rangle$$

$|\phi_n\rangle$ ویژه حالت مربوط به سطح nام نوسانگر هماهنگ یک بعدی است. طبق رابطه‌ی (۴-۱۸۵) داریم:

$$\hat{p}^2|\phi_n\rangle = -\frac{m\hbar w}{2}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - 2\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1\right)|\phi_n\rangle$$

$$= -\frac{m\hbar w}{2}\left(\sqrt{n}\sqrt{n-1}|\phi_{n-2}\rangle + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}|\phi_{n+2}\rangle - (2n+1)|\phi_n\rangle\right)$$

با تعریف $|\beta\rangle \equiv \hat{p}^2|\phi_n\rangle$، نتیجه می‌شود که:

$$\langle \phi_n | \hat{p}^4 | \phi_n \rangle = \langle \beta | \beta \rangle = \left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^2 \left(n(n-1) + (n+1)(n+2) + (2n+1)^2\right)$$

$$= \left(\frac{m\hbar w}{2}\right)^2 \left(6n^2 + 6n + 3\right)$$

پس:

$$E_n^{(1)} = -\frac{1}{8m^2c^2}\langle \phi_n | \hat{P}^4 | \phi_n \rangle = \frac{3m^2\hbar^2w^2}{4}\left(\frac{-1}{8m^2c^2}\right)\left(2n^2 + 2n + 1\right) = -\frac{3}{32}\frac{\hbar^2w^2}{mc^2}\left(2n^2 + 2n + 1\right)$$

تمرین ۹-۴۰

یک اتم هیدروژن را در نظر بگیرید که در اختلال کوچک $\hat{H}_p = \lambda r^2$ قرار دارد. با استفاده از نظریه‌ی اختلال مرتبه‌ی اول تصحیح‌های انرژی را برای

(آ) حالت پایه و

(ب) حالت $2P$

محاسبه کنید.

حل:

طبق رابطه‌ی (۹-۹۰) با صرف‌نظر کردن از اندرکنش اسپین - مدار، انرژی اتم هیدروژن از رابطه‌ی

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

زیر به‌دست می‌آید:

$$E_{nl}^{(0)}=\frac{-13/6\,eV}{n^2}\left[1+\frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{2}{2l+1}-\frac{3}{4n}\right)\right]$$

و ویژه حالت‌ها نیز همان ϕ_{nlm}ها هستند. بنا به این توضیحات:

(آ)

حالت پایه به‌ازای $l=0$ و $n=1$ حاصل می‌شود. بنابراین حالت پایه، فاقد تبهگنی است و لذا تا تصحیح مرتبه‌ی اول داریم:

$$E_{10}=E_{10}^{(0)}+E_{10}^{(1)}$$

به‌طوری‌که:

$$E_{10}^{(0)}=\frac{13/6\,eV}{1^2}\left[1+\frac{\alpha^2}{1}\left(\frac{2}{2\times0+1}-\frac{3}{4\times1}\right)\right]=-13/6\,eV\left(1+\frac{5}{4}\alpha^2\right)$$

و:

$$E_{10}^{(1)}=\langle\phi_{100}|\hat{H}_p|\phi_{100}\rangle$$

حال به محاسبه‌ی $E_1^{(1)}$ می‌پردازیم:

$$E_{10}^{(1)}=\langle\phi_{100}|\lambda r^2|\phi_{100}\rangle=\lambda\langle R_{10}|r^2|R_{10}\rangle\langle Y_{00}|Y_{00}\rangle=\lambda\langle R_{10}|r^2|R_{10}\rangle$$

طبق رابطه‌ی (۶-۱۸۱) داریم:

$$\langle R_{10}|r^2|R_{10}\rangle=\frac{1}{2}(1)^2\left[5\times1^2+1-3\times-(0+1)\right]a_0^2=3a_0^2$$

پس:

$$E_{10}^{(1)}=3\lambda a_0^2$$

و بنابراین:

$$E_{10}=-13/6\,eV\left(1+\frac{5}{4}\alpha^2\right)+3\lambda a_0^2$$

(ب)

حالت $2p$ که معادل با $n=2$ و $l=1$ است، دارای تبهگنی سه‌گانه و انرژی مربوط به آن $E_{21}^{(0)}=-\frac{13/6\,eV}{4}\left(1+\frac{7}{48}\alpha^2\right)$ است و ویژه حالت‌های آن ϕ_{211}، ϕ_{210} و ϕ_{21-1} می‌باشند. بنابراین تصحیح مرتبه‌ی اول در واقع ویژه مقادیر ماتریس $\hat{H}_p$ است که به‌صورت زیر می‌باشد:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{H}_p = \begin{pmatrix} \langle \phi_{211}|\hat{H}_p|\phi_{211}\rangle & \langle \phi_{211}|\hat{H}_p|\phi_{210}\rangle & \langle \phi_{211}|\hat{H}_p|\phi_{21-1}\rangle \\ \langle \phi_{210}|\hat{H}_p|\phi_{211}\rangle & \langle \phi_{210}|\hat{H}_p|\phi_{210}\rangle & \langle \phi_{210}|\hat{H}_p|\phi_{21-1}\rangle \\ \langle \phi_{21-1}|\hat{H}_p|\phi_{211}\rangle & \langle \phi_{21-1}|\hat{H}_p|\phi_{210}\rangle & \langle \phi_{21-1}|\hat{H}_p|\phi_{21-1}\rangle \end{pmatrix}$$

اما:

$$\langle \phi_{21m}|\hat{H}_p|\phi_{21m'}\rangle = \langle \phi_{21m}|\lambda r^2|\phi_{21m'}\rangle = \lambda \langle R_{21}|r^2|R_{21}\rangle \langle Y_{1m}|Y_{1m'}\rangle = \lambda \langle R_{21}|r^2|R_{21}\rangle \delta_{mm'}$$

از طرفی طبق رابطه‌ی (۶-۱۸۱) داریم:

$$\langle R_{21}|r^2|R_{21}\rangle = \frac{1}{2}(2)^2\left[5\times 2^2 + 1 - 2\times 1(1+1)\right]a_0^2 = 30a_0^2$$

پس:

$$\hat{H}_p = 30\lambda a_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

قطری کردن $\hat{H}_p$، تصحیح مرتبه‌ی اول را نتیجه می‌دهد:

$$E^{(1)}_{21_1} = E^{(1)}_{21_2} = E^{(1)}_{21_3} = 30\lambda a_0^2$$

و لذا:

$$E_{21_1} = E_{21_2} = E_{21_3} = E_{21}$$

که:

$$E_{21} = -\frac{13/6eV}{4}\left(1 + \frac{7}{48}\alpha^2\right) + 30\lambda a_0^2$$

تمرین ۹-۴۱

(آ) سهم ناشی از برهم‌کنش اسپین - مدار را برای حالت برانگیخته‌ی nاُم یک اتم پوزیترونیوم تا اختلال مرتبه‌ی اول محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (آ) مقدارهای عددی را برای جمله‌های تصحیح اسپین - مدار و برای تراز $2P$ به‌دست آورید و آنها را با انرژی تراز $n=2$ مقایسه کنید.

حل:

(آ)

در اینجا هامیلتونی سیستم را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{H}=\frac{\hat{\vec{P}}^{۲}}{۲\mu}-\frac{e^{۲}}{r}+\frac{e^{۲}}{۲m_e^{۲}c^{۲}r^{۳}}\vec{S}.\vec{L}$$

چون $\mu=\frac{m_e}{۲}$ لذا:

$$\hat{H}=\frac{\hat{\vec{P}}^{۲}}{۲\mu}-\frac{e^{۲}}{r}+\frac{e^{۲}}{۲\left(۲\mu\right)^{۲}c^{۲}r^{۳}}\vec{S}.\vec{L}=\hat{H}_{۰}+\hat{H}_{p}$$

به‌طوری‌که:

$$\hat{H}_{۰}=\frac{\hat{\vec{P}}^{۲}}{۲\mu}-\frac{e^{۲}}{r}$$

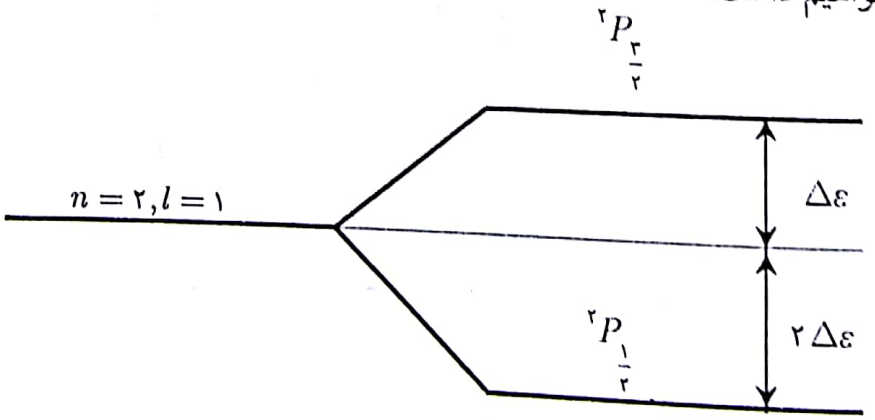
$$\hat{H}_{p}=\frac{e^{۲}}{۲\mu^{۲}\left(۲c\right)^{۲}r^{۳}}\vec{S}.\vec{L}$$

لذا در تشابه با بحثی که در مورد اتم هیدروژن صورت گرفت، نتیجه می‌شود که:

$$E_{so}^{(۱)}=\frac{e^{۲}\hbar^{۲}}{۲\mu^{۲}\left(۲c\right)^{۲}}\left|\frac{j\left(j+۱\right)-l\left(l+۱\right)-\frac{۳}{۴}}{n^{۳}l\left(l+۱\right)\left(۲l+۱\right)\left(۲a_{۰}\right)^{۳}}\right|=\frac{\alpha^{۴}m_ec^{۲}}{۱۶n^{۳}}\left|\frac{j\left(j+۱\right)-l\left(l+۱\right)-\frac{۳}{۴}}{l\left(l+۱\right)\left(۲l+۱\right)}\right|$$

(ب)

برای سطح $۲p$، $n=۲$ و $l=۱$ می‌باشد و چون $S=\frac{۱}{۲}$ است لذا j مقادیر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ را خواهد داشت و بنابراین به‌صورت شماتیک خواهیم داشت:



به‌طوری که:

$$\Delta\varepsilon=\frac{\alpha^{۴}m_ec^{۲}}{۱۶\left(۲\right)^{۳}}\left|\frac{\frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۲}+۱\right)-۱\left(۱+۱\right)-\frac{۳}{۴}}{۱\left(۱+۱\right)\left(۲\times۱+۱\right)}\right|=\frac{\alpha^{۴}m_ec^{۲}}{۷۶۸}\simeq ۱/۹\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{eV}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

از طرفی:

$$E_{۲}^{(۰)} = -\frac{۶/۸}{۲^{۲}} = -۱/۷\,\text{eV}$$

درنتیجه، این تصحیح انرژی بسیار ناچیز و تقریباً از مرتبه $۱۰^{-۶}$ می‌باشد.

تمرین ۹-۴۲

با نادیده گرفتن اسپین الکترون، انرژی تراز $n=۲$ یک اتم هیدروژن را هنگامی که در یک میدان چهارقطبی ضعیف $\hat{H}_p = iQ\left(y^{۲}-x^{۲}\right)$ قرار دارد تا اختلال مرتبه‌ی اول محاسبه کنید، (Q یک عدد حقیقی کوچک است، $Q \ll ۱$).

حل:

در غیاب میدان خارجی و با صرف‌نظر کردن از اسپین الکترون، انرژی حالت $n=۲$ تبهگنی چهارگانه دارد و چهار حالت $\left|nlm\right\rangle = \left|۲۰۰\right\rangle, \left|۲۱۱\right\rangle, \left|۲۱۰\right\rangle, \left|۲۱-۱\right\rangle$ همگی دارای انرژی $E_{۲} = -\frac{R}{۴}$ می‌باشند که R ثابت ریدبرگ است که مقداری برابر با $-۱۳/۶\,\text{eV}$ دارد. تصحیح مرتبه اول انرژی برای این حالت در واقع همان ویژه مقادیر ماتریس $\hat{H}_p$ است. به‌طوری‌که:

$$H_p = \begin{pmatrix} \langle ۲۰۰|\hat{H}_p|۲۰۰\rangle & \langle ۲۰۰|\hat{H}_p|۲۱۱\rangle & \langle ۲۰۰|\hat{H}_p|۲۱۰\rangle & \langle ۲۰۰|\hat{H}_p|۲۱-۱\rangle \\ \langle ۲۱۱|\hat{H}_p|۲۰۰\rangle & \langle ۲۱۱|\hat{H}_p|۲۱۱\rangle & \langle ۲۱۱|\hat{H}_p|۲۱۰\rangle & \langle ۲۱۱|\hat{H}_p|۲۱-۱\rangle \\ \langle ۲۱۰|\hat{H}_p|۲۰۰\rangle & \langle ۲۱۰|\hat{H}_p|۲۱۱\rangle & \langle ۲۱۰|\hat{H}_p|۲۱۰\rangle & \langle ۲۱۰|\hat{H}_p|۲۱-۱\rangle \\ \langle ۲۱-۱|\hat{H}_p|۲۰۰\rangle & \langle ۲۱-۱|\hat{H}_p|۲۱۱\rangle & \langle ۲۱-۱|\hat{H}_p|۲۱۰\rangle & \langle ۲۱-۱|\hat{H}_p|۲۱-۱\rangle \end{pmatrix}$$

با توجه به اینکه $\left|۲lm\right\rangle$ها به‌ازای l زوج (فرد) دارای پاریته زوج (فرد) هستند و از آنجا که $\hat{H}_p$ تحت پاریته، زوج است لذا $\left\langle ۲lm\middle|\hat{H}_p\middle|۲l'm'\right\rangle$ فقط وقتی غیرصفر است که l و l' برابر باشند. با توجه به این توضیحات و چون:

$$\hat{H}_p = iQ\left(y^{۲}-x^{۲}\right) = iQ\left(r^{۲}\sin^{۲}\theta\sin^{۲}\varphi - r^{۲}\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\varphi\right)$$

$$= -Qr^{۲}\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\varphi = -\frac{iQr^{۲}}{۲}\left(\sin^{۲}\theta e^{۲i\varphi} + \sin^{۲}\theta e^{-۲i\varphi}\right)$$

$$= -\frac{iQr^{۲}}{۲}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\left(Y_{۲۲}(\Omega) + Y_{۲-۲}(\Omega)\right)$$

خواهیم داشت:

$$\langle ۲۰۰|\hat{H}_p|۲۰۰\rangle = -\frac{iQ}{۲}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\langle ۲۰|r^{۲}|۲۰\rangle\langle ۰۰|Y_{۲۲}(\Omega) + Y_{۲-۲}(\Omega)|۰۰\rangle$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle ۲۱m'|\hat{H}_p|۲۱m\rangle = -\frac{iQ}{۲}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\langle ۲۱|r^۲|۲۱\rangle\langle ۱m'|Y_{۲۲}(\Omega)+Y_{۲-۲}(\Omega)|۱m\rangle$$

طبق قضیه‌ی ویگنر - اکارت:

$$\langle ۰۰|Y_{۲\pm۲}|۰۰\rangle = \langle ۰,۲;۰,\pm۲|۰۰\rangle\langle ۰\|Y_۲\|۰\rangle = ۰$$

$$\langle ۱m'|Y_{۲\pm۲}|m\rangle = \langle ۱,۲;m,\pm۲|۱m'\rangle\langle ۱\|۲\|۱\rangle$$

بنابراین با توجه به خواص مربوط به ضرایب کلبش - گوردون، $\langle ۲۱m'|\hat{H}_p|۲۱m\rangle$ فقط وقتی غیر صفر است که:

$$m' = m \pm ۲$$

یعنی:

$$\langle ۲۱۱|\hat{H}_p|۲۱۱\rangle = \langle ۲۱۱|\hat{H}_p|۲۱۰\rangle = \langle ۲۱۰|\hat{H}_p|۲۱۰\rangle = \langle ۲۱۰|\hat{H}_p|۲۱۱\rangle = \langle ۲۱۰|\hat{H}_p|۲۱-۱\rangle$$
$$= \langle ۲۱-۱|\hat{H}_p|۲۱-۱\rangle = \langle ۲۱-۱|\hat{H}_p|۲۱۰\rangle = ۰$$

از طرفی طبق رابطه‌ی (۹-۳۸۱) داریم:

$$\langle ۱,-۱|Y_{۲-۲}|۱,۱\rangle = \langle ۱,۱|Y_{۲۲}|۱,-۱\rangle = -\sqrt{\frac{۳}{۱۰\pi}}$$

پس با توجه به اینکه $\langle ۲۱|r^۲|۲۱\rangle = ۳۰a_۰^۲$، لذا:

$$\langle ۲۱-۱|\hat{H}_p|۲۱۱\rangle = -\frac{iQ}{۲}\sqrt{\frac{۳۲\pi}{۱۵}}\left(۳۰a_۰^۲\right)\left(-\sqrt{\frac{۳}{۱۰\pi}}\right) = ۱۵iQa_۰^۲\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = ۱۲iQa_۰^۲ = \langle ۲۱۱|\hat{H}_p|۲۱-۱\rangle$$

پس:

$$H_p = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱۲iQa_۰^۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۲iQa_۰^۲ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

در اینجا باید به این نکته اشاره کرد که i مقداری حقیقی است زیرا در غیر این‌صورت $\hat{H}_p$ هرمیتی نخواهد بود. تصحیح مرتبه‌ی اول انرژی (یا به عبارتی ویژه مقادیر $\hat{H}_p$) عبارتند از:

$$E_{۲_۱}^{(۱)} = E_۲^{(۰)} + E_{۲_۱}^{(۱)} = -\frac{R}{۴} + ۰ = -\frac{R}{۴}$$

$$E_{۲_۲} = E_۲^{(۰)} + E_{۲_۲}^{(۱)} = -\frac{R}{۴} + ۰ = -\frac{R}{۴}$$

$$E_{۲_۳} = E_۲^{(۰)} + E_{۲_۳}^{(۱)} = -\frac{R}{۴} + ۱۲iQa_۰^۲$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_{۲_۴} = E_۲^{(۰)} + E_{۲_۴}^{(۱)} = -\frac{۸}{۴} - ۱۲iQa_۰^۲$$

تمرین ۹-۴۳

ترازهای انرژی حالت‌های $n=۲$ یک پوزیترونیوم را در یک میدان الکتریکی خارجی ضعیف $\vec{\varepsilon}=\varepsilon\vec{k}$ محاسبه کنید. پوزیترونیوم یک الکترون و یک پوزیترون مقید شده به‌وسیله‌ی برهم‌کنشی الکتریکی است.

حل:

مشابه با مورد اتم هیدروژن خواهیم داشت:

$$E_{۲_۱} = -\frac{E_۱}{۴} - ۶e\varepsilon a_۰ \quad , E_{۲_۲} = E_{۲_۳} = -\frac{E_۱}{۴} \quad , E_{۲_۴} = -\frac{E_۱}{۴} + ۶e\varepsilon a_۰$$

که در اینجا $E_۱$ مقداری برابر $-۶\mu eV$ دارد.

تمرین ۹-۴۴

(آ) سهم ناشی از برهم‌کنش اسپین – مدار را برای یک یون هیدروژن گونه‌ی دارای Z پروتون تا اختلال مرتبه‌ی اول محاسبه کنید.

(ب) نتیجه‌ی قسمت (آ) را برای یافتن تصحیح اسپین- مدار برای حالت $۲p$ در یک یون کربن $C^{۵+}$ به‌کار ببرید و آن را با انرژی تراز $n=۲$ مقایسه کنید.

حل:

(آ)

در اینجا هامیلتونی به‌صورت زیر است:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{P}}^۲}{۲m_e} - \frac{Ze^۲}{r} + \frac{Ze^۲}{۲m_e^۲c^۲r^۳}\vec{S}.\vec{L} = \hat{H}_۰ + \hat{H}_{SO}$$

و تا تصحیح مرتبه‌ی اول خواهیم داشت:

$$E_n = E_n^{(۰)} + E_{SO}^{(۱)} \qquad (*)$$

به طوری‌که:

$$E_n^{(۰)} = -\frac{Z^۲E_۰}{n^۲} = -\frac{۱۳/۶Z^۲eV}{n^۲}$$

و:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

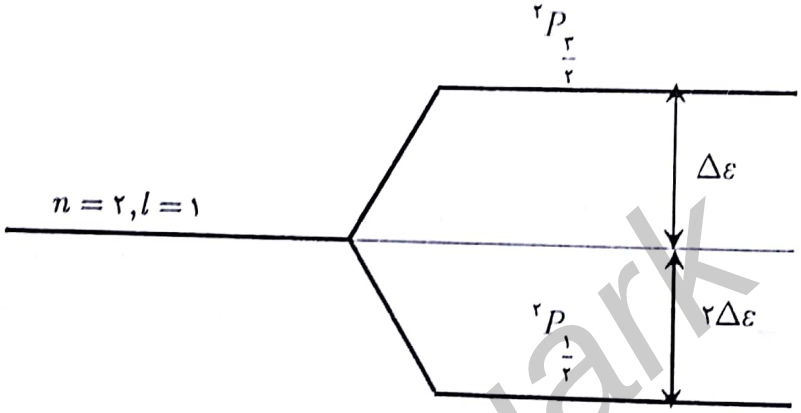
$$E_{SO}^{(1)} = \frac{Z^2 \alpha^4 m_e c^2}{2n^3} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}}{l(l+1)(2l+1)} \right]$$

(ب)

برای حالت $2p$ یون C^{5+} داریم:

$$n = 2 \ , \ l = 1 \ , \ Z = 6$$

و چون $S = \frac{1}{2}$ لذا j می‌تواند مقادیر $\frac{3}{2}$ و $\frac{1}{2}$ را داشته باشد. پس به‌طور شماتیک خواهیم داشت:



به طوری‌که:

$$\Delta\varepsilon = \frac{6^2 \times 0/511 \text{MeV}}{137^4 \times 2 \times 2^3} \left[\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - 1(1+1) - \frac{3}{4}}{1(1+1)(2\times 1+1)} \right] = 0/000544 \text{eV}$$

و چون:

$$E_2^{(0)} = -\frac{13/6 \times 6^2 \text{eV}}{2^2} = -122/4 \text{eV}$$

لذا:

$$\left| \frac{\Delta\varepsilon}{E_2^{(0)}} \right| = \frac{0/000544}{122/4} = 4/4 \times 10^{-6}$$

بنابراین، تصحیح ناشی از اندرکنش اسپین – مدار از مرتبه 10^{-6} است.

تمرین ۹-۴۵

دو ذره‌ی یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ در یک جعبه‌ی مکعبی به ضلع L محبوس هستند.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ) انرژی حالت پایه را هنگامی که دو ذره تحت تأثیر برهمکنش جاذبه‌ای کوتاه‌بُرد و ضعیف

$$\hat{V}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=-\frac{4}{3}\pi a^3 V_0\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

قرار دارند تا اختلال مرتبه‌ی اول محاسبه کنید.

(ب) یک مقدار عددی برای انرژی به‌دست آمده در (آ) به ازای $L=10^{-10}m$ ، $a=10^{-12}m$ و $V_0=10^{-3}\text{eV}$ به دست آورید و جرم هر کدام را برابر با جرم الکترون درنظر بگیرید.

حل:

(آ)

در اینجا $E_0^{(0)}$ و ϕ_0 انرژی پایه و ویژه تابع متناظر با آن عبارتند از:

$$E_0^{(0)}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(1^2+1^2+1^2\right)+\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(1^2+1^2+1^2\right)=\frac{3\hbar^2\pi^2}{mL^2}$$

یگانه $\phi_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{S}_1,\vec{S}_2)=\left(\frac{2}{L}\right)^3\sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y_1}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z_1}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y_2}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z_2}{L}\right)\chi$

چون حالت پایه فاقد تبهگنی است لذا تا تصحیح مرتبه‌ی اول داریم:

$$E_0=E_0^{(0)}+E_0^{(1)}$$

به‌طوری‌که:

$$E_0^{(1)}=\langle\phi_0|\hat{H}_p|\phi_0\rangle$$

پس:

$$E_0^{(1)}=\int dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2\left(-\frac{4}{3}\pi a^3V_0\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\left(\frac{2}{L}\right)^6\sin^2\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y_1}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z_1}{L}\right)\right.$$
$$\left.\times\sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y_2}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z_2}{L}\right)\right)$$
$$=-\frac{4}{3}\pi a^3V_0\left(\frac{2}{L}\right)^6\int dx_1dy_1dz_1\sin^4\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)\sin^4\left(\frac{\pi y_1}{L}\right)\sin^4\left(\frac{\pi z_1}{L}\right)$$
$$=-\frac{4}{3}\pi a^3V_0\left(\frac{2}{L}\right)^6\left[\int_0^L dx\sin^4\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]^3$$

اما:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\int_0^L dx \sin^4\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \int_0^L \left[\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2}\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^L \left(1 - 2\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \frac{2L}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_0^L + \frac{1}{8}\int_0^L \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right] dx = \frac{L}{4} + \frac{L}{8} = \frac{3L}{8}$$

پس:

$$E_0^{(1)} = -\frac{4}{3}\pi a^2 V_0 \left(\frac{2}{L}\right)^6 \left(\frac{3L}{8}\right)^2 = -\frac{9\pi V_0}{2}\left(\frac{a}{L}\right)^2$$

و در نتیجه:

$$E_0 = \frac{3\hbar^2\pi^2}{mL^2} - \frac{9\pi V_0}{2}\left(\frac{a}{L}\right)^2$$

(ب)

$$E_0 = \frac{3\times 10\left(197/32\text{eV}\right)^2 10^{-18}}{10^{-20}\times 0/511\text{MeV}} - \frac{9\times 3/14\times 10^{-3}\text{eV}}{2}\left(\frac{10^{-12}}{10^{-10}}\right)^2 = 228/6\text{eV} - 4/71\times 10^{-9}\text{eV}$$

$$\simeq 228/6\text{eV}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

فصل دهم

نظریه‌ی اختلال وابسته به زمان

تمرین ۱۰-۱

یک ذره‌ی بدون اسپین به جرم m در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک‌بعدی با دیواره‌هایی در $x=0$ و $x=a$ را درنظر بگیرید که ابتدا ($t=0$) در حالت $\Psi(x,0)=\frac{\phi_1(x)+\phi_2(x)}{\sqrt{2}}$ قرار دارد و در آن $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ به ترتیب حالت‌های پایه و برانگیخته‌ی دوم با $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ هستند.

(آ) بردار حالت $\Psi(x,t)$ برای $t>0$ در تصویر شرودینگر چیست؟

(ب) $\langle\hat{X}\rangle$، $\langle\hat{P}\rangle$، $\langle\hat{X}^2\rangle$ و $\langle\hat{P}^2\rangle$ را به عنوان توابعی از زمان در تصویر شرودینگر حساب کنید.

(پ) قسمت (ب) را در تصویر هایزنبرگ تکرار کنید یعنی $\langle\hat{X}\rangle_H$ ، $\langle\hat{P}\rangle_H$، $\langle\hat{X}^2\rangle_H$ و $\langle\hat{P}^2\rangle_H$ را به عنوان توابعی از زمان برای $t>0$ تعیین کنید.

حل:

(آ)

چون انرژی سطح nام توسط $E_n=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}$ داده می‌شود، بنابراین:

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x)e^{-i\frac{E_1t}{\hbar}}+\phi_2(x)e^{-i\frac{E_2t}{\hbar}}\right)$$

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK

Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp\left(-\frac{i\hbar^2\pi^2 t}{2ma^2\hbar}\right) + \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\exp\left(-\frac{i9\hbar^2\pi^2 t}{2ma^2\hbar}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp\left(-i\frac{\hbar\pi^2 t}{2ma^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\exp\left(-\frac{9i\hbar\pi^2 t}{2ma^2}\right)$$

(ب)

با توجه به اینکه:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_1\rangle e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + |\phi_2\rangle e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right)$$

به‌کار خود ادامه می‌دهیم. ابتدا به محاسبه‌ی $\langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle$ می‌پردازیم.

$$\langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle\phi_1|e^{i\frac{E_1 t}{\hbar}} + \langle\phi_2|e^{i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right)\hat{X}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_1\rangle e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} + |\phi_2\rangle e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\langle\phi_1|\hat{X}|\phi_1\rangle + e^{\frac{it}{\hbar}(E_1-E_2)}\langle\phi_1|\hat{X}|\phi_2\rangle + e^{\frac{it}{\hbar}(E_2-E_1)}\langle\phi_2|\hat{X}|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|\hat{X}|_2\rangle\right]$$

چون:

$$\langle\phi_n|\hat{X}|\phi_n\rangle = \frac{a}{2}$$

و:

$$\langle\phi_1|\hat{X}|\phi_2\rangle = \langle\phi_2|\hat{X}|\phi_1\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty x\left(\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\left[\frac{ax}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_0^a - \left[\frac{ax}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \left(\frac{a}{4\pi}\right)^2\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right]_0^a\right\}$$

$$= \frac{1}{a}(0-0) = 0$$

لذا:

$$\langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + 0 + 0 + \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}$$

و در مورد $\langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle$ داریم:

$$\langle\psi(t)|\hat{P}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle\phi_1|P|\phi_1\rangle + e^{\frac{it}{\hbar}(E_1-E_2)}\langle\phi_1|P|\phi_2\rangle + e^{\frac{it}{\hbar}(E_2-E_1)}\langle\phi_2|P|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|P|\phi_2\rangle\right]$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

اما چون:

$$\langle \phi_n | \hat{P} | \phi_n \rangle = ۰$$

و:

$$\langle \phi_۱ | \hat{P} | \phi_۲ \rangle = \int_۰^a \sqrt{\frac{۲}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{۲}{a}} \sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) \right) dx = -i\hbar \frac{۶\pi}{a^۲} \int_۰^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) dxp$$

$$= -i\hbar \frac{۳\pi}{a^۲} \int_۰^a \left(\sin\frac{-۴\pi x}{a} \right) - \sin\left(\frac{۲\pi x}{a}\right) dx = -i\hbar \frac{۳\pi}{a^۲} \left[\frac{-a}{۴\pi} \cos\left(\frac{۴\pi x}{a}\right) + \frac{a}{۲\pi} \cos\left(\frac{۲\pi x}{a}\right) \right]_۰^a$$

$$= ۰$$

لذا:

$$\langle \psi(t) | \hat{P} | \psi(t) \rangle = ۰$$

و در مورد $\langle \psi(t) | X^۲ | \psi(t) \rangle$ داریم:

$$\langle \psi(t) | X^۲ | \psi(t) \rangle = \frac{۱}{۲} \left[\langle \phi_۱ | X^۲ | \phi_۱ \rangle + e^{\frac{it}{\hbar}(E_۱ - E_۲)} \langle \phi_۱ | X^۲ | \phi_۲ \rangle + e^{\frac{it}{\hbar}(E_۲ - E_۱)} \langle \phi_۲ | X^۲ | \phi_۱ \rangle + \langle \phi_۲ | X^۲ | \phi_۲ \rangle \right]$$

چون:

$$\langle \phi_n | X^۲ | \phi_n \rangle = \frac{a^۲}{۳} + \frac{a^۲}{۲\pi^۲ \pi^۲}$$

و:

$$\langle \phi_۱ | X^۲ | \phi_۲ \rangle = \langle \phi_۲ | X^۲ | \phi_۱ \rangle = \int_۰^a \frac{۲}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right) dx = -\frac{۳a^۲}{۳۲\pi^۲}$$

پس:

$$\langle \psi(t) | X^۲ | \psi(t) \rangle = \frac{a^۲}{۳} + \frac{۵a^۲}{۹\pi^۲} - \frac{۳}{۳۲} \frac{a^۲}{\pi^۲} \cos\left[\frac{(E_۱ - E_۲)t}{\hbar} \right]$$

و در مورد $\langle \psi(t) | P^۲ | \psi(t) \rangle$ با توجه به اینکه:

$$\langle \phi_n | P^۲ | \phi_m \rangle = ۲mE_n \delta_{mn} = \frac{\hbar^۲ \pi^۲ n^۲}{a^۲} \delta_{mn}$$

لذا:

$$\langle \psi(t) | P^۲ | \psi(t) \rangle = \frac{۱}{۲} \left(\frac{\hbar^۲ \pi^۲}{a^۲} + \frac{۹\hbar^۲ \pi^۲}{a^۲} \right) = \frac{۵\hbar^۲ \pi^۲}{a^۲}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(پ)

در تصویر هایزنبرگ، حالت سیستم در طی زمان تغییر نمی‌کند اما تابعی از زمان می‌باشد. در متن کتاب ثابت شد که:

$$\hat{X}_H(t) = \hat{X} + \frac{t}{m}\hat{P}$$

و:

$$\hat{P}_H(t) = \hat{P}$$

لذا:

$$\langle\psi(0)|\hat{X}_H(t)|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\hat{X}|\psi(0)\rangle + \frac{t}{m}\langle\psi(0)|\hat{P}|\psi(0)\rangle$$

$$\langle\psi(0)|\hat{P}_H|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\hat{P}|\psi(0)\rangle$$

اما:

$$\langle\psi(0)|X|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\phi_1| + \langle\phi_2|)\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}[\langle\phi_1|X|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|X|\phi_2\rangle + \langle\phi_2|X|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|X|\phi_2\rangle] == \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 0 + 0\right) = \frac{a}{2}$$

$$\langle\psi(0)|P|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}[\langle\phi_1|P|\phi_1\rangle + \langle\phi_1|P|\phi_2\rangle + \langle\phi_2|P|\phi_1\rangle + \langle\phi_2|P|\phi_2\rangle] = 0$$

در نتیجه:

$$\langle\psi(0)|\hat{X}_H(t)|\psi(0)\rangle = \frac{a}{2} + \frac{t}{m}(0) = \frac{a}{2}$$

$$\langle\psi(0)|\hat{P}_H(t)|\psi(0)\rangle = 0$$

در مورد $\langle P^2\rangle_H$ داریم:

$$\langle\psi(0)|P_H^2(t)|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|P^2|\psi(0)\rangle = \frac{5\hbar^2\pi^2}{a^2}$$

و در مورد $\langle X^2\rangle_H$، $X_H^2(t)$ را به‌طریق زیر می‌نویسیم:

$$X_H^2(t) = \left(\hat{X} + \frac{t}{m}\hat{P}\right)^2 = X^2 + \frac{t^2}{m^2}\hat{P}^2 + \frac{t}{m}\left(\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}\right)$$

لذا:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle\psi(\cdot)|X_H^2(t)|\psi(\cdot)\rangle=\langle\psi(\cdot)|X^2|\psi(\cdot)\rangle+\frac{t^2}{m^2}\langle\psi(\cdot)|P^2|\psi(\cdot)\rangle$$
$$+\frac{t}{m}\left[\langle\psi(\cdot)|XP|\psi(\cdot)\rangle+\langle\psi(\cdot)|PX|\psi(\cdot)\rangle\right]$$

اما:

$$\langle\psi(\cdot)|\hat{P}\hat{X}|\psi(\cdot)\rangle=\langle\psi(\cdot)|\hat{X}\hat{P}|\psi(\cdot)\rangle^*$$

لذا:

$$\langle\psi(\cdot)|\hat{X}\hat{P}|\psi(\cdot)\rangle+\langle\psi(\cdot)|\hat{P}\hat{X}|\psi(\cdot)\rangle=\langle\psi(\cdot)|\hat{X}\hat{P}|\psi(\cdot)\rangle+\langle\psi(\cdot)|\hat{X}\hat{P}|\psi(\cdot)\rangle^*$$
$$=2Re\left[\langle\psi(\cdot)|\hat{X}\hat{P}|\psi(\cdot)\rangle\right]$$
$$=2Re\left[\int_0^a\psi^*(x,0)x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,0)\right]=0$$

پس:

$$\langle\psi(\cdot)|\hat{X}_H^2(t)|\psi(\cdot)\rangle=\frac{a^2}{3}+\frac{5a^2}{9\pi^2}+\frac{5\hbar^2\pi^2}{a^2}\frac{t^2}{m^2}$$

تمرین ۱۰-۲

مقدار چشمداشتی $\left\langle\hat{X}_H(t)\hat{P}(0)\right\rangle_2$ را برای سومین حالت برانگیخته‌ی یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی حساب کنید.

حل:

در تصویر هایزنبرگ داریم:

$$x_H(t)=\hat{x}(0)\cos\omega t+\frac{\hat{P}(0)}{m\omega}\sin\omega t$$
$$x_H(t)P(0)=\hat{x}(0)\hat{P}(0)\cos\omega t+\frac{\hat{P}^2(0)}{m\omega}\sin\omega t$$
$$\left\langle 3\left|x_H(t)\hat{P}(0)\right|3\right\rangle=\cos\omega t\left\langle\hat{x}(0)\hat{P}(0)\right\rangle+\frac{\sin\omega t}{m\omega}\left\langle P^2(0)\right\rangle$$
$$=\frac{i\hbar}{2}\cos\omega t+\frac{\sin\omega t}{m\omega}\frac{m\omega\hbar}{2}(7)$$
$$=\frac{i\hbar}{2}\cos\omega t+\frac{7}{2}\hbar\omega\sin\omega t$$

تمرین ۱۰-۳

مقدار چشمداشتی $\left\langle\hat{X}\hat{P}_H(t)\right\rangle_n$ را برای حالت برانگیخته‌ی nام یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی تعیین کنید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

$$\left\langle n\left|\hat{x}\hat{P}_H(t)\right|n\right\rangle = \left\langle n\left|\hat{x}(0)\left[\hat{P}(0)\cos\omega t - m\omega\hat{x}(0)\sin\omega t\right]\right|n\right\rangle$$
$$= \cos\omega t\left\langle n\left|\hat{x}(0)\hat{P}(0)\right|n\right\rangle - m\omega\sin\omega t\left\langle n\left|\hat{x}^2(0)\right|n\right\rangle$$
$$= \cos\omega t.\frac{i\hbar}{2} - m\omega\sin\omega t.\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)$$
$$= \frac{i\hbar}{2}\cos\omega t - \frac{\hbar}{2}(2n+1)\sin\omega t$$

تمرین ۱۰-۴

یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی را در نظر بگیرید که ابتدا (یعنی $t=0$) در حالت $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ قرار دارد و در آن $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به‌ترتیب حالت‌های پایه و برانگیخته‌ی اول هستند.

(آ) بردار حالت $|\Psi(t)\rangle$ برای $t>0$ در تصویر شرودینگر چیست؟

(ب) $\langle\hat{X}\rangle$، $\langle\hat{P}\rangle$، $\langle\hat{X}^2\rangle$ و $\langle\hat{P}^2\rangle$ را به‌عنوان توابعی از زمان برای $t>0$ در تصویر شرودینگر حساب کنید.

(پ) قسمت (ب) را در تصویر هایزنبرگ تکرار کنید.

حل:

(آ)

چون سطح انرژی nام توسط $E_n = \hbar w\left(n+\frac{1}{2}\right)$ داده می‌شود بنابراین:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} + |1\rangle e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle e^{-i\frac{t}{\hbar}\frac{\hbar w}{2}} + |1\rangle e^{-i\frac{t}{\hbar}\frac{3\hbar w}{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle e^{-i\frac{wt}{2}} + |1\rangle e^{-i\frac{3wt}{2}}\right)$$

(ب)

محاسبه‌ی $\langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle$:

$$\langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\langle 0|e^{\frac{iwt}{2}} + \langle 1|e^{i\frac{3wt}{2}}\right)\hat{X}\left(|0\rangle e^{-i\frac{wt}{2}} + |1\rangle e^{i\frac{3wt}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\langle 0|\hat{X}|0\rangle + \langle 1|\hat{X}|1\rangle + \langle 0|\hat{X}|1\rangle e^{-iwt} + \langle 1|\hat{X}|0\rangle e^{iwt}\right)$$

چون:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle ۰|\hat{X}|۰\rangle = \langle ۱|\hat{X}|۱\rangle = ۰$$

$$\langle ۰|\hat{X}|۱\rangle = \langle ۱|\hat{X}|۰\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}$$

پس:

$$\langle \psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle = \frac{۱}{۲}\left(۰+۰+\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\left(e^{-iwt}+e^{iwt}\right)\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\cos wt$$

محاسبه‌ی $\langle \psi(t)|\hat{P}|\psi(t)\rangle$:

$$\langle \psi(t)|\hat{P}|\psi(t)\rangle = \frac{۱}{۲}\left(\langle ۰|\hat{P}|۰\rangle + \langle ۱|\hat{P}|۱\rangle + \langle ۰|\hat{P}|۱\rangle e^{-iwt} + \langle ۱|\hat{P}|۰\rangle e^{iwt}\right)$$

چون:

$$\langle ۰|\hat{P}|۰\rangle = \langle ۱|\hat{P}|۱\rangle = ۰$$

$$\langle ۰|\hat{P}|۱\rangle = \langle ۱|\hat{P}|۰\rangle^* = -i\sqrt{\frac{m\hbar w}{۲}}$$

پس:

$$\langle \psi(t)|\hat{P}|\psi(t)\rangle = \frac{۱}{۲}\left(۰+۰-i\sqrt{\frac{m\hbar w}{۲}}\left(e^{-iwt}-e^{iwt}\right)\right) = -\sqrt{\frac{m\hbar w}{۲}}\sin wt$$

محاسبه‌ی $\langle \psi(t)|\hat{X}^۲|\psi(t)\rangle$:

$$\langle \psi(t)|X^۲|\psi(t)\rangle = \frac{۱}{۲}\left(\langle ۰|\hat{X}^۲|۰\rangle + \langle ۱|\hat{X}^۲|۱\rangle + \langle ۰|\hat{X}^۲|۱\rangle e^{-iwt} + \langle ۱|X^۲|۰\rangle e^{iwt}\right)$$

چون:

$$\langle n|\hat{X}^۲|n\rangle = \frac{\hbar}{۲mw}(۲n+۱)$$

$$\langle ۰|\hat{X}^۲|۱\rangle = \langle ۱|\hat{X}^۲|۰\rangle = ۰$$

پس:

$$\langle \psi(t)|\hat{X}^۲|\psi(t)\rangle = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\hbar}{۲mw}+\frac{۳\hbar}{۲mw}\right) = \frac{\hbar}{mw}$$

محاسبه‌ی $\langle \psi(t)|\hat{P}^۲|\psi(t)\rangle$:

$$\langle \psi(t)|\hat{P}^۲|\psi(t)\rangle = \frac{۱}{۲}\left(\langle ۰|\hat{P}^۲|۰\rangle + \langle ۱|\hat{P}^۲|۱\rangle + \langle ۰|\hat{P}^۲|۱\rangle e^{-iwt} + \langle ۱|\hat{P}^۲|۰\rangle e^{iwt}\right)$$

چون:

$$\langle ۰|\hat{P}^۲|۱\rangle = \langle ۱|\hat{P}^۲|۰\rangle = ۰$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle n|\hat{P}^{۲}|n\rangle=\frac{m\hbar w}{۲}(۲n+۱)$$

پس:

$$\langle\psi(t)|\hat{P}^{۲}|\psi(t)\rangle=\frac{۱}{۲}\left(\frac{m\hbar w}{۲}+\frac{۳m\hbar w}{۲}\right)=m\hbar w$$

(پ)

در تصویر هایزنبرگ داریم:

$$\hat{X}_H(t)=\hat{X}\cos wt+\frac{۱}{mw}\hat{P}\sin wt$$

$$\hat{P}_H(t)=\hat{P}\cos wt-mw\hat{X}\sin wt$$

لذا:

محاسبه‌ی $\langle\psi(۰)|\hat{X}_H(t)|\psi(۰)\rangle$:

$$\langle\psi(۰)|\hat{X}_H(t)|\psi(۰)\rangle=\langle\psi(۰)|\hat{X}|\psi(۰)\rangle\cos wt+\frac{۱}{mw}\langle\psi(۰)|\hat{P}|\psi(۰)\rangle\sin wt$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\cos wt+\frac{۱}{mw}(۰)\sin wt=\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\cos wt$$

محاسبه‌ی $\langle\psi(۰)|\hat{P}_H(t)|\psi(۰)\rangle$:

$$\langle\psi(۰)|\hat{P}_H(t)|\psi(۰)\rangle=\langle\psi(۰)|\hat{P}|\psi(۰)\rangle\cos wt-mw\langle\psi(۰)|\hat{X}|\psi(۰)\rangle\sin wt$$

$$=۰\cos wt-mw\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\sin wt=-\sqrt{\frac{m\hbar w}{۲}}\sin wt$$

محاسبه‌ی $\langle\psi(۰)|\hat{X}_H^{۲}(t)|\psi(۰)\rangle$:

$$X_H^{۲}(t)=\hat{X}^{۲}\cos^{۲}wt+\frac{۱}{(mw)^{۲}}\hat{P}^{۲}\sin^{۲}wt+\frac{\sin(۲wt)}{۲mw}\left(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}\right)$$

چون:

$$\langle\psi(۰)|\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}|\psi(۰)\rangle=\langle\psi(۰)|\hat{X}\hat{P}|\psi(۰)\rangle+\langle\psi(۰)|\hat{X}\hat{P}|\psi(۰)\rangle^{*}=۲\mathrm{Re}\left[\langle\psi(۰)|\hat{X}\hat{P}|\psi(۰)\rangle\right]=۰$$

پس:

$$\langle\psi(۰)|\hat{X}_H^{۲}(t)|\psi(۰)\rangle=\langle\psi(۰)|\hat{X}^{۲}|\psi(۰)\rangle\cos^{۲}wt+\frac{\sin^{۲}wt}{(mw)^{۲}}\langle\psi(۰)|\hat{P}^{۲}|\psi(۰)\rangle$$

$$=\frac{\hbar}{mw}\cos^{۲}wt+\frac{\sin^{۲}wt}{(mw)^{۲}}(m\hbar w)=\frac{\hbar}{mw}$$

محاسبه‌ی $\langle\psi(۰)|\hat{P}_H^{۲}(t)|\psi(۰)\rangle$:

با توجه به اینکه:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\hat{P}_H^2 = \hat{P}^2\cos^2 wt + m^2w^2\hat{X}^2\sin^2 wt - \frac{mw\sin(2wt)}{2}\left(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}\right)$$

پس:

$$\langle\psi(0)|P_H^2(t)|\psi(0)\rangle = m\hbar w\cos^2 wt + m^2w^2\left(\frac{\hbar}{mw}\right)\sin^2 wt = m\hbar w$$

تمرین ۱۰-۵

(آ) عملگر مختصه‌ی $\hat{X}_H(t)$ را برای یک ذره‌ی آزاد در یک بعد در تصویر هایزنبرگ محاسبه کنید.

(ب) جابه‌جاگر $\left[\hat{X}_H(t),\hat{X}_H(0)\right]$ را حساب کنید.

حل:

(آ)

چون:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m}$$

لذا:

$$\left[\hat{H},\hat{X}\right] = -i\hbar\frac{\hat{P}}{m}$$

بنابراین:

$$\hat{X}_H(t) = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\hat{X}e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} = \hat{X} + \frac{it}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{X}\right] + \frac{1}{2!}\left(\frac{it}{\hbar}\right)^2\left[\hat{H},\left[\hat{H},\hat{X}\right]\right] + \ldots$$

چون $\left[\hat{H},\left[\hat{H},\hat{X}\right]\right] = 0$ لذا نتیجه می‌شود که:

$$\hat{X}_H(t) = \hat{X} + \frac{t}{m}\hat{P}$$

(ب)

$$\left[\hat{H}_H(t),\hat{X}_H(0)\right] = \left[\hat{X}+\frac{t}{m}\hat{P},\hat{X}\right] = \left[\hat{X},\hat{X}\right] + \frac{t}{m}\left[\hat{P},\hat{X}\right] = \frac{t}{m}(-i\hbar) = \frac{-i\hbar t}{m}$$

تمرین ۱۰-۶

هامیلتونی $H = -\left(\frac{eB}{mc}\right)\hat{S}_x = \omega\hat{S}_x$ را درنظر بگیرید:

(آ) معادلات حرکت هایزنبرگ را برای عملگرهای وابسته به زمان $\hat{S}_x(t)$ ، $\hat{S}_y(t)$ و $\hat{S}_z(t)$ بنویسید.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب) این معادلات را برای به‌دست آوردن S_x، S_y و S_z به صورت توابعی از زمان حل کنید.

حل:

با توجه به اینکه:

$$\left[\hat{S}_x,\hat{H}\right]=\left[\hat{S}_x,w\hat{S}_x\right]=0$$

$$\left[\hat{S}_y,\hat{H}\right]=\left[\hat{S}_y,w\hat{S}_x\right]=w\left[\hat{S}_y,\hat{S}_x\right]=-i\hbar w\hat{S}_z$$

$$\left[\hat{S}_z,\hat{H}\right]=\left[\hat{S}_z,w\hat{S}_x\right]=w\left[\hat{S}_z,\hat{S}_x\right]=+i\hbar w\hat{S}_y$$

از رابطه:

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt}=\frac{+1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H,\hat{H}\right]=\frac{1}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\left[\hat{A}(0),\hat{H}\right]e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}$$

نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d\hat{S}_x(t)}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{S}_x(t),\hat{H}\right]=\frac{1}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\left[\hat{S}_x(0),\hat{H}\right]e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}=0$$

پس:

$$\hat{S}_x(t)=\hat{S}_x(0)$$

$$\frac{d\hat{S}_y(t)}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{S}_y(t),\hat{H}\right]=\frac{1}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\left[\hat{S}_y(0),\hat{H}\right]e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}=\frac{-i\hbar w}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\hat{S}_z(0)e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}=-w\hat{S}_z(t)$$

$$\frac{d\hat{S}_z(t)}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{S}_z(t),\hat{H}\right]=\frac{1}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\left[\hat{S}_z(0),\hat{H}\right]e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}=\frac{i\hbar w}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\hat{S}_y(0)e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}=w\hat{S}_y(t)$$

از دو رابطه‌ی اخیر نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d^2\hat{S}_z(t)}{dt^2}=-w\frac{d\hat{S}_z(t)}{dt}=-w\left(-w\hat{S}_y(t)\right)=-w^2\hat{S}_y(t)$$

$$\frac{d^2\hat{S}_z(t)}{dt^2}=w\frac{d\hat{S}_y(t)}{dt}=w\left(-w\hat{S}_z(t)\right)=-w^2\hat{S}_z(t)$$

از این روابط نتیجه می‌شود که:

$$\hat{S}_y(t)=\hat{A}\sin wt+\hat{B}\cos wt$$

$$\hat{S}_z(t)=\hat{C}\sin wt+\hat{D}\cos wt$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

در اینجا $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$ و $\hat{D}$ عملگرهایی مستقل از زمان هستند. از این روابط نتیجه می‌شود که:

$$-w\hat{S}_z(t)=\frac{d\hat{S}_y(t)}{dt}=w\left(\hat{A}\cos wt-\hat{B}\sin wt\right)$$

$$w\hat{S}_y(t)=\frac{d\hat{S}_z(t)}{dt}=w\left(\hat{C}\cos wt-\hat{D}\sin wt\right)$$

بنابراین در $t=0$ نتیجه می‌شود که:

$$\hat{S}_y(0)=\hat{B}$$

$$\hat{S}_z(0)=\hat{D}$$

$$-w\hat{S}_z(0)=w\hat{A}$$

$$w\hat{S}_y(0)=w\hat{C}$$

و در اینجا به روابط زیر می‌رسیم:

$$\hat{S}_y(t)=-\hat{S}_z(0)\sin wt+\hat{S}_y(0)\cos wt$$

$$\hat{S}_z(t)=\hat{S}_y(0)\sin wt+\hat{S}_z(0)\cos wt$$

تمرین ۱۰-۷

کمیت $\left\langle n\middle|\hat{P}_H(t)\hat{P}\middle|n\right\rangle$ را برای حالت برانگیخته‌ی nاُم یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی حساب کنید که در آن $\hat{P}_H(t)$ و $\hat{P}$ به‌ترتیب عملگرهای اندازه حرکت در تصویرهای هایزنبرگ و شرودینگر را نشان می‌دهند.

حل:

با توجه به اینکه:

$$\hat{P}_H(t)=\hat{P}\cos(wt)-mw\hat{X}\sin(wt)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\langle n|\hat{P}_H(t)\hat{P}|n\rangle=\langle n|\hat{P}^2|n\rangle\cos wt-mw\langle n|\hat{X}\hat{P}|n\rangle\sin wt$$

و با توجه به اینکه:

$$\left\langle n\middle|\hat{X}\hat{P}\middle|n\right\rangle=\frac{i\hbar}{2}\ ,\ \left\langle n\middle|\hat{P}^2\middle|n\right\rangle=\frac{m\hbar w}{2}(2n+1)$$

به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle n|\hat{P}_H(t)\hat{P}|n\rangle = \frac{m\hbar w}{۲}(۲n+۱)\cos wt - \frac{imw\hbar}{۲}\sin wt$$

تمرین ۱۰-۸

هامیلتونی ناشی از برهم‌کنش یک ذره به جرم m، بار q (بار منفی است) و اسپین $\vec{S}$ با میدان مغناطیسی در راستای محور y، $\hat{H} = \frac{-qB}{mc}\hat{S}_y$ می‌باشد.

(آ) با استفاده از معادله‌ی هایزنبرگ، $\frac{d\hat{S}_x}{dt}$، $\frac{d\hat{S}_y}{dt}$ و $\frac{d\hat{S}_z}{dt}$ را حساب کنید.

(ب) این معادلات را برای به‌دست آوردن مؤلفه‌های عملگر اسپین به‌عنوان توابعی از زمان حل کنید.

حل:

با تعریف:

$$w = -\frac{qB}{mc}$$

خواهیم داشت:

$$\left[\hat{S}_y, \hat{H}\right] = \left[\hat{S}_y, w\hat{S}_y\right] = ۰$$

$$\left[\hat{S}_x, \hat{H}\right] = \left[\hat{S}_x, w\hat{S}_y\right] = w\left[\hat{S}_x, \hat{S}_y\right] = i\hbar w\hat{S}_z$$

$$\left[\hat{S}_z, \hat{H}\right] = \left[\hat{S}_z, w\hat{S}_y\right] = w\left[\hat{S}_z, \hat{S}_y\right] = -i\hbar w\hat{S}_x$$

از رابطه:

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{۱}{i\hbar}\left[\hat{A}_H, \hat{H}\right] = \frac{۱}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\left[\hat{A}(۰), \hat{H}\right]e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}$$

نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d\hat{S}_x(t)}{dt} = \frac{۱}{i\hbar}\left[\hat{S}_x(t), \hat{H}\right] = \frac{۱}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\left[\hat{S}_x(۰), \hat{H}\right]e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} = \frac{i\hbar w}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\hat{S}_z(۰)e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} = w\hat{S}_z(t)$$

$$\frac{d\hat{S}_y(t)}{dt} = \frac{۱}{i\hbar}\left[\hat{S}_y(t), \hat{H}\right] = \frac{۱}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\left[\hat{S}_y(۰), \hat{H}\right]e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} = ۰$$

$$\frac{d\hat{S}_z(t)}{dt} = \frac{۱}{i\hbar}\left[\hat{S}_z(t), \hat{H}\right] = \frac{۱}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\left[\hat{S}_z(۰), \hat{H}\right]e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} = \frac{-i\hbar w}{i\hbar}e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\hat{S}_x(۰)e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}} = -w\hat{S}_x(t)$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$\hat{S}_y(t) = \hat{S}_y(۰)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{d^2\hat{S}_x(t)}{dt^2} = w\frac{d\hat{S}_z(t)}{dt} = w\left(-w\hat{S}_x(t)\right) = -w^2\hat{S}_x(t)$$

$$\frac{d^2\hat{S}_z(t)}{dt^2} = w\frac{d\hat{S}_x(t)}{dt} = -w\left(+w\hat{S}_z(t)\right) = -w^2\hat{S}_z(t)$$

حل دو معادله‌ی اخیر منجر به روابط زیر می‌شود:

$$\hat{S}_x(t) = \hat{A}\sin wt + \hat{B}\cos wt$$

$$\hat{S}_z(t) = \hat{C}\sin wt + \hat{D}\cos wt$$

در این روابط $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$ و $\hat{D}$ عملگرهایی مستقل از زمان هستند. با اعمال شرایط اولیه در لحظه‌ی $t=0$ می‌توان این ثوابت را یافت.

$$\hat{S}_x(0) = \hat{B}$$

$$\hat{S}_z(0) = \hat{D}$$

$$w\hat{S}_z(0) = \left.\frac{d\hat{S}_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = w\hat{A}$$

$$-w\hat{S}_x(0) = \left.\frac{d\hat{S}_z(t)}{dt}\right|_{t=0} = w\hat{C}$$

پس:

$$\hat{S}_x(t) = \hat{S}_z(0)\sin wt + \hat{S}_x(0)\cos wt$$

$$\hat{S}_z(t) = -\hat{S}_x(0)\sin wt + \hat{S}_z(0)\cos wt$$

تمرین ۱۰-۹

ذره‌ای ابتدا (یعنی در $t<0$) در حالت پایه‌ی خودش در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی قرار دارد. در $t=0$ یک اختلال $\hat{V}(x,t) = V_0\hat{x}^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$ روشن می‌شود. احتمال آن که پس از یک زمان به‌قدر کافی طولانی (یعنی $t\to\infty$) سیستم، گذاری به یک حالت برانگیخته‌ی معلوم انجام دهد را تا مرتبه‌ی اول حساب کنید. همه‌ی حالت‌های نهایی را در نظر بگیرید.

حل:

احتمال گذار از حالت پایه‌ی $n=0$ به حالت برانگیخته‌ی n توسط رابطه‌ی (۱۰-۴۱) داده می‌شود:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$P_{\circ\to n}=\frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{\circ}^{+\infty}\langle n|\hat{V}(t)|\circ\rangle e^{iw_{n\circ}t}dt\right|^2=\frac{V_\circ^2}{\hbar^2}\left|\langle n|\hat{x}^2|\circ\rangle\right|^2\left|\int_{\circ}^{+\infty}e^{-\left(\frac{1}{\tau}-inw\right)t}dt\right|^2$$

با توجه به اینکه:

$$\hat{x}^2=\frac{\hbar}{2mw}\left(\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right)$$

$$\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

لذا:

$$\langle n|\hat{x}^2|\circ\rangle=\frac{\hbar}{2mw}\left(\sqrt{2}\delta_{n,2}+\delta_{n,\circ}\right)$$

و چون طبق رابطه‌ی (۱۰-۲۰۲) داریم:

$$\left|\int_{\circ}^{\infty}e^{-\left(\frac{1}{\tau}-inw\right)t}dt\right|^2=\frac{1}{n^2w^2+\frac{1}{\tau^2}}$$

نتیجه می‌شود که:

$$P_{\circ\to\circ}=\frac{V_\circ^2}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar}{2mw}\right)^2\tau^2$$

$$P_{\circ\to 2}=\frac{V_\circ^2}{\hbar^2}\left(\frac{\sqrt{2}\hbar}{2mw}\right)^2\frac{1}{4w^2+\frac{1}{\tau^2}}=\frac{V_\circ^2}{2\hbar^2}\left(\frac{\hbar}{mw}\right)^2\frac{\tau^2}{4w^2\tau^2+1}$$

به‌ازای سایر مقادیر n نیز نتیجه حاصل برای $P_{\circ\to n}$، صفر است.

تمرین ۱۰-۱۰

ذره‌ای در ابتدا (یعنی در $t<\circ$) در حالت پایه‌ی خودش در یک چاه پتانسیل نامتناهی که دیواره‌های آن در $x=\circ$ و $x=a$ واقع هستند قرار دارد و در زمان $t=\circ$، در برابر یک اختلال وابسته به زمان $\hat{V}(t)=V_\circ\hat{x}^2e^{-t^2}$ قرار می‌گیرد که در آن $V_\circ$ یک پارامتر کوچک است. احتمال آن را بیابید که در $t\to+\infty$ ذره در دومین حالت برانگیخته‌ی خود یافت شود.

حل:

احتمال گذار از حالت پایه $n=1$ به دومین حالت برانگیخته $n=3$ توسط رابطه (۱۰-۴۱) داده می‌شود.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$P_{1\to 2}=\frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^{\infty}\langle 2|\hat{V}(t)|1\rangle e^{iw_{21}t}dt\right|^2=\frac{V_0^2}{\hbar^2}\left|\langle 2|\hat{x}^2|1\rangle\right|^2\left|\int_0^{+\infty}e^{-\left(t^2-iw_{21}t\right)}dt\right|^2$$

با توجه به اینکه:

$$\langle 2|\hat{x}^2|1\rangle=\frac{2}{a}\int_0^a x^2\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^a x^2\left(\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)-\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)\right)dx$$

$$=-2\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2+2\left(\frac{a}{4\pi}\right)^2=-\frac{3a^2}{8\pi^2}$$

و:

$$\int_0^{+\infty}e^{-\left(t^2-iw_{21}t\right)}dt=\int_0^{+\infty}e^{-\left(t^2-iw_{21}t-\frac{w_{31}^2}{4}+\frac{w_{31}^2}{4}\right)}dt=e^{-\frac{w_{31}^2}{4}}\int_0^{+\infty}e^{-\left(t-i\frac{w_{31}}{2}\right)^2}dt$$

با استفاده از رابطه:

$$w_{21}=\frac{E_2-E_1}{\hbar}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\frac{3^2-1^2}{\hbar}=\frac{4\pi^2\hbar}{ma^2}$$

و تغییر متغیر:

$$u=t-i\frac{w_{31}}{2}$$

نتیجه می‌شود که:

$$\int_0^{+\infty}e^{-\left(t^2-iw_{21}t\right)}dt=\exp\left(-\frac{4\pi^4\hbar^2}{m^2a^4}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}erf\left(-i\frac{w_{31}}{2}\right)$$

که به‌طور کلی:

$$erfc(p)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_p^{+\infty}e^{-u^2}du$$

پس در بی‌نهایت:

$$P_{1\to 2}=\frac{V_0^2}{\hbar^2}\left(\frac{-3a^2}{8\pi^2}\right)^2\exp\left(-\frac{8\pi^4\hbar^2}{m^2a^4}\right)\frac{\pi}{4}erfc^2\left(-i\frac{w_{21}}{2}\right)=\frac{9V_0^2a^4}{256\hbar^2\pi^2}\exp\left(\frac{-8\pi^2\hbar^2}{ma^2}\right)\left|erf\left(\frac{-2\pi^2i\hbar}{ma^2}\right)\right|^2$$

تمرین ۱۰-۱۱

چگالی مربوط به گذار $3s\to 2p$ را در اتم هیدروژن بیابید.

حل:

شدت گذار از $3s$ به $2p$ از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$I_{۳s\to ۲p}=\frac{۴e^{۲}w_{۳s\to ۲p}^{۴}}{۳c^{۳}}\frac{۱}{۳}\sum_{m=-۱}^{+۱}\left|\langle ۳s|\vec{r}|۲p\rangle\right|^{۲}$$

$$=\frac{۴e^{۲}w_{۳s\to ۲p}^{۴}}{۹c^{۳}}\sum_{m=-۱}^{+۱}\left[\left|\langle ۳۰|\hat{x}|۲۱m\rangle\right|^{۲}+\left|\langle ۳۰|\hat{y}|۲۱m\rangle\right|^{۲}+\left|\langle ۳۰|\hat{z}|۲۱m\rangle\right|^{۲}\right]$$

که:

$$\langle ۲۱m|\hat{x}|۳۰۰\rangle=\int_{۰}^{+\infty}R_{۳۰}(r)R_{۲۱}^{*}(r)r^{۳}dr\int Y_{۱m}^{*}(\Omega)\left[-\sqrt{\frac{۳\pi}{۳}}\left(Y_{۱۱}(\Omega)+Y_{۱-۱}(\Omega)\right)\right]Y_{۰۰}(\Omega)d\Omega$$

$$\langle ۲۱m|\hat{y}|۳۰۰\rangle=\int_{۰}^{+\infty}R_{۳۰}(r)R_{۲۱}^{*}(r)r^{۳}dr\int Y_{۱m}^{*}(\Omega)\left[i\sqrt{\frac{۳\pi}{۳}}\left(Y_{۱۱}(\Omega)+Y_{۱-۱}(\Omega)\right)\right]Y_{۰۰}(\Omega)d\Omega$$

$$\langle ۲۱m|\hat{z}|۳۰۰\rangle=\int_{۰}^{+\infty}R_{۳۰}(r)R_{۲۱}^{*}(r)r^{۳}dr\int Y_{۱m}^{*}(\Omega)\sqrt{\frac{۴\pi}{۳}}Y_{۱۰}(\Omega)Y_{۰۰}(\Omega)d\Omega$$

چون:

$$\int_{۰}^{+\infty}R_{۳۰}(r)R_{۲۱}^{*}(r)r^{۳}dr=\int_{۰}^{+\infty}\frac{۲}{۳\sqrt{۳a_{۰}^{۳}}}\left(۱-\frac{۲r}{۳a_{۰}}+\frac{۲r^{۲}}{۲۷a_{۰}^{۲}}\right)e^{-\frac{r}{۳a_{۰}}}\frac{۱}{\sqrt{۶a_{۰}^{۳}}}\frac{r}{۲a_{۰}}e^{-\frac{r}{۲a_{۰}}}r^{۳}dr$$

$$=\frac{۱}{۹\sqrt{۲}a_{۰}^{۴}}\int_{۰}^{+\infty}\left(r^{۴}-\frac{۲r^{۵}}{۳a_{۰}}+\frac{۲r^{۶}}{۲۷a_{۰}^{۲}}\right)e^{-\frac{۵r}{۶a_{۰}}}dr$$

$$=\frac{۱}{۹\sqrt{۲}a_{۰}^{۴}}\left(\frac{۴!}{\left(\frac{۵}{۶a_{۰}}\right)^{۵}}-\frac{۲}{۳a_{۰}}\frac{۵!}{\left(\frac{۵}{۶a_{۰}}\right)^{۶}}+\frac{۲}{۲۷a_{۰}^{۲}}\frac{۶!}{\left(\frac{۵}{۶a_{۰}}\right)^{۷}}\right)=\frac{۸}{۱۵\sqrt{۲}}\left(\frac{۶}{۵}\right)^{۵}a_{۰}$$

$$\langle ۲۱m|\hat{x}|۳۰۰\rangle=\frac{۸}{۱۵\sqrt{۲}}\left(\frac{۶}{۵}\right)^{۵}a_{۰}\left(-\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right)\left(\delta_{m,۱}-\delta_{m,-۱}\right)$$

$$\langle ۲۱m|\hat{y}|۳۰۰\rangle=\frac{۸}{۱۵\sqrt{۲}}\left(\frac{۶}{۵}\right)^{۵}a_{۰}\left(\frac{i}{\sqrt{۶}}\right)\left(\delta_{m,۱}+\delta_{m,-۱}\right)$$

$$\langle ۲۱m|\hat{z}|۳۰۰\rangle=\frac{۸}{۱۵\sqrt{۲}}\left(\frac{۶}{۵}\right)^{۵}a_{۰}\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)\delta_{m,۰}$$

$$w_{۳s\to ۲p}=\frac{E_{۳}-E_{۲}}{\hbar}=\frac{\frac{-R}{۹}+\frac{R}{۴}}{\hbar}=\frac{۵R}{۳۶\hbar}$$

در نتیجه:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$I_{۳s\to ۳p}=\frac{۴e^۲}{۳c^۳}\left(\frac{۵R}{۳۶\hbar}\right)^۴\left|\frac{۸}{۱۵\sqrt{۲}}\left(\frac{۶}{۵}\right)^۵a_۰\right|^۲\left[\left(\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right)^۲+\left|\frac{i}{\sqrt{۶}}\right|^۲+\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^۲+\left(-\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right)^۲+\left|\frac{i}{\sqrt{۶}}\right|^۲\right]$$

$$=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۲}{۵}\right)^۸\frac{e^۲R^۴a_۰^۲}{c^۳\hbar^۴}$$

تمرین ۱۰-۱۲

یک اتم هیدروژن در ناحیه‌ای قرار دارد که در آن در لحظه‌ی $t=۰$ میدان الکتریکی وابسته به زمان زیر روشن می‌شود:

$$\vec{E}(t)=E_۰\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

و در آن τ یک عدد حقیقی و مثبت است. با استفاده از نظریه‌ی اختلال وابسته به زمان مرتبه‌ی اول، احتمال آن را محاسبه کنید که پس از یک زمان به‌قدر کافی طولانی (یعنی $t>>\tau$) اتم در یکی از حالت‌های $n=۲$ یافت شود (یعنی گذار به همه‌ی حالت‌ها را در تراز $n=۲$ درنظر بگیرید).

(راهنمایی: می‌توانید از $\int_۰^\infty r^۳R_{۲۱}^*(r)R_{۱۰}(r)dr=\frac{۲۴a_۰}{\sqrt{۶}}\left(\frac{۲}{۳}\right)^۵$ استفاده کنید)

حل:

پتانسیل ناشی از اندرکنش الکترون اتم هیدروژن با میدان خارجی $\overline{E}(t)=E_۰\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$ عبارتست از:

$$V(t)=-c\vec{r}.\vec{E}(t)=-c\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right).E_۰\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}=-eE_۰e^{-\frac{t}{\tau}}(x+y+z)$$

بنابراین از رابطه‌ی (۱۰-۴۱) نتیجه می‌شود که:

$$P_{۱۰۰\to ۲۰۰}=\frac{e^۲E_۰^۲}{\hbar^۲}\left|\langle ۲۰۰|x+y+z|۱۰۰\rangle\right|^۲\left|\int_۰^{+\infty}e^{-\frac{t}{\tau}}e^{i\omega_{۲۱}t}dt\right|^۲$$

با توجه به اینکه $x+y+z$، $\phi_{۲۰۰}(\vec{r})$ و $\phi_{۱۰۰}(\vec{r})$ به‌ترتیب توابعی فرد، زوج و زوج هستند، لذا $\langle ۲۰۰|x+y+z|۱۰۰\rangle$ مقداری برابر صفر خواهد داشت و لذا:

$$P_{۱۰۰\to ۲۰۰}=۰$$

و نیز:

$$P_{۱۰۰\to ۲۱m}=\frac{e^۲E_۰^۲}{\hbar^۲}\left|\langle ۲۱m|x+y+z|۱۰۰\rangle\right|^۲\left|\int_۰^{+\infty}e^{-\frac{t}{\tau}}e^{i\omega_{۲۱}t}dt\right|^۲$$

اما:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\left|\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i w_{21} t} dt\right|^2 = \left|\frac{1}{\frac{1}{\tau} - i w_{21}}\right|^2 = \frac{\tau^2}{1 + w_{21}^2 \tau^2}$$

چون:

$$w_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{-\frac{13/6\,\mathrm{eV}}{4} + 13/6\,\mathrm{eV}}{\hbar} = \frac{10/2\,\mathrm{eV}}{\hbar}$$

پس:

$$\left|\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i w_{21} t} dt\right|^2 = \frac{\hbar^2 \tau^2}{\hbar^2 + (10/2\,\mathrm{eV}\tau)^2}$$

با استفاده از روابط (۱۰-۲۲۶) الی (۱۰-۲۲۸) داریم:

$$P_{100 \to 211} = \frac{e^2 E_0^2}{\hbar^2} \frac{\hbar^2 \tau^2}{\hbar^2 + (10/2 e V \tau)^2} \left| -\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{24}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{3}\right)^5 a_0 + \frac{i}{\sqrt{6}} \frac{24}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{5}\right)^5 a_0 \right|^2$$

$$= \frac{e^2 E_0^2 \tau^2 a_0^2}{\hbar^2 + (10/2 e V \tau)^2} \frac{2^{15}}{3^{10}}$$

$$P_{100 \to 210} = \frac{e^2 E_0^2 \tau^2 a_0^2}{\hbar^2 + (10/2 e V \tau)^2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{24}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2 = \frac{e^2 E_0^2 \tau^2 a_0^2}{\hbar^2 + (10/2 e V \tau)^2} \frac{2^{15}}{3^{10}}$$

$$P_{100 \to 21-1} = \frac{e^2 E_0^2 \tau^2 a_0^2}{\hbar^2 + (10/2 e V \tau)^2} \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{24}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \frac{i}{\sqrt{6}} \frac{24}{\sqrt{6}} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \right|^2 = \frac{e^2 E_0^2 \tau^2 a_0^2}{\hbar^2 + (10/2 e V \tau)^2} \frac{2^{15}}{3^{10}}$$

تمرین ۱۰-۱۳

(آ) درایه‌های ماتریس کاهش‌یافته‌ی $\langle 1 \| Y_1 \| 2 \rangle$ را حساب کنید. (*راهنمایی:* برای این منظور ممکن است به محاسبه‌ی مستقیم $\langle 1,0 | Y_{10} | 2,0 \rangle$ نیاز داشته باشید و سپس از قضیه‌ی ویگنر-اکارت استفاده کنید).

(ب) با استفاده از قضیه‌ی ویگنر- اکارت و ضرایب کلبش - گوردون مربوطه از جدول‌ها، $\langle 1,m | Y_{m'} | 2,m'' \rangle$ را برای همه‌ی مقدارهای ممکن m، m' و m'' محاسبه کنید.

(پ) با استفاده از نتایج بخش (ب)، آهنگ گذار $3d \to 2p$ را برای اتم هیدروژن در تقریب دوقطبی محاسبه کنید و یک مقدار عددی به‌دست دهید.

راهنمایی: می‌توانید از انتگرال $\int_0^\infty r^3 R_{21}^*(r) R_{32}(r) dr = \frac{64 a_0}{15\sqrt{5}} \left(\frac{6}{5}\right)^5$ و ضرایب کلبش- گوردون زیر استفاده کنید:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle j,1;m,0|(j-1),m\rangle=-\sqrt{(j-m)(j+m)/[j(2j+1)]}$$

$$\langle j,1;(m-1),1|(j-1),m\rangle=\sqrt{(j-m)(j-m+1)/[2j(2j+1)]}$$

$$\langle j,1;(m+1),-1|(j-1),m\rangle=\sqrt{(j+m)(j+m+1)/[2j(2j+1)]}.$$

حل:

(آ)

ابتدا به محاسبه‌ی $\langle 1,0|Y_{10}|2,0\rangle$ می‌پردازیم:

$$\langle 1,0|Y_{10}|2,0\rangle=\int d\Omega\, Y_{10}^{*}(\Omega)Y_{10}(\Omega)Y_{20}(\Omega)=\int_0^{2\pi}df\int_0^{\pi}\left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\right)^2\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)d\theta$$

$$=2\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int_0^{\pi}\left(3\cos^4\theta-\cos^2\theta\right)d\theta=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{5\pi}{8}=\frac{15\sqrt{5\pi}}{64}$$

برای محاسبه‌ی $\langle 1\|Y_1\|2\rangle$ از قضیه‌ی ویگنر - اکارت استفاده می‌کنیم:

$$\langle 1,0|Y_{10}|2,0\rangle=\langle 2,1;0,0|10\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle$$

پس:

$$\langle 1\|Y_1\|2\rangle=\frac{\langle 1,0|Y_{10}|2,0\rangle}{\langle 21;00|10\rangle}=\frac{\frac{15\sqrt{5\pi}}{64}}{-\sqrt{\frac{(2-0)(2+0)}{2(2\times2+1)}}}=-\frac{75}{64}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(ب)

برای محاسبه‌ی $\langle 1,m|Y_{1m'}|2,m''\rangle$ از قضیه‌ی ویگنر- اکارت استفاده می‌شود:

$$\langle 1,m|Y_{1m'}|2,m''\rangle=\langle 2,1;m'',m'|1,m\rangle\langle 1\|Y_1\|2\rangle=-\frac{75}{64}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\langle 2,1;m'',m'|1,m\rangle$$

چون ضریب کلبش - گوردن $\langle 2,1;m'',m'|1,m\rangle$ وقتی غیرصفر است که $m=m'+m''$، لذا $\langle 1,m|Y_{1m'}|2,m''\rangle$ نیز غیر صفر است فقط وقتی‌که:

$$m=m'+m''$$

حال به محاسبه‌ی $\langle 1,m|Y_{1m'}|2,m''\rangle$های غیرصفر می‌پردازیم:

$$\langle 1,-1|Y_{1-1}|2,0\rangle=-\frac{75}{64}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\langle 2,1;0,-1|1,-1\rangle=-\frac{75}{64}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{(2-1)(2-1+1)}{20}}=-\frac{75}{64}\sqrt{\frac{\pi}{20}}$$

$$\langle 1,-1|Y_{10}|2,-1\rangle=-\frac{75}{64}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\langle 2,1;-1,0|1,-1\rangle=-\frac{75}{64}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(-\sqrt{\frac{(2+1)(2-1)}{10}}\right)=+\frac{75}{64}\sqrt{\frac{3\pi}{20}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\langle ۱,-۱|Y_{۱۱}|۲,-۲\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\langle ۲,۱;-۲,۱|۱,-۱\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\frac{(۲+۱)(۲+۱+۱)}{۲۰}}=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{۳\pi}{۱۰}}$$

$$\langle ۱,۰|Y_{۱-۱}|۲,-۲\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\langle ۲,۱;۱,-۱|۱,۰\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\frac{(۲+۰)(۲+۰+۱)}{۲\times۲\times۵}}=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{۳\pi}{۲۰}}$$

$$\langle ۱,۰|Y_{۱۰}|۲,۰\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\langle ۲,۱;۰,۰|۱,۰\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\left(-\sqrt{\frac{(۲-۰)(۲+۰)}{۲\times(۲\times۲+۱)}}\right)=+\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۵}}$$

$$\langle ۱,۰|Y_{۱۱}|۲,-۱\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\langle ۲,۱;-۱,۱|۱,۰\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\frac{(۲-۰)(۲-۰+۱)}{۲\times۲\times۵}}=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{۳\pi}{۲۰}}$$

$$\langle ۱,۱|Y_{۱-۱}|۲,۲\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\langle ۲,۱;۲,-۱|۱,۱\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\frac{(۲+۱)(۲+۱+۱)}{۲۰}}=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{۳\pi}{۱۰}}$$

$$\langle ۱,۱|Y_{۱۰}|۲,۱\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\langle ۲,۱;۱,۰|۱,۱\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\left(-\sqrt{\frac{(۲-۱)(۲+۱)}{۲\times۵}}\right)=\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{۳\pi}{۲۰}}$$

$$\langle ۱,۱|Y_{۱۱}|۲,۰\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\langle ۲,۱;۰,۱|۱,۱\rangle=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\frac{(۲-۱)(۲-۱+۱)}{۲۰}}=-\frac{۷۵}{۶۴}\sqrt{\frac{\pi}{۲۰}}$$

(پ)

طبق رابطه‌ی (۱۰-۱۴۱) داریم:

$$W^{emi}_{۳d\to ۲p}=\frac{۴}{۳}\frac{w^{۳}_{۳d\to ۲p}}{۳\hbar c^{۳}}\left|\vec{d}_{۳d\to ۲p}\right|^{۲}$$

که:

$$\left|\vec{d}_{۳d\to ۲p}\right|^{۲}=e^{۲}\left|\langle ۳d|\vec{\varepsilon}.\vec{r}|۲p\rangle\right|^{۲}=e^{۲}\left|\langle ۲p|\vec{\varepsilon}.\vec{r}|۳d\rangle\right|^{۲}=e^{۲}\left|\int_{۰}^{+\infty}drr^{۳}R^{*}_{۲۱}R_{۳۲}(r)\right|^{۲}\left|\langle ۱,m|\vec{\varepsilon}.\vec{r}|۲,m''\rangle\right|^{۲}$$

اما:

$$\int_{۰}^{+\infty}r^{۳}R^{*}_{۲۱}R_{۳۲}(r)dr=\frac{۶۴a_{۰}}{۱۵\sqrt{۵}}\left(\frac{۶}{۵}\right)^{۵}$$

و:

$$\langle ۱,m|\vec{\varepsilon}.\vec{r}|۲,m''\rangle=\sqrt{\frac{۴\pi}{۳}}\langle ۱,m|\left(\frac{-\varepsilon_{x}+i\varepsilon_{y}}{\sqrt{۲}}Y_{۱۱}+\frac{\varepsilon_{x}+i\varepsilon_{y}}{\sqrt{۲}}Y_{۱-۱}+\varepsilon_{z}Y_{۱۰}\right)|۲,m''\rangle$$

با تعریف:

$$\alpha=\sum_{m=-۱}^{+۱}\sum_{m''=-۲}^{+۲}\left|\langle ۱,m|\vec{\varepsilon}.\hat{r}|۲,m''\rangle\right|^{۲}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

خواهیم داشت:

$$\alpha=\frac{4\pi}{3}\left\{\left|\langle 1,-1|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1,-1}+\varepsilon_z Y_{10}|2,-2\rangle\right|^2\right.$$
$$+\left|\langle 1,-1|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1-1}+\varepsilon_z Y_{10}|2,-1\rangle\right|^2+\left|\langle 1,-1|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1-1}+\varepsilon_z Y_{10}|2,0\rangle\right|^2$$
$$+\left|\langle 1,0|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1-1}+\varepsilon_z Y_{10}|2,0\rangle\right|^2+\left|\langle 1,0|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1-1}+\varepsilon_z Y_{10}|2,1\rangle\right|^2$$
$$+\left|\langle 1,0|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1-1}+\varepsilon_z Y_{10}|2,-1\rangle\right|^2+\left|\langle 1,1|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1-1}+\varepsilon_z Y_{10}|2,1\rangle\right|^2$$
$$\left.+\left|\langle 1,1|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1-1}+\varepsilon_z Y_{10}|2,0\rangle\right|^2+\left|\langle 1,1|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1-1}+\varepsilon_z Y_{10}|2,2\rangle\right|^2\right\}$$
$$=\frac{4\pi}{3}\left\{\left|\langle 1,-1|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}|2,-2\rangle\right|^2+\left|\langle 1,-1|\varepsilon_z Y_{10}|2,-1\rangle\right|^2+\left|\langle 1,-1|\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1-1}|2,0\rangle\right|^2\right.$$
$$+\left|\langle 1,0|\varepsilon_z Y_{10}|2,0\rangle\right|^2+\left|\langle 1,0|\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1-1}|21\rangle\right|^2+\left|\langle 1,0|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}|2,-1\rangle\right|^2+\left|\langle 1,1|\varepsilon_z Y_{10}|2,1\rangle\right|^2$$
$$\left.+\left|\langle 11|\frac{-\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}|20\rangle\right|^2+\left|\langle 1,1|\frac{\varepsilon_x+i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{11}|22\rangle\right|^2\right\}$$
$$=\frac{4\pi}{3}\left\{\frac{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2}{2}\left(\frac{-75}{64}\sqrt{\frac{3\pi}{10}}\right)^2+\varepsilon_z^2\left(\frac{75}{64}\sqrt{\frac{3\pi}{20}}\right)^2+\frac{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2}{2}\left(\frac{-75}{64}\sqrt{\frac{\pi}{20}}\right)^2+\varepsilon_z^2\left(\frac{75}{64}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\right)^2\right.$$
$$+\frac{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2}{2}\left(\frac{-75}{64}\sqrt{\frac{3\pi}{20}}\right)^2+\frac{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2}{2}\left(\frac{-75}{64}\sqrt{\frac{3\pi}{20}}\right)^2+\varepsilon_z^2\left(\frac{75}{64}\sqrt{\frac{3\pi}{20}}\right)^2+\frac{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2}{2}\left(\frac{-75}{64}\sqrt{\frac{\pi}{20}}\right)^2$$
$$\left.+\frac{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2}{2}\left(\frac{-75}{64}\sqrt{\frac{3\pi}{20}}\right)^2\right\}=\left(\frac{75}{64}\right)^2\frac{\pi}{2}\left(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{75}{64}\right)^2$$

چون:

$$w_{3d\to 2p}=\frac{E_{3d}-E_{2p}}{\hbar}=\frac{5Ry}{36\hbar}=\frac{5e^2}{72\hbar a_0}$$

پس:

$$W^{emi}_{3d\to 2p}=\frac{4}{3}\frac{\left(\frac{5e^2}{27\hbar a_0}\right)^3}{3\hbar c^3}\left[\frac{64a_0}{15\sqrt{5}}\left(\frac{6}{5}\right)^2\right]^2\frac{c^2\pi}{2}\left(\frac{75}{64}\right)^2=\frac{2^5\times 5^2}{3^7}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\frac{c}{a_0}=\frac{800}{2187}\frac{c\alpha^4}{a_0}$$

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۱۰-۱۴

ذره‌ای ابتدا در حالت پایه‌ی خود در یک جعبه‌ی پتانسیل یک‌بعدی با دیواره‌هایی در $x=0$ و $x=a$ قرار دارد. اگر دیواره‌ای که در $x=a$ قرار دارد ناگهان به $x=10a$ حرکت داده شود، احتمال یافتن ذره را در حالت‌های زیر حساب کنید:

(آ) حالت برانگیخته‌ی چهارم $(n=5)$ جعبه‌ی جدید

(ب) حالت برانگیخته‌ی نهم $(n=10)$ جعبه‌ی جدید.

حل:

برای $t<0$ ذره در جعبه‌ی پتانسیل با دیواره‌های $x=0$ و $x=a$ واقع است و بنابراین:

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad , \quad \psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (0\le x\le a)$$

هنگامی‌که دیواره‌ی $x=a$ به‌طور ناگهانی به $x=10a$ برده می‌شود، ذره به‌طور همزمان خود را در جعبه‌ی پتانسیل جدید خواهد یافت؛ سطوح انرژی و تابع موج اکنون توسط روابط:

$$E'_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{(10)^2} \quad , \quad \psi'_n(x)=\sqrt{\frac{2}{10a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{10a}\right) \quad (0\le x\le 10a)$$

داده می‌شوند.

(آ)

احتمال پیدا کردن ذره در حالت برانگیخته‌ی چهارم $(n=5)$ جعبه جدید را می‌توان از رابطه‌ی (۱۰-۷۳) یافت:

$$P_{15}=\left|\langle\psi'_5|\psi_1\rangle\right|^2$$

چون:

$$\left|\langle\psi'_5|\psi_1\rangle\right|^2=\int_0^a\psi'^*_5(x)\psi_1(x)dx=\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{10a}}\int_0^a\sin\left(\frac{5\pi x}{10a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{10}}\int_0^a\left(\cos\frac{\pi x}{2a}-\cos\frac{3\pi x}{2a}\right)dx=\frac{1}{a\sqrt{10}}\left(\frac{2a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2a}-\frac{2a}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2a}\right)_0^a$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{10}}\left(\frac{2a}{\pi}+\frac{2a}{3\pi}\right)=\frac{2}{\pi\sqrt{10}}\frac{4}{3}=\frac{8}{3\pi\sqrt{10}}$$

پس:

$$P_{15}=\left(\frac{8}{3\pi\sqrt{10}}\right)^2=\frac{32}{45\pi^2}\simeq 7/11\ \%$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

احتمال پیدا کردن ذره در حالت برانگیخته‌ی نهم $(n=10)$ جعبه‌ی جدید عبارتست از:

$$P_{11\cdot}=\left|\langle\psi'_{1\cdot}|\psi_1\rangle\right|^2$$

چون:

$$\langle\psi'_{1\cdot}|\psi_1\rangle=\int_{\cdot}^{a}\psi'^{*}_{1\cdot}(x)\psi_1(x)dx=\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{3}{10a}}\int_{\cdot}^{a}\sin\left(\frac{10\pi x}{10a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{10}}\int_{\cdot}^{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\times 1=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

پس:

$$P_{11\cdot}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2=\frac{1}{10}=10\%$$

تمرین ۱۰-۱۵

ذره‌ای به جرم m در حالت پایه‌ی خود در یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی و در اختلال $\hat{V}(t)=-V_{\cdot}\hat{x}e^{-\frac{t}{\tau}}$ قرار دارد. احتمال یافتن ذره در اولین حالت برانگیخته پس از زمان طولانی تا اختلال مرتبه‌ی اول را حساب کنید.

حل:

احتمال گذار از حالت پایه $n=0$ به اولین حالت برانگیخته $n=1$ با استفاده از رابطه‌ی (۱۰-۴۱) داده می‌شود:

$$P_{\cdot\to 1}=\frac{V_{\cdot}^2}{\hbar^2}\left|\langle 1|\hat{x}|\cdot\rangle\right|^2\left|\int_{\cdot}^{+\infty}e^{iw_{1\cdot}t-\frac{t}{\tau}}dt\right|^2$$

که:

$$w_{1\cdot}=\frac{E_1-E_{\cdot}}{\hbar}=\frac{\frac{3}{2}\hbar w-\frac{1}{2}\hbar w}{\hbar}=w$$

چون:

$$\langle 1|\hat{x}|\cdot\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\langle 1|\hat{a}^{\dagger}+\hat{a}|\cdot\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\langle 1|1\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}$$

و:

$$\int_{\cdot}^{+\infty}e^{iw_{1\cdot}t-\frac{t}{\tau}}dt=\int_{\cdot}^{+\infty}e^{\left(iw-\frac{1}{\tau}\right)t}dt=\frac{1}{iw-\frac{1}{\tau}}\left[e^{\left(iw-\frac{1}{\tau}\right)t}\right]_{\cdot}^{+\infty}=\frac{1}{iw-\frac{1}{\tau}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پس:

$$p_{۰\to۱}=\frac{V_۰^۲}{\hbar^۲}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\right)^۲\left|\frac{۱}{iw-\frac{۱}{\tau}}\right|^۲=\frac{V_۰^۲\hbar}{۲mw\hbar^۲}\frac{۱}{w^۲+\frac{۱}{\tau^۲}}=\frac{V_۰^۲\tau^۲}{۲mw\hbar\left(۱+w^۲\tau^۲\right)}$$

تمرین ۱۰-۱۶

ذره‌ای ابتدا (یعنی وقتی $t<۰$) در اولین حالت برانگیخته‌ی خود و در یک چاه پتانسیل نامتناهی با دیواره‌هایی در $x=۰$ و $x=a$ واقع است و با شروع در زمان $t=۰$ در برابر یک اختلال وابسته به زمان $\hat{V}(x)=V_۰\tau\hat{x}/\left(t^۲+\tau^۲\right)$ قرار می‌گیرد که در آن $V_۰$ یک عدد حقیقی کوچک است. احتمال آن را حساب کنید که ذره در دومین حالت برانگیخته در $t=+\infty$ یافت شود.

حل:

احتمال گذار از اولین حالت برانگیخته $(n=۲)$ به دومین حالت برانگیخته $(n=۳)$ با رابطه‌ی (۱۰-۴۱) داده می‌شود:

$$P_{۲\to۳}=\frac{V_۰^۲\tau^۲}{\hbar^۲}\left|\langle۳|\hat{x}|۲\rangle\right|^۲\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iw_{۳۲}t}}{t^۲+\tau^۲}dt\right|^۲$$

با توجه به اینکه $E_n=\frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}$ و $\psi_n(x)=\langle x|n\rangle=\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$، به کار خود ادامه می‌دهیم:

$$w_{۳۲}=\frac{E_۳-E_۲}{\hbar}=\frac{\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}\frac{۳^۲-۲^۲}{\hbar}=\frac{۵\pi^۲\hbar}{۲ma^۲}$$

$$\langle۳|\hat{x}|۲\rangle=\int_۰^a x\psi_۳^*(x)\psi_۲(x)dx=\left(\sqrt{\frac{۲}{a}}\right)^۲\int_۰^a x\sin\left(\frac{۳\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{۲\pi x}{a}\right)dx$$

$$=\frac{۱}{a}\int_۰^a x\left(\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)-\cos\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)\right)dx$$

$$=\frac{۱}{a}\left\{\left[\frac{x\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\frac{\pi}{a}}-\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\frac{\pi}{a}}\right]_۰^a-\left[\frac{x\sin\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)}{\frac{۵\pi}{a}}-\frac{\cos\left(\frac{۵\pi x}{a}\right)}{\frac{۵\pi}{a}}\right]_۰^a\right\}=\frac{۲}{\pi}-\frac{۲}{۵\pi}=\frac{۸}{۵\pi}$$

با یافتن $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iw_{۳۲}t}}{t^۲+\tau^۲}dt$ از حساب داده‌ها حل موردنظر کامل می‌شود.

تمرین ۱۰-۱۷

ثابت فنر یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی ناگهان به نصف کاهش می‌یابد.

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(آ) اگر نوسانگر در ابتدا در حالت پایه‌ی خود باشد احتمال آن را بیابید که نوسانگر در حالت پایه باقی بماند.

(ب) کار مربوط به این فرآیند را بیابید.

حل:

(آ)

هنگامی‌که ثابت فنر به‌طور ناگهانی به نصف کاهش می‌یابد ذره در همان لحظه، خود را در پتانسیل جدید خواهد یافت. تابع انرژی و سطح انرژی آن اکنون توسط پتانسیل جدید تعیین می‌شود. احتمال پیدا کردن سیستم در حالت پایه پتانسیل جدید را می‌توان از رابطه (۱۰-۷۳) یافت:

$$P_{00} = \left|\langle \psi'_0 | \psi_0 \rangle\right|^2$$

با نصف شدن ثابت فنر مقدار w، $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر می‌شود و لذا:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \quad ; \; x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{mw}}$$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x'_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0'^2}\right) \quad ; \; x'_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\frac{w}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\hbar}{mw}}$$

چون:

$$\langle \psi'_0 | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'^*_0(x)\psi_0(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi x_0 x'_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2x_0'^2}\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2x_0^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{mw}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{mw\left(1+\sqrt{2}\right)x^2}{2\sqrt{2}\hbar}\right) dx = \frac{1}{2^{\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{mw}}} \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\hbar\pi}{mw\left(1+\sqrt{2}\right)}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{8}}} \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$$

بنابراین:

$$P_{00} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \simeq 1$$

(ب)

چون ذره با احتمالی نزدیک به یک در حالت پایه‌ی پتانسیل جدید باقی می‌ماند لذا انرژی آن را می‌توان برابر با E'_0 در نظر گرفت و لذا کار انجام شده عبارت خواهد بود از:

$$W = E'_0 - E_0 = \frac{1}{2}\hbar w' - \frac{1}{2}\hbar w = \frac{1}{2}\hbar\left(\frac{w}{\sqrt{2}} - w\right) = \frac{1}{2}\hbar w \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-2}{4}\hbar w$$

که مقداری است منفی.

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۱۰-۱۸

(آ) آهنگ گذار کل مربوط به میرایی یک نوسانگر هماهنگ با بار q و جرم m را از حالت برانگیخته‌ی nاُم به حالتی درست در زیر آن بیابید.

(ب) توان تابش‌شده به‌وسیله‌ی این نوسانگر را درنتیجه‌ی میرایی پیدا کنید.

(پ) طول عمر حالت برانگیخته‌ی nاُم را پیدا کنید.

(ت) مرتبه‌ی بزرگی آهنگ گذار، توان و طول‌عمر حالت برانگیخته‌ی پنجم $(n=۵)$ را در حالت الکترون هماهنگ نوسان کننده (یعنی $q=e$) برای یک تابش اپتیکی $\omega=۱۰^{۱۵}\mathrm{rad.s^{-۱}}$ تخمین بزنید.

حل:

(آ)

طبق رابطه‌ی (۱۰-۱۴۱) داریم:

$$W_{n\to n-۱}=\frac{۴}{۳}\frac{q^{۲}w^{۳}_{n\to n-۱}}{\hbar c^{۳}}\left|\langle n-۱|\hat{X}|n\rangle\right|^{۲}$$

با توجه به اینکه:

$$\hat{X}=\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\left(\hat{a}^{\dagger}+\hat{a}\right)$$

و:

$$\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-۱\rangle$$

$$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle=\sqrt{n+۱}|n+۱\rangle$$

لذا:

$$\hat{X}|n\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\left(\sqrt{n+۱}|n+۱\rangle+\sqrt{n}|n-۱\rangle\right)$$

و چون $|n\rangle$ها راست هنجار هستند داریم:

$$\langle n-۱|\hat{X}|n\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{۲mw}}\sqrt{n}$$

و چون:

$$w_{n\to n-۱}=\frac{E_n-E_{n-۱}}{\hbar}=\frac{\hbar w}{\hbar}=w$$

لذا:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$W_{n\to n-1}=\frac{4}{3}\frac{q^2w^3}{\hbar c^3}\frac{\hbar n}{2mw}=\frac{2}{3}\frac{nq^2w^2}{mc^3}$$

(ب)

توان تابشی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$I_{n\to n-1}=\hbar w_{n\to n-1}W_{n\to n-1}$$

پس:

$$I_{n\to n-1}=\hbar w\left(\frac{2}{3}\frac{q^2w^2n}{mc^3}\right)=\frac{2}{3}\frac{n\hbar q^2w^3}{mc^3}$$

(پ)

طول عمر حالت برانگیخته‌ی nام عبارتست از:

$$\tau=\frac{1}{w_{n\to n-1}}$$

پس:

$$\tau=\frac{3mc^3}{2nq^2w^2}$$

(ت)

در مورد الکترون برای حالت برانگیخته‌ی پنجم داریم:

$$\tau=\frac{3}{10}\frac{m_ec^3}{c^2w^2}=0/3\times1/04\times10^{-7}\text{s}=3/12\times10^{-9}\text{s}$$

سایر محاسبات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

تمرین ۱۰-۱۹

فرض کنید که $\langle\Psi_f|\vec{r}|\Psi_i\rangle$ تقریباً برابر با اندازه‌ی سیستم مورد مطالعه باشد. با استفاده از یک محاسبه‌ی سرانگشتی نیمه‌عمر

(آ) یک گذار دوقطبی الکتریکی در یک اتم که در آن $\hbar\omega\sim10\text{eV}$ و

(ب) یک گذار دوقطبی الکتریکی در یک هسته که در آن $\hbar\omega\sim1\text{MeV}$ را محاسبه کنید.

حل:

(آ)

طبق روابط (۱۰-۱۴۱) و (۱۰-۱۴۳) داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\tau=\frac{۳}{۴}\frac{\hbar c^{۳}}{w^{۳}e^{۲}}\frac{۱}{\left|\langle\psi_f|\vec{r}|\psi_i\rangle\right|^{۲}}$$

پس با فرض:

$$\left|\langle\psi_f|\vec{r}|\psi_i\rangle\right|=a_{۰}$$

آنگاه:

$$\tau=\frac{۳}{۴}\frac{\hbar c^{۳}}{w^{۳}e^{۲}}\frac{۱}{a_{۰}^{۲}}=\frac{۳\hbar}{۴}\left(\frac{\hbar c}{\hbar w}\right)^{۳}\frac{۱}{e^{۲}a_{۰}^{۲}}=\frac{۳\times۱/۰۵۵\times۱۰^{-۳۴}\mathrm{Js}}{۴\left(۱/۶۰۲\times۱۰^{-۱۹}c\times۰/۵۲۹\times۱۰^{-۱۰}\mathrm{m}\right)^{۲}}\left(\frac{۱۹۷/۳۲\mathrm{eV.nm}}{۱۰\mathrm{eV}}\right)^{۳}$$

$$=۷/۹۶۱\mathrm{s}$$

(ب)

برای $\hbar w=۱\mathrm{MeV}$ داریم:

$$\tau=۷/۹۶۱\times۱۰^{-۱۵}\mathrm{s}$$

تمرین ۱۰-۲۰

ذره‌ای ابتدا (یعنی $t<۰$) در حالت پایه‌ی خود و در پتانسیل $V(x)=-V_{۰}\delta(x)$ با $(V_{۰}>۰)$ قرار دارد.
(آ) اگر قدرت پتانسیل تا $۳V_{۰}$ به کندی تغییر کند، انرژی و تابع موج ذره را در پتانسیل جدید بیابید.
(ب) کار انجام شده را در این فرایند محاسبه کنید. یک مقدار عددی برای این‌کار برحسب MeV بیابید در صورتی که ذره یک الکترون باشد و $V_{۰}=۲۰\mathrm{MeV.fm}$.
(پ) اگر قدرت پتانسیل تا $۳V_{۰}$ ناگهان تغییر کند، احتمال یافتن ذره را در حالت پایه‌ی پتانسیل جدید حساب کنید.

حل:

برای $t<۰$، انرژی و تابع موج ذره طبق رابطه‌ی (۴-۲۳۱) عبارتند از:

$$E=-\frac{mV_{۰}^{۲}}{۲\hbar^{۲}}\quad,\quad\psi(x)=\sqrt{\frac{mV_{۰}}{\hbar^{۲}}}\exp\left(-\frac{mV_{۰}(x)}{\hbar^{۲}}\right)$$

(آ)

هنگامی‌که شدت پتانسیل به آهستگی از $V_{۰}$ به $۳V_{۰}$ تغییر کند طبق قضیه‌ی بی‌دررو هیچ گذاری وجود نخواهد داشت و در لحظه t، ذره در حالت پایه پتانسیل جدید یافت خواهد شد و انرژی و تابع موج آن عبارت خواهند بود از:

$$E'=-\frac{m(۳V_{۰})^{۲}}{۲\hbar^{۲}}=-\frac{۹mV_{۰}^{۲}}{۲\hbar^{۲}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\psi'(x)=\sqrt{\frac{m(\mathrm{۳}V_{\circ})}{\hbar^{\mathrm{۲}}}}\exp\left(-\frac{m(\mathrm{۳}V_{\circ})|x|}{\hbar^{\mathrm{۲}}}\right)=\sqrt{\frac{\mathrm{۳}mV_{\circ}}{\hbar^{\mathrm{۲}}}}\exp\left(-\frac{\mathrm{۳}mV_{\circ}|x|}{\hbar^{\mathrm{۲}}}\right)$$

(ب)

کار انجام شده عبارتست از:

$$W=E'-E=-\frac{\mathrm{۹}mV_{\circ}^{\mathrm{۲}}}{\mathrm{۲}\hbar^{\mathrm{۲}}}+\frac{mV_{\circ}^{\mathrm{۲}}}{\mathrm{۲}\hbar^{\mathrm{۲}}}=-\frac{\mathrm{۸}mV_{\circ}^{\mathrm{۲}}}{\mathrm{۲}\hbar^{\mathrm{۲}}}=-\frac{\mathrm{۴}mV_{\circ}^{\mathrm{۲}}}{\hbar^{\mathrm{۲}}}$$

برای یک الکترون و به‌ازای $V_{\circ}=\mathrm{۲۰۰MeV.fm}$ خواهیم داشت:

$$W=-\frac{\mathrm{۴}m_ec^{\mathrm{۲}}V_{\circ}^{\mathrm{۲}}}{\hbar^{\mathrm{۲}}c^{\mathrm{۲}}}=-\frac{\mathrm{۴}\times\mathrm{۰/۵۱۱MeV}(\mathrm{۲۰۰MeV.fm})^{\mathrm{۲}}}{(\mathrm{۱۹۷/۳۲۷MeV.fm})^{\mathrm{۲}}}\simeq-\mathrm{۲/۱MeV}$$

(پ)

اگر شدت پتانسیل به‌طور ناگهانی از $V_{\circ}$ به $\mathrm{۳}V_{\circ}$ تغییر کند ذره آناً خود را در پتانسیل جدید خواهد یافت و احتمال پیدا کردن ذره در حالت پایه پتانسیل جدید از رابطه (۱۰-۷۳) به‌دست می‌آید:

$$P=\left|\langle\psi'|\psi\rangle\right|^{\mathrm{۲}}$$

$$\langle\psi'|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\psi'^{*}(x)\psi(x)=\frac{\sqrt{\mathrm{۳}}mV_{\circ}}{\hbar^{\mathrm{۲}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\mathrm{۴}mV_{\circ}|x|}{\hbar^{\mathrm{۲}}}\right)dx$$

$$=\frac{\mathrm{۲}\sqrt{\mathrm{۳}}mV_{\circ}}{\hbar^{\mathrm{۲}}}\int_{\circ}^{+\infty}\exp\left(\frac{-\mathrm{۴}mV_{\circ}x}{\hbar^{\mathrm{۲}}}\right)dx=\frac{\mathrm{۲}\sqrt{\mathrm{۳}}mV_{\circ}}{\hbar^{\mathrm{۲}}}\left(-\frac{\hbar^{\mathrm{۲}}}{\mathrm{۴}mV_{\circ}}\right)\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{۴}mV_{\circ}x}{\hbar}\right)\right]_{\circ}^{+\infty}=\frac{\mathrm{۲}\sqrt{\mathrm{۳}}}{\mathrm{۴}}$$

پس:

$$P=\left(\frac{\mathrm{۲}\sqrt{\mathrm{۳}}}{\mathrm{۴}}\right)^{\mathrm{۲}}=\mathrm{۷۵}\,\%$$

تمرین ۱۰-۲۱

اتم هیدروژنی در زمان $t=\circ$ در حالت پایه‌ی خود و در یک میدان الکتریکی یکنواخت در راستای y که به‌صورت $E(t)=E_{\circ}\hat{j}e^{-\frac{t^{\mathrm{۲}}}{\tau^{\mathrm{۲}}}}$ می‌باشد قرار دارد. احتمال آن که اتم در یکی از حالت‌های $n=\mathrm{۲}$ پس از یک زمان به‌قدر کافی طولانی ($t=+\infty$) یافت شود را تا اختلال مرتبه‌ی اول حساب کنید.

حل:

پتانسیل ناشی از اندرکنش الکترون اتم هیدروژن با میدان خارجی $\vec{E}(t)=E_{\circ}\vec{j}e^{-\frac{t^{\mathrm{۲}}}{\tau^{\mathrm{۲}}}}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$ عبارتست از:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$V(t)=-c\vec{r}.\vec{E}(t)=-eE_{\circ}\vec{j}e^{-\frac{t^{۲}}{\tau^{۲}}}.\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)=-cE_{\circ}ye^{-\frac{t^{۲}}{\tau^{۲}}}$$

بنابراین از رابطه‌ی (۱۰-۴۱) نتیجه می‌شود که:

$$P_{۱\circ\circ\to۲\circ\circ}=\frac{e^{۲}E_{\circ}^{۲}}{\hbar^{۲}}\left|\langle۲\circ\circ|y|۱\circ\circ\rangle\right|^{۲}\left|\int_{\circ}^{\infty}e^{-\frac{t^{۲}}{\tau^{۲}}}e^{iw_{۲۱}t}dt\right|^{۲}$$

با توجه به اینکه y، $\phi_{۱\circ\circ}(\vec{r})$ و $\phi_{۲\circ\circ}(\vec{r})$ به ترتیب توابعی فرد، زوج و زوج هستند لذا $\langle۲\circ\circ|y|۱\circ\circ\rangle$ مقداری برابر با صفر خواهد داشت و درنتیجه داریم:

$$P_{۱\circ\circ\to۲\circ\circ}=\circ$$

و نیز:

$$P_{۱\circ\circ\to۲۱m}=\frac{e^{۲}E_{\circ}^{۲}}{\hbar^{۲}}\left|\langle۲۱m|y|۱\circ\circ\rangle\right|^{۲}\left|\int_{\circ}^{+\infty}e^{-\frac{t^{۲}}{\tau^{۲}}}e^{iw_{۲۱}t}dt\right|^{۲}$$

که:

$$w_{۲۱}=\frac{E_{۲}-E_{۱}}{\hbar}=\frac{-\frac{R}{۴}+R}{\hbar}=\frac{۳R}{۴\hbar}$$

پس:

$$\int_{\circ}^{\infty}e^{-\frac{t^{۲}}{\tau^{۲}}+iw_{۲۱}t}dt=\exp\left(-\frac{w_{۲۱}^{۲}\tau^{۲}}{۴}\right)\int_{\circ}^{+\infty}e^{-\frac{\left(t-i\frac{w_{۲۱}\tau^{۲}}{۲}\right)^{۲}}{\tau^{۲}}}dt=\exp\left(-\frac{۹R^{۲}\tau^{۲}}{۶۴\hbar^{۲}}\right)\int_{-\frac{۳iR\tau}{۸\hbar}}^{+\infty}e^{-u^{۲}}\tau du$$

$$=\exp\left(-\frac{۹R^{۲}\tau^{۲}}{۶۴\hbar^{۲}}\right)\tau\frac{\sqrt{\pi}}{۲}erf\left(\frac{-۳iR\tau}{۸\hbar}\right)$$

که به‌طور کلی:

$$erf(p)=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{p}^{+\infty}e^{-\frac{u^{۲}}{\tau^{۲}}}du$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۰-۲۲۷) نتیجه می‌شود که:

$$P_{۱\circ\circ\to۲۱\circ}=\circ$$

$$P_{۱\circ\circ\to۲۱۱}=P_{۱\circ\circ\to۲۱-۱}=\frac{e^{۲}E_{\circ}^{۲}}{\hbar^{۲}}\left[\frac{۱}{\sqrt{۶}}\frac{۲۴}{\sqrt{۶}}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵}a_{\circ}\right]^{۲}\left(\frac{\tau\sqrt{\pi}}{۲}\exp\left(-\frac{۹R^{۲}\tau^{۲}}{۶۴\hbar^{۲}}\right)\right)^{۲}\left|erfc\left(\frac{-۳iR\tau}{۸\hbar}\right)\right|^{۲}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$=\frac{۲^{۱۲}\pi e^{۲}E_{۰}^{۲}\tau^{۲}a_{۰}^{۲}}{۳^{۱۰}\hbar^{۲}}\exp\left(-\frac{۹R^{۲}\tau^{۲}}{۳۲\hbar^{۲}}\right)\left|erf\left(\frac{-۳iR\tau}{۸\hbar}\right)\right|^{۲}$$

تمرین ۱۰-۲۲

ذره‌ای ابتدا (یعنی وقتی $t<۰$) در حالت پایه‌ی خود در یک چاه پتانسیل نامتناهی با دیواره‌هایی در $x=۰$ و $x=a$ قرار دارد و با شروع در زمان $t=۰$ در اختلال وابسته به زمان $\hat{V}(t)=V_{۰}\hat{x}\delta\left(x-\frac{۳a}{۴}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$ قرار می‌گیرد که در آن $V_{۰}$ یک پارامتر کوچک است. احتمال آن را بیابید که ذره در $t=+\infty$ در نخستین حالت برانگیخته‌ی خود $(n=۲)$ باشد.

حل:

احتمال گذار از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته عبارتست از:

$$P_{۱۲}=\left|-\frac{i}{\hbar}\int_{۰}^{+\infty}\langle\psi_{۲}|V(t)|\psi_{۱}\rangle e^{iw_{۲۱}t}dt\right|^{۲}=\frac{V_{۰}^{۲}}{\hbar^{۲}}\left|\langle\psi_{۲}|x\delta\left(x-\frac{۳a}{۴}\right)|\psi_{۱}\rangle\right|^{۲}\left|\int_{۰}^{+\infty}e^{\left(iw_{۲۱}-\frac{۱}{\tau}\right)t}dt\right|^{۲}$$

که:

$$w_{۲۱}=\frac{E_{۲}-E_{۱}}{\hbar}=\frac{\hbar^{۲}\pi^{۲}}{۲ma^{۲}}\frac{۲^{۲}-۱^{۲}}{\hbar}=\frac{۳\hbar\pi^{۲}}{۲ma^{۲}}$$

$$\langle\psi_{۲}|\hat{x}\delta\left(\hat{x}-\frac{۳a}{۴}\right)|\psi_{۱}\rangle=\int_{۰}^{a}\psi_{۲}^{*}(x)x\delta\left(x-\frac{۳a}{۴}\right)\psi_{۱}(x)dx$$

$$=\int_{۰}^{a}\left(\sqrt{\frac{۲}{a}}\right)^{۲}x\delta\left(x-\frac{۳a}{۴}\right)\sin\left(\frac{۲\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx$$

$$=\frac{۲}{a}\frac{۳a}{۴}\sin\left(\frac{۲\pi}{a}\frac{۳a}{۴}\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{۳a}{۴}\right)=\frac{-۳}{۲}\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

چون:

$$\int_{۰}^{+\infty}e^{\left(iw_{۲۱}-\frac{۱}{\tau}\right)t}dt=\frac{۱}{iw_{۲۱}-\frac{۱}{\tau}}\left[e^{\left(iw_{۲۱}-\frac{۱}{\tau}\right)t}\right]_{۰}^{+\infty}=\frac{۱}{\frac{۱}{\tau}-iw_{۲۱}}$$

بنابراین:

$$P_{۱۲}=\frac{V_{۰}^{۲}}{\hbar^{۲}}\left(-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}\right)^{۲}\left|\frac{۱}{\frac{۱}{\tau}-iw_{۲۱}}\right|^{۲}=\frac{V_{۰}^{۲}}{\hbar^{۲}}\frac{۹}{۸}\frac{\tau^{۲}}{۱+\tau^{۲}w_{۲۱}^{۲}}=\frac{۹V_{۰}^{۲}}{۸\hbar^{۲}}\frac{\tau^{۲}}{۱+\tau^{۲}\frac{۹\hbar^{۲}\pi^{۲}}{۴m^{۲}a^{۴}}}=\frac{۹V_{۰}^{۲}\tau^{۲}m^{۲}a^{۴}}{۲\hbar^{۲}\left(۴m^{۲}a^{۴}+۹\pi^{۴}\hbar^{۴}\tau^{۲}\right)}$$

تمرین ۱۰-۲۳

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

یک نوسانگر هماهنگ (سه‌بعدی) همسانگرد را درنظر بگیرید که گذاری از حالت برانگیخته‌ی دوم به اول انجام می‌دهد یعنی $(2s \to 1p)$.

(آ) آهنگ گذار مربوط به با $2s \to 1p$ را حساب کنید.

(ب) چگالی مربوط به گذار $2s \to 1p$ را بیابید.

حل:

اولین حالت برانگیخته یا حالت $1p$ متناظر با $(nlm)=(11m)$ است و انرژی آن $E_1=\frac{5\hbar w}{2}$ و تابع موج آن عبارتست از:

$$\psi_{11m}(r,\theta,\phi)=R(r)Y_{1m}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{8}{3\sqrt{\pi}}}\left(\frac{mw}{\hbar}\right)^{\frac{5}{4}} re^{-\frac{mwr^2}{2\hbar}}Y_{1m}(\theta,\phi)$$

و حالت $2s$ نیز متناظر با $(nlm)=(200)$ و انرژی آن $E_2=\frac{7\hbar w}{2}$ و تابع موج آن عبارتست از:

$$\psi_{20.}(r,\theta,\phi)=R_{20}Y_{0.}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{8}{3\sqrt{\pi}}}\left(\frac{mw}{\hbar}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{2}-\frac{mwr^2}{\hbar}\right)e^{-\frac{mwr^2}{2\hbar}}Y_{0.}(\theta,\phi)$$

با توجه به این توضیحات:

(آ)

از رابطه‌ی (۱۰-۱۴۱) داریم:

$$W_{2s\to 1p}=\frac{4}{3}\frac{w_{2s\to 1p}^3}{\hbar c^3}\left|\vec{d}_{2s\to 1p}\right|^2$$

که:

$$\left|\vec{d}_{2s\to 1p}\right|^2=e^2\left|\langle 2s|\vec{\varepsilon}.\vec{r}|1p\rangle\right|^2=e^2\left|\int_0^{+\infty}r^3R_{20}^*(r)R_{11}(r)dr\right|^2\left|\langle 0.|\vec{\varepsilon}.\hat{r}|1m\rangle\right|^2$$

اما با توجه به رابطه‌ی (۱۰-۲۱۸) داریم:

$$\left|\langle 0.|\vec{\varepsilon}.\hat{r}|1m\rangle\right|^2=\left|\langle 1m|\vec{\varepsilon}.\hat{r}|0.\rangle\right|^2=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2\right)\left(\delta_{m,-1}+\delta_{m,1}\right)+\varepsilon_z^2\delta_{m0}\right]$$

و از طرفی:

$$\int_0^{+\infty}r^3R_{20}^*(r)R_{11}(r)dr=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{mw}{\hbar}\right)^2\int_0^{+\infty}r^4\left(\frac{3}{2}-\frac{mwr^2}{\hbar}\right)e^{-\frac{mwr^2}{\hbar}}dr$$

چون:

$$\int_0^{+\infty}x^6e^{-\alpha x^2}dx=\frac{15}{8\alpha^3}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\quad,\quad\int_0^{+\infty}x^4e^{-\alpha x^2}dx=\frac{3}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

پس:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\int_{0}^{+\infty} r^{2} R_{20}^{*}(r) R_{11}(r) dr = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{mw}{\hbar}\right)^{2} \left[\frac{3}{2}\frac{3}{4}\left(\frac{\hbar}{mw}\right)^{2}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{mw}} - \frac{mw}{\hbar}\frac{15}{8}\left(\frac{\hbar}{mw}\right)^{3}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{mw}}\right] = -2\sqrt{\frac{\hbar}{mw}}$$

$$W_{2s\to 1p} = \frac{4w^{2}e^{2}}{3\hbar c^{3}} \frac{4\hbar}{mw} \frac{1}{3} \sum_{m=-1}^{+1} \left[\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{x}^{2}+\varepsilon_{y}^{2}\right)\left(\delta_{m,-1}+\delta_{m,1}\right)+\varepsilon_{z}^{2}\delta_{m,0}\right] = \frac{16}{9}\frac{e^{2}w^{2}}{mc^{3}}$$

(ب)

برای شدت داریم:

$$I_{2s\to 1p} = \hbar w W_{2s\to 1p} = \frac{16}{9}\frac{\hbar e^{2}w^{3}}{mc^{3}}$$

تمرین ۱۰-۲۴

ذره‌ای را در نظر بگیرید که ابتدا (یعنی $t<0$) در حالت پایه‌ی خود در جعبه‌ی پتانسیل سه‌بعدی:

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & 0<x<a, 0<y<2a, 0<z<4a \\ +\infty & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

قرار دارد.

(آ) انرژی‌ها و توابع موج حالت پایه و نخستین حالت برانگیخته را بیابید.

(ب)این ذره با شروع در زمان $t=0$، تحت اختلال وابسته به زمان $\hat{V}(t) = V_{0}\hat{x}\hat{z}e^{-t^{2}}$ قرار می‌گیرد که در آن V_0 یک پارامتر کوچک است. احتمال آن را محاسبه کنید که ذره پس از یک زمان طولانی $t=+\infty$ در نخستین حالت برانگیخته یافت شود.

حل:

(آ)

ویژه توابع و انرژی‌های این ذره عبارتند از:

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_x\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{2}{2a}}\sin\left(\frac{n_y\pi}{2a}\right)\sqrt{\frac{2}{4a}}\sin\left(\frac{n_z\pi}{4a}\right)$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{a}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{2a}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{4a}\right)$$

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^{2}\pi^{2}n_x^{2}}{2ma^{2}} + \frac{\hbar^{2}\pi^{2}n_y^{2}}{2m(2a)^{2}} + \frac{\hbar^{2}\pi^{2}n_z^{2}}{2m(4a)^{2}} = \frac{\hbar^{2}\pi^{2}}{2ma^{2}}\left(n_x^{2}+\frac{n_y^{2}}{4}+\frac{n_z^{2}}{16}\right)$$

حالت پایه‌ی معادل با $n_x=n_y=n_z=1$ می‌باشد؛ یعنی:

$$\psi_{111}(x,y,z) = \frac{1}{a\sqrt{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{4a}\right) = \psi_{1}(x)\psi_{1}(y)\psi_{1}(z) = \psi_{0}(x,y,z)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$E_{۱۱۱}=\frac{\hbar^۲\pi^۲}{۲ma^۲}\left(۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}\right)=\frac{۲۱\hbar^۲\pi^۲}{۳۲ma^۲}=E_۰$$

اولین حالت برانگیخته نیز معادل با $n_z=۲$ و $n_x=n_y=۱$ می‌باشد؛ یعنی:

$$\psi_{۱۱۲}(x,y,z)=\frac{۱}{a\sqrt{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{۲a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{۴a}\right)=\psi_۱(x)\psi_۱(y)\psi_۲(z)=\psi_۱(x,y,z)$$

$$E_{۱۱۲}=\frac{\hbar^۲\pi^۲}{۲ma^۲}\left(۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۴}{۱۶}\right)=\frac{۳\hbar^۲\pi^۲}{۴ma^۲}=E_۱$$

(ب)

احتمال گذار از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته عبارتست از:

$$P_{۰۱}=\left|-\frac{i}{\hbar}\int_۰^{+\infty}\langle\psi_۱|V(t)|\psi_۰\rangle e^{iw_{۱۰}t}dt\right|^۲=\frac{V_۰^۲}{\hbar^۲}\left|\langle\psi_۱|\hat{x}\hat{z}|\psi_۰\rangle\right|^۲\left|\int_۰^{+\infty}e^{\left(iw_{۱۰}-t^۲\right)}dt\right|^۲$$

که:

$$\langle\psi_۱|\hat{x}\hat{z}|\psi_۰\rangle=\int dx\,dy\,dz\,\psi_۱^*(x,y,z)\psi_۰(x,y,z)=\int_۰^{a}dx\,\psi_۱^*(x)x\psi_۱(x)\int_۰^{۲a}dy\,\psi_۱^*(y)\psi_۱(y)$$

$$\times\int_۰^{۴a}\psi_۲^*(z)z\psi_۱(z)=\frac{a}{۲}(۱)\int_۰^{۴a}\frac{۲z}{۴a}\sin\left(\frac{۲\pi z}{۴a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{۴a}\right)dz=\frac{a}{۲}\frac{۱۲۸a}{۹\pi^۲}=\frac{۶۴a^۲}{۹\pi^۲}$$

با توجه به اینکه:

$$\int_۰^{+\infty}e^{\left(iw_{۱۰}-t^۲\right)}dt=e^{-\frac{w_{۱۰}^۲}{۴}}\frac{\sqrt{\pi}}{۲}erf\left(-i\frac{w_{۱۰}}{۲}\right)$$

و چون:

$$w_{۱۰}=\frac{E_۱-E_۰}{\hbar}=\frac{۳\hbar\pi^۲}{۳۲ma^۲}$$

لذا:

$$\int_۰^{+\infty}e^{\left(iw_{۱۰}-t^۲\right)}dt=\exp\left(-\frac{۹\hbar^۲\pi^۴}{۴۰۹۶m^۲a^۴}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{۲}erf\left(-\frac{۳\hbar\pi^۲i}{۶۴ma^۲}\right)$$

پس:

$$P_{۰۱}=\frac{V_۰^۲}{\hbar^۲}\left(\frac{۶۴a^۲}{۹\pi^۲}\right)^۲\left[\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\exp\left(-\frac{۹\hbar^۲\pi^۴}{۴۰۹۶m^۲a^۴}\right)\right]^۲\left|erf\left(-\frac{۳\hbar\pi^۲i}{۶۴ma^۲}\right)\right|^۲$$

$$=\frac{۱۰۲۴V_۰^۲a^۴}{۸۱\hbar^۲\pi^۳}\exp\left(-\frac{۹\hbar^۲\pi^۴}{۲۰۴۸m^۲a^۴}\right)\left|erf\left(-\frac{۳\hbar\pi^۲i}{۶۴ma^۲}\right)\right|^۲$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

فصل یازدهم

نظریه‌ی پراکندگی

تمرین ۱۱-۱

پراکندگی یک ذره‌ی آلفا با انرژی 5MeV (یعنی، یک هسته‌ی هلیوم با $z_1=2$ و $A_1=4$) از یک هسته‌ی آلومینیوم ($z_2=13$ و $A_2=27$) را درنظر بگیرید. اگر زاویه‌ی پراکندگی ذره‌ی آلفا در چارچوب آزمایشگاه $\theta_1=30^\circ$ باشد

(آ) زاویه‌ی پراکندگی θ در چارچوب مرکز جرم را بیابید.

(ب) یک تخمین عددی از سطح مقطع رادرفورد ارائه دهید.

حل:

(آ)

از رابطه:

$$tg\theta_1=\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\frac{m_1}{m_2}}$$

با توجه به اینکه:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{A_1}{A_2}=\frac{4}{27}$$

داریم:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$tg\,۳۰^\circ = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{۴}{۲۷}}$$

که نتیجه می‌شود:

$$\theta = ۳۶^\circ$$

(ب)

از رابطه‌ی (۱۱-۷۹) داریم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_۱ Z_۲ \alpha}{۴}\right)^۲ \left(\frac{\hbar c}{E}\right)^۲ \sin^{-۴}\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

چون $Z_۱ = ۲$، $Z_۲ = ۱۳$، $\theta = ۳۶$، $\alpha = \frac{۱}{۱۳۷}$، $\hbar c = ۱۹۷/۳۳ \text{MeV.fm}$ و $E = ۵\text{MeV}$ لذا داریم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{۲\times۱۳}{۱۳۷\times۴}\right)^۲ \left(\frac{۱۹۷/۳۳\,\text{MeV.fm}}{۵\,\text{MeV}}\right)^۲ \sin^{-۴}\left(۱۸^\circ\right) \simeq ۳۸۴/۶\,\text{fm}^۲ = ۳/۸۵\times۱۰^{-۲۸}\text{m}^۲$$
$$= ۳/۸۵\,\text{bam}$$

تمرین ۱۱-۲

الف) سطح مقطع‌های دیفرانسیلی و کل را برای برخورد کلاسیکی دو کره‌ی سخت به شعاع‌های r و R پیدا کنید که R شعاع کره‌ی بزرگتر است و کره‌ی بزرگتر ساکن می‌باشد.

ب) به کمک نتیجه قسمت (الف) سطح مقطع‌های دیفرانسیلی و کل را برای پراکندگی ذرات نقطه‌گون از کره‌ی سخت و ساکن با شعاع R پیدا کنید.

راهنمایی: می‌توان از رابطه‌ی کلاسیکی $\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\left[b(\theta)/\sin\theta\right] db/d\theta$ که در آن b پارامتر برخورد است، استفاده کرد

حل:

تمرین ۱۱-۳

پراکندگی از پتانسیل $V(r) = V_۰ e^{-\frac{r^۲}{a^۲}}$ را در نظر بگیرید، موارد زیر را پیدا کنید.

(آ) سطح مقطع دیفرانسیلی را در تقریب اول بورن و

(ب) سطح مقطع کل

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

حل:

(آ)

طبق رابطه‌ی (۱۱-۷۰) داریم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^{+\infty} r' V\left(r'\right)\sin\left(qr'\right)dr'\right|^2$$

که:

$$q=2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

اما:

$$\int_0^{+\infty} r' V\left(r'\right)\sin\left(qr'\right)dr'=\int_0^{+\infty} r' V_0 e^{-\frac{r'^2}{a^2}}\sin\left(qr'\right)dr'=V_0\,\mathrm{Im}\left[\int_0^{+\infty} r' e^{-\frac{r'^2}{a^2}} e^{iqr'}dr'\right]$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند که:

$$\int_0^{+\infty} r' e^{-\frac{r'^2}{a^2}} e^{iqr'}dr'=\frac{a^2}{2}+\frac{iqa^3}{4}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{a^2q^2}{4}}erf\left(\frac{-iqa}{2}\right)$$

که:

$$erf\left(p\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_p^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

لذا:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4\mu^2}{\hbar^2 q^2}\left\{\frac{qa^3\sqrt{\pi}}{4}e^{-\frac{a^2q^2}{4}}\,\mathrm{Re}\left[erf\left(\frac{-iqa}{c}\right)\right]\right\}^2=\frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2}\left(\frac{q^2a^6\pi}{16}\right)e^{-\frac{a^2q^2}{2}}\left\{\mathrm{Re}\left[erf\left(\frac{-iqa}{2}\right)\right]\right\}^2$$

$$=\frac{\pi\mu^2a^6}{4\hbar^4}\exp\left[-\frac{4\mu a^2E}{\hbar^2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\left\{\mathrm{Re}\left[erf\left(-\frac{ia}{\hbar}\sqrt{2\mu E}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]\right\}^2$$

در رسیدن به این نتیجه از رابطه‌ی $E=\frac{\hbar^2k^2}{2\mu}$ بهره برده‌ایم.

(ب)

سطح مقطع کل از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\frac{d\sigma}{d\Omega}\sin\theta\,d\theta$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پس:

$$\sigma = \frac{\pi\mu^2 a^4}{2\hbar^4}\int_0^{\pi} \exp\left(-\frac{4\mu a^2 E}{\hbar}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left\{\mathrm{Re}\left[erfc\left(-\frac{ia}{\hbar}\sqrt{2\mu E}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]\right\}^2 \sin\theta\, d\theta$$

تمرین ۱۱-۴

سطح مقطع دیفرانسیلی را در تقریب اول بورن برای پراکندگی یک ذره به‌وسیله‌ی چاه پتانسیل مربعی جاذبه‌ای زیر محاسبه کنید:

$V(r) = -V_0$ برای $r < a$ و $V(r) = 0$ برای $r > a$، با $V_0 > 0$

حل:

طبق رابطه‌ی (۱۱-۷۰) داریم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^{+\infty} r' V(r')\sin(qr')\,dr'\right|^2$$

که:

$$q = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (*)$$

پس:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^{a} r'(-V_0)\sin(qr')\,dr'\right|^2$$

اما:

$$\int_0^a r'\sin(qr')\,dr' = \frac{-aq\cos(qa)+\sin(qa)}{q^2}$$

پس:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2 V_0^2}{\hbar^4 q^2}\left|\frac{-aq\cos(qa)+\sin(qa)}{q^2}\right|^2 = \frac{4\mu^2 V_0^2}{\hbar^4 q^6}\left[a^2q^2\cos^2(qa)+\sin^2(qa)-aq\sin(2qa)\right]$$

$$= \frac{4\mu^2 V_0^2}{\hbar^4 q^6}\left|\frac{\left(a^2q^2-1\right)\cos(2qa)-2aq\sin(2qa)+a^2q^2}{2}\right|$$

با استفاده از رابطه‌ی (*) نتیجه می‌شود که:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{۲\mu^{۲}V_{۰}^{۲}}{\hbar^{۴}}\frac{\left(۴k^{۲}a^{۲}\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)-۱\right)\cos\left(۲ka\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\right)-۲ak\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\sin\left(۲ak\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\right)+۴a^{۲}k^{۲}a^{۲}\sin^{۲}\left(\frac{\theta}{۲}\right)}{۶۴k^{۶}\sin^{۶}\left(\frac{\theta}{۲}\right)}$$

با استفاده از رابطه‌ی $E=\frac{\hbar^{۲}k^{۲}}{۲\mu}$ می‌توان رابطه اخیر را به‌جای k بر حسب E نوشت.

تمرین ۱۱-۵

پراکندگی کشسان از پتانسیل دلتای $V(r)=V_{۰}\delta(r-a)$ را در نظر بگیرید.

(آ) سطح مقطع دیفرانسیلی در تقریب اول بورن را محاسبه کنید.

(ب) رابطه‌ای میان $V_{۰}$، a، μ و k بیابید به‌طوری که تقریب بورن معتبر باشد.

حل:

(آ)

طبق رابطه‌ی (۱۱-۷۰) داریم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{۴\mu^{۲}}{\hbar^{۴}q^{۲}}\left|\int_{۰}^{+\infty}r'V\left(r'\right)\sin\left(qr'\right)dr'\right|^{۲}$$

با توجه به اینکه:

$$V\left(r'\right)=V_{۰}\delta\left(r'-a\right)$$

داریم:

$$\int_{۰}^{+\infty}r'V\left(r'\right)\sin\left(qr'\right)dr'=\int_{۰}^{+\infty}r'V_{۰}\delta\left(r'-a\right)\sin\left(qr'\right)dr'=aV_{۰}\sin\left(qa\right)$$

پس:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{۴\mu^{۲}}{\hbar^{۴}q^{۲}}\left(aV_{۰}\sin\left(qa\right)\right)^{۲}=\frac{۴\mu^{۲}a^{۲}V_{۰}^{۲}}{\hbar^{۴}q^{۲}}\sin^{۲}\left(qa\right)$$

با توجه به اینکه:

$$q=۲k\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

لذا داریم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{۴\mu^{۲}a^{۲}V_{۰}^{۲}\sin^{۲}\left[۲ka\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\right]}{\hbar^{۴}\left(۲k\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\right)^{۲}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

(ب)

شرط تقریب مرتبه‌ی اول بودن توسط رابطه‌ی (۱۱-۷۴) بیان می‌شود:

$$\frac{\mu}{\hbar^2 k}\left|\int_0^{+\infty} V(r')\left(e^{2ikr'}-1\right)dr'\right| << 1$$

پس در مورد $V(r')=V_0\delta(r'-a)$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\mu}{\hbar^2 k}\left|\int_0^{+\infty} V_0\delta(r'-a)\left(e^{2ikr'}-1\right)dr'\right| << 1$$

یعنی:

$$\frac{\mu}{\hbar^2 k}\left|V_0\left(e^{2ika}-1\right)\right| = \frac{\mu|V_0|}{\hbar^2 k}\sqrt{\left(e^{2ika}-1\right)\left(e^{-2ika}-1\right)} = \frac{2\mu|V_0\sin ka|}{\hbar^2 k} << 1$$

تمرین ۱۱-۶

پراکندگی کشسان از پتانسیل $V(r)=V_0 e^{-\frac{r}{a}}$ را درنظر بگیرید که در آن V_0 و a ثابت هستند.

(آ) سطح مقطع دیفرانسیلی در تقریب اول بورن را محاسبه کنید.

(ب) رابطه‌ای میان V_0، a، μ و k طوری بیابید که تقریب بورن معتبر باشد.

(پ) سطح مقطع کل را با استفاده از تقریب بورن بیابید.

حل:

(آ)

طبق رابطه‌ی (۱۱-۷۰) داریم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^{+\infty} r' V(r')\sin(qr')\,dr'\right|^2$$

با توجه به اینکه:

$$V(r') = V_0 e^{-\frac{r'}{a}}$$

داریم:

$$\int_0^{+\infty} r' V(r')\sin(qr')\,dr' = \int_0^{+\infty} r' V_0 e^{-\frac{r'}{a}}\sin(qr')\,dr' = V_0\,\mathrm{Im}\left[\int_0^{+\infty} r' e^{-\frac{r'}{a}} e^{iqr'}\,dr'\right]$$

چون:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$\int_{۰}^{+\infty} r' e^{-\frac{r'}{a}} e^{iqr'} dr' = -\frac{۱}{\left(iq-\frac{۱}{a}\right)^{۲}} = -\frac{\left(-iq-\frac{۱}{a}\right)^{۲}}{\left(iq-\frac{۱}{a}\right)^{۲}\left(-iq-\frac{۱}{a}\right)^{۲}} = -\frac{-q^{۲}+\frac{۲iq}{a}+\frac{۱}{a^{۲}}}{\left(q^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}\right)^{۲}}$$

پس:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{۴\mu^{۲}V_{۰}^{۲}}{\hbar^{۴}q^{۲}}\left|-\frac{\frac{۲q}{a}}{\left(q^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}\right)^{۲}}\right|^{۲} = \frac{۴\mu^{۲}V_{۰}^{۲}}{\hbar^{۴}q^{۲}}\frac{۴q^{۲}a^{۶}}{\left(a^{۲}q^{۲}+۱\right)^{۴}} = \frac{۱۶\mu^{۲}V_{۰}^{۲}a^{۶}}{\hbar^{۴}\left(a^{۲}q^{۲}+۱\right)^{۴}}$$

با توجه به اینکه:

$$q = ۲k\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

لذا داریم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{۱۶\mu^{۲}V_{۰}^{۲}a^{۶}}{\hbar\left(۴k^{۲}a^{۲}\sin^{۲}\left(\frac{\theta}{۲}\right)+۱\right)^{۴}}$$

(ب)

شرط تقریب مرتبه‌ی اول بودن از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\mu}{\hbar^{۲}k}\left|\int_{۰}^{+\infty} V\left(r'\right)\left(e^{۲ikr'}-۱\right)dr'\right| << ۱$$

چون:

$$V\left(r'\right) = V_{۰}e^{-\frac{r'}{a}}$$

پس لازم است که:

$$\frac{\mu}{\hbar^{۲}k}\left|\int_{۰}^{+\infty} V_{۰}e^{-\frac{r'}{a}}\left(e^{۲ikr'}-۱\right)dr'\right| << ۱$$

اما:

$$\int_{۰}^{+\infty} e^{-\frac{r'}{a}}\left(e^{۲ikr'}-۱\right)dr' = \left[\frac{e^{\left(۲ik-\frac{۱}{a}\right)r'}}{۲ik-\frac{۱}{a}} + a\,e^{-\frac{r'}{a}}\right]_{۰}^{+\infty} = -\left(\frac{۱}{۲ik-\frac{۱}{a}}+a\right) = -\left(\frac{-۲ik-\frac{۱}{a}}{۴k^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}}+a\right)$$

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$= -\frac{-۲ik + ۴k^۲a}{۴k^۲ + \frac{۱}{a^۲}} = \frac{۲k\left(i - ۲ka\right)}{۴k^۲ + \frac{۱}{a^۲}}$$

بنابراین:

$$\frac{\mu\left|V_۰\right|}{\hbar^۲k}\frac{۲k}{۴k^۲ + \frac{۱}{a^۲}}\sqrt{۱ + ۴k^۲a^۲} \ll ۱$$

و یا به عبارتی:

$$\frac{۲\mu\left|V_۰\right|a^۲}{\hbar^۲\sqrt{۱ + ۴k^۲a^۲}} \ll ۱$$

(پ)

سطح مقطع کل از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma = \int_۰^{۲\pi} d\varphi \int_۰^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}\sin\theta\, d\theta = \frac{۳۲\pi\mu^۲V_۰^۲a^۶}{\hbar^۴}\int_۰^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{\left[۴k^۲a^۲\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right) + ۱\right]^۴}$$

اما:

$$\int_۰^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{\left[۴k^۲a^۲\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right) + ۱\right]^۴} = \int_۰^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{\left[۲k^۲a^۲\left(۱ - \cos\theta\right) + ۱\right]^۴} = \left[\frac{۱}{۲k^۲a^۲}\frac{-۱}{۳\left[۲k^۲a^۲\left(۱ - \cos\theta\right) + ۱\right]^۳}\right]_۰^{\pi}$$

$$= \frac{-۱}{۶k^۲a^۲}\left[\frac{۱}{\left(۴k^۲a^۲ + ۱\right)^۳ - ۱}\right]$$

پس:

$$\sigma = \frac{۳۲\pi\mu^۲V_۰^۲a^۶}{\hbar^۴\left(۶k^۲a^۲\right)}\left[۱ - \frac{۱}{\left(۱ + ۴k^۲a^۲\right)^۳}\right] = \frac{۱۶\pi\mu^۲V_۰^۲a^۴\left[\left(۱ + ۴k^۲a^۲\right)^۳ - ۱\right]}{۳k^۲\hbar^۴\left(۱ + ۴k^۲a^۲\right)^۳}$$

$$= \frac{۶۴\pi\mu^۲V_۰^۲a^۶\left(۱۶k^۴a^۴ + ۱۲k^۲a^۲ + ۳\right)}{۳\hbar^۴\left(۱ + ۴k^۲a^۲\right)^۳}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

تمرین ۱۱-۷

سطح مقطع دیفرانسیلی در اولین تقریب بورن برای پراکندگی کشسان ذره‌ای به جرم m را به دست آورید. فرض کنید ذره در ابتدا در راستای محور tها در حرکت باشد و از پتانسیل دو دلتایی غیر کروی زیر عبور کند:

$$V(\vec{r}) = V_0\delta(\vec{r} - a\vec{k}) - V_0\delta(\vec{r} + a\vec{k})$$

که در آن $\vec{k}$ بردار یکه در راستای محور z است.

حل:

چون پتانسیل فاقد تقارن کروی است، لذا سطح مقطع دیفرانسیلی از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\int e^{i\vec{q}.\vec{r}'}V(\vec{r}')d^3r'\right|^2$$

در اینجا داریم:

$$V(\vec{r}') = V_0\delta(\vec{r}' - a\vec{k}) - V_0\delta(\vec{r}' + a\vec{k})$$

چون:

$$\delta(\vec{r} \pm a\vec{k}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z \pm a)$$

لذا:

$$\int e^{i\vec{q}.\vec{r}}V(\vec{r}')d^3r' = V_0\int\delta(x)e^{ixq_x}dx\int\delta(y)e^{iyq_y}dy\int\left[\delta(z-a) - \delta(z+a)\right]e^{izq_z}dz$$
$$= V_0\left(e^{iaq_z} - e^{-iaq_z}\right) = 2iV_0\sin(aq_z)$$

با توجه به مسئله‌ی (۱۱-۵) که در متن کتاب حل شده است داریم:

$$q_z = q\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2k\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

لذا:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4}\left(4V_0^2\sin^2\left(2ka\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right) = \frac{m^2V_0^2}{\pi^2\hbar^4}\sin^2\left(2ak\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

تمرین ۱۱-۸

سطح مقطع دیفرانسیلی در تقریب اول بورن برای پراکندگی نوترون-نوترون را بیابید که در آن پتانسیل با $V(r) = V_0e^{-\frac{r}{a}}$ تقریب زده می‌شود.

حل:

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

مشابه با تمرین (۱۱-۶) داریم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{۱۶\mu^{۲}V_{۰}^{۲}a^{۶}}{\hbar^{۴}\left(۴k^{۲}a^{۲}\sin^{۲}\left(\frac{\theta}{۲}\right)+۱\right)^{۴}}$$

در این تمرین داریم:

$$\mu=\frac{m_n}{۲}$$

پس:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{۴m_n^{۲}V_{۰}^{۲}a^{۶}}{\hbar^{۴}\left(۴k^{۲}a^{۲}\sin^{۲}\left(\frac{\theta}{۲}\right)+۱\right)^{۴}}$$

تمرین ۱۱-۹

پراکندگی کشسان یک ذره به جرم m و تکانه‌ی اولیه‌ی $\hbar k$ از پتانسیل $V(\vec{r})=V_{۰}\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)$ را درنظر بگیرید که در آن $V_{۰}$ ثابت است.

(آ) بُعد فیزیکی ثابت $V_{۰}$ چیست؟

(ب) سطح مقطع‌های دیفرانسیلی در تقریب اول بورن را محاسبه کنید.

(پ) قسمت (ب) را برای حالتی محاسبه کنید که در آن پتانسیل با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$V(\vec{r})=V_{۰}\delta(x)[\delta(y-b)\delta(z)+\delta(y)\delta(z-a)]$$

حل:

(آ)

با توجه به اینکه $\delta(x)$، $\delta(y)$ و $\delta(z-a)$ همگی دارای بعد عکس طول می‌باشند لذا $V_{۰}$ دارای بعد انرژی × حجم می‌باشد.

(ب)

چون پتانسیل فاقد تقارن کروی است، لذا سطح مقطع دیفرانسیلی از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\mu^{۲}}{۴\pi^{۲}\hbar^{۴}}\left|\int e^{i\vec{q}.\vec{r}}V(\vec{r})d^{۳}r\right|^{۲}$$

چون:

$$V(\vec{r})=V_{۰}\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

لذا:

$$\int e^{i\vec{q}.\vec{r}}V(\vec{r})d^3r = V_0\int\delta(x)e^{ixq_x}dx\int\delta(y)e^{iyq_y}dy\int\delta(z-a)e^{izq_z}dz = V_0e^{iaq_z}$$

بنابراین:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2V_0^2\left|e^{iaq_z}\right|^2}{4\pi^2\hbar^4} = \frac{\mu^2V_0^2}{4\pi^2\hbar^4}$$

(پ)

در این مورد خواهیم داشت:

$$\int e^{i\vec{q}.\vec{r}}V(\vec{r})d^3r = V_0\int\delta(x)e^{ixq_x}dx\left[\int\delta(y-b)e^{iyq_y}dy\int\delta(z)e^{izq_z}dz + \int\delta(y)e^{iyq_y}dy\int\delta(z-a)^{izq_z}dz\right] = V_0\left(e^{ibq_y}+e^{iaq_z}\right)$$

پس:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2V_0^2}{4\pi^2\hbar^4}\left(e^{ibq_y}+e^{iaq_z}\right)\left(e^{-ibq_y}+e^{-iaq_z}\right) = \frac{\mu^2V_0^2}{\pi^2\hbar^4}\cos\left(\frac{aq_z-bq_y}{2}\right)$$

تمرین ۱۱-۱۰

پراکندگی موج S $(L=0)$ از یک ذره به جرم m و از یک پتانسیل کروی دافعه‌ای $V(r)=V_0$ را برای $r<a$ و $V(r)=0$ را برای $r>a$، با $V_0>0$ در نظر بگیرید.

(آ) جابه‌جایی فاز موج S $(L=0)$ و سطح مقطع کل را حساب کنید.

(ب) نشان دهید که در حد $V_0\to\infty$ جابه‌جایی فاز با $\delta_0=-ka$ داده می‌شود. سطح مقطع کل را بیابید.

حل:

برای موج S، معادله شرودینگر برای تابع شعاعی عبارتست از:

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u(r)}{dr^2}+V_0u(r)=Eu(r) \quad ; \quad r<a$$

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u(r)}{dr^2}=Eu(r) \quad ; \quad r>a$$

که در آن $u(r)=rR(r)$. با فرض اینکه انرژی E مثبت باشد و نیز $V_0>E$ با تعریف $k_1^2=\frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0-E)$ و $k_2^2=\frac{2\mu E}{\hbar^2}$ حل معادلات فوق عبارت خواهد بود از:

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

$$u(r)=\begin{cases} u_1(r)=A\sin h(k_1 r) & ;\ r<a \\ u_2(r)=B\sin(k_2 r+\delta_0) & ;\ r>a \end{cases}$$

در رسیدن به رابطه اخیر فرض $u(0)=0$ را اعمال نموده‌ایم. با اعمال شرط پیوستگی $u(r)$ و مشتق آن $\frac{du(r)}{dr}$ در $r=a$ داریم:

$$A\sin h(k_1 a)=B\sin(k_2 a+\delta_0)$$

$$k_1 A\cos h(k_1 a)=k_2 B\cos(k_2 a+\delta_0)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$tg(k_2 a+\delta_0)=\frac{k_2}{k_1}tg\,h(k_1 a)$$

و یا:

$$\delta_0=-k_2 a+tg^{-1}\left[\frac{k_2}{k_1}tg\,h(k_1 a)\right]$$

(ب)

در حد $V_0\to\infty$، k_1 به‌سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد بنابراین:

$$\lim_{V_0\to\infty}\delta_0=\lim_{k_1\to+\infty}\left[-k_2 a+tg^{-1}\left[\frac{k_2}{k_1}tg\,h(k_1 a)\right]\right]=-k_2 a+tg^{-1}0=-k_2 a$$

برای سطح مقطع کل طبق رابطه‌ی (۱۱-۱۰۴) خواهیم داشت:

$$\sigma=\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0=\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\left[-k_2 a+tg^{-1}\left[\frac{k_2}{k_1}tg\,h(k_1 a)\right]\right]$$

که برای حالت حدی $V_0\to\infty$ نتیجه می‌دهد:

$$\sigma=\frac{4\pi}{k^2}\sin^2(-ka)\simeq\frac{4\pi}{k^2}(k^2a^2)=4\pi a^2$$

که در اینجا فرض ناچیز بودن انرژی را اعمال نموده‌ایم.

تمرین ۱۱-۱۱

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

پراکندگی نوترون - نوترون موج S را در نظر بگیرید که در آن پتانسیل برهمکنشی با $V(r)=V_{\circ}\vec{S}_{1}.\vec{S}_{2}e^{-\frac{r}{a}}$ تخمین زده می‌شود و $\vec{S}_{1}$ و $\vec{S}_{2}$ عملگرهای برداری اسپینی دو نوترون هستند و $V_{\circ}>0$ است. سطح مقطع‌های دیفرانسیلی در تقریب اول بورن را بیابید.

حل:

برای موج S (یعنی: $l=0$) تابع موج فضایی متقارن است پس، دو ذره در حالت یگانه‌ی اسپینی هستند. سطح مقطع دیفرانسیلی کل توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\frac{d\sigma_{s}}{d\Omega}=\left|f(\theta)+f(\pi-\theta)\right|^{2}$$

که در اینجا:

$$f(\theta)=-\frac{\mu}{2\pi\hbar^{2}}\left(\int_{0}^{+\infty}r'V_{\circ}e^{-\frac{r'}{a}}\sin(qr')dr'\right)\ \left\langle 0,0\left|\vec{S}_{1}.\vec{S}_{2}\right|0,0\right\rangle$$

که $|0,0\rangle$ همان حالت یگانه اسپینی است.

چون:

$$\vec{S}_{1}.\vec{S}_{2}=\frac{1}{2}\left(S^{2}-S_{1}^{2}-S_{2}^{2}\right)$$

لذا:

$$\vec{S}_{1}.\vec{S}_{2}\left|0,0\right\rangle=\frac{1}{2}\left(S^{2}-S_{1}^{2}-S_{2}^{2}\right)\left|0,0\right\rangle=\frac{\hbar^{2}}{2}\left[0(0+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]\left|0,0\right\rangle=-\frac{3}{4}\hbar^{2}\left|0,0\right\rangle$$

پس:

$$\left\langle 0,0\left|\vec{S}_{1}.\vec{S}_{2}\right|0,0\right\rangle=-\frac{3}{4}\hbar^{2}\left\langle 0,0|0,0\right\rangle=-\frac{3}{4}\hbar^{2}$$

از طرفی:

$$\int_{0}^{+\infty}r'e^{-\frac{r'}{a}}\sin(qr')dr'=\mathrm{Im}\left[\int_{0}^{+\infty}r'e^{-\frac{r'}{a}+iqr'}dr'\right]=-\frac{\frac{2q}{a}}{\left(q^{2}+\frac{1}{a^{2}}\right)^{2}}$$

پس:

$$f(\theta)=-\frac{\mu}{2\pi\hbar^{2}}\left[\frac{\frac{-2qV_{\circ}}{a}}{\left(q^{2}+\frac{1}{a^{2}}\right)^{2}}\right]\left(-\frac{3}{4}\hbar^{2}\right)=\frac{-3\mu qV_{\circ}}{4\pi a\left(q^{2}+\frac{1}{a^{2}}\right)^{2}}$$

Quark
@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner

چون:

$$q = ۲k\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

پس داریم:

$$f(\theta) = \frac{-۳\mu\left(۲k\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\right)V_۰}{۴\pi a\left(۴k^۲\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)+\frac{۱}{a^۲}\right)^۲} = -\frac{۳\mu k V_۰ a^۳\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)}{۸\pi\left(۴k^۲a^۲\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)+۱\right)^۲}$$

و:

$$f(\pi-\theta) = -\frac{۳\mu k V_۰ a^۳\cos\left(\frac{\theta}{۲}\right)}{۸\pi\left(۴k^۲a^۲\cos^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)+۱\right)^۲}$$

لذا:

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = \left(\frac{۳\mu k V_۰ a^۳}{۸\pi}\right)^۲\left|\frac{\cos\left(\frac{\theta}{۲}\right)}{\left(۴\pi^۲a^۲\cos^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)+۱\right)^۲}+\frac{\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)}{\left(۴k^۲a^۲\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)+۱\right)^۲}\right|^۲$$

Quark

@Quark_ARAKU
@Quark_BooK
Scanned by CamScanner