

سرفصل های مناسب لائبرانری

1) Fundamentals of Mechanic

معدله idington راجب قانون

* 2) Lagrangian Formulation of Mechanic

نمونه تون: هر صحنی روی خط

راست حرکت می کند، مترانش

روی خط راست حرکت نکند.

3) Topic in Lagrangian Dynamics

از تون می بینیم ح آذر

4) Scattering and Linear oscillations

$$\vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$$

مثال: دهاء جغالی
میدان برداری "Vector Field"

$$g(x, y, z) \equiv g(\vec{r})$$

"Scalar Field"

مثال: میدان استرلی

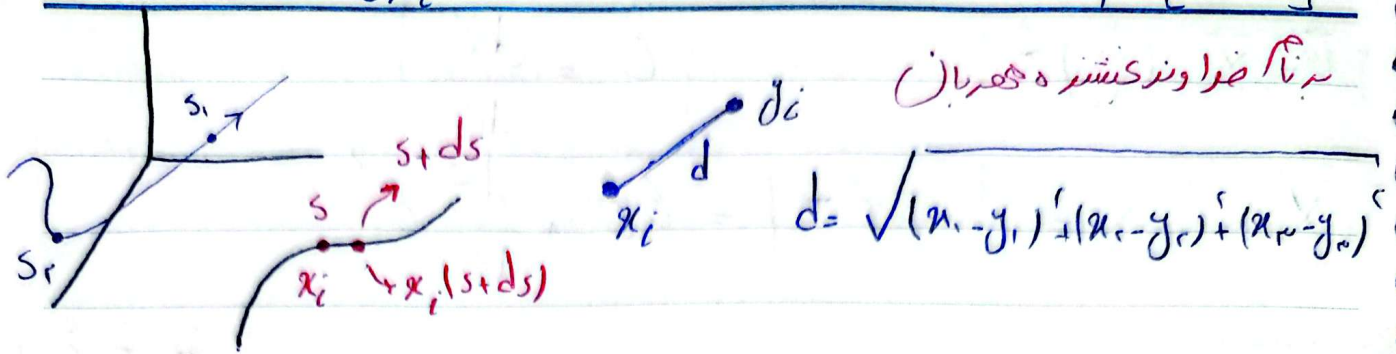
Kian SHAD $\vec{E}(x, y, z) = (E_1(r), E_2(r), E_3(r))$

$$\vec{E}(\vec{r})$$

در فیزیک هر کمیتی که وابسته به زمان دارد یعنی به زمان وابسته است. $E(x, y, z; t)$

Date: $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Subject: "functional" $F[x(t)]$



$$x_i(s+ds) - x_i(s) = \frac{dx_i}{ds} ds$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 ds^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 ds^2 + \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2 ds^2}$$

$$dL = \sqrt{\frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_i}{ds}} ds = \sqrt{\frac{d\vec{x}}{ds} \cdot \frac{d\vec{x}}{ds}} ds$$

$$L(s_0, s_1) = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\frac{d\vec{x}}{ds} \cdot \frac{d\vec{x}}{ds}} ds$$

می توانیم پارامتری جدید را در نظر بگیریم (یعنی زمان و تابعی از زمان) هم می توان به عنوان پارامتری از هم در نظر گرفت (گرفت).

$$dL' = \frac{d\vec{x}}{ds} \cdot \frac{d\vec{x}}{ds} ds'$$

$$\frac{dL}{dt} = |\vec{v}| \quad \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{v}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}} \frac{dt}{dt} = \frac{dL}{dt} = \dot{L}$$

$$\hat{T} \equiv * \frac{d\vec{x}}{dL} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{dL} = \vec{v} \left(\frac{dt}{dL} \right) \rightarrow \vec{v} = \left(\frac{d\vec{x}}{dL} \right) \left(\frac{dL}{dt} \right) = \dot{\vec{x}}$$

کمیتی همواره مثبت

$$\left| \frac{d\vec{x}}{dL} \right| = \sqrt{\frac{d\vec{x}}{dL} \cdot \frac{d\vec{x}}{dL}} = 1$$

که اندازه بردار $\hat{T}$

Date:

$$\vec{X} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\ell}{dt} \hat{\tau} \right) = \frac{d\ell}{dt} \hat{\tau} + \frac{d\ell}{dt} \left(\frac{d\hat{\tau}}{dt} \right) \left(\frac{d\ell}{d\ell} \right) \frac{d\ell}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{X}} = \left(\frac{d\ell}{dt} \right) \hat{\tau}$$

$$\hat{\tau} = \frac{d\vec{X}}{d\ell}$$

$$\ddot{\vec{X}} = \frac{d}{dt} \dot{\vec{X}} = \frac{d}{dt} [\ell \hat{\tau}] = \dot{\ell} \hat{\tau} + \frac{d\hat{\tau}}{dt} \ell$$

$$\dot{\vec{X}} = \dot{\ell} \hat{\tau} + \ell \frac{d\hat{\tau}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{X}}{d\ell} = k \hat{n}$$

but $\rightarrow \frac{d\hat{\tau}}{d\ell} = \frac{d\ddot{\vec{X}}}{d\ell} = k \hat{n}$

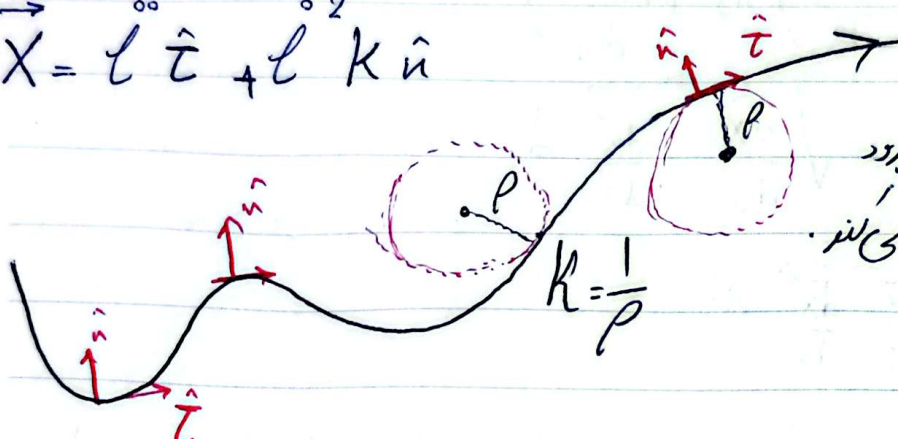
↪ "انحناء"
curvature

$$\hat{\tau} \cdot \hat{\tau} = 1$$

$$2 \frac{d\hat{\tau}}{d\ell} \cdot \hat{\tau} = 0$$

$$k = \frac{1}{\rho}$$

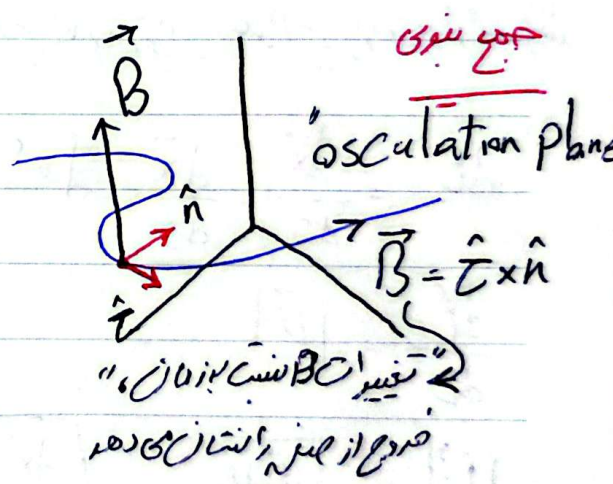
$$\ddot{\vec{X}} = \dot{\ell} \hat{\tau} + \ell^2 k \hat{n}$$



این شعاع دایره به سمت ی غایت میرود
یعنی ذره روی خط راست حرکت می کند
و $k = 0$ و $\rho = \infty$

$$\dot{\vec{X}} = \dot{\ell} \hat{\tau}$$

$$\ddot{\vec{X}} = \dot{\ell}^2 k \hat{n} + \dot{\ell} \hat{\tau}$$



* Isolated Particle

قوانین فیزیکی
"جسم منزوی"

(I) "Inertial Frame"

"دسته گشت"

تعریف سیستم مختصات

- * هر دستگاه مختصاتی که ذره ای که منزوی است، روی خط راست حرکت می کند.
- * اگر زمان و مکان ای انتخاب کنیم که ذره منزوی در آنجا حرکت می کند، این سیستم مختصات می تواند
- آن هم ثابت باشد.

به نام خداوند بخشنده و مهربان
اصول مکانیک فکلاس
اثبات قوانین حرکت نیوتون

(۱) * اصل وجود درشتگاه گشت

(۲) * (انرژی حرکت جغی) که اصل پایستگی مکان

۱) درشتگاه گشت

□ هر ذره منبذی در این درشتگاه بر روی خط راست حرکت می کند. ← گشت سرعت

□ انرژی مکانی کلونیسی تعریف شده باشد از نظر پایستگی ذره منبذی خاص با سرعت ثابت

در درشتگاه حرکت کند آنگاه سرعت تمام ذرات منبذی درشتگاه (گشت) برابر ثابت باشد. ← انرژی سرعت

اگر λ تابعی از t باشد که:

$$\vec{r} = \frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_1 = \vec{x}$$

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\lambda} \rightarrow \vec{e}_1' = \frac{d}{d\lambda} (\vec{x}) \frac{dt}{d\lambda} + \vec{x} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right) = \vec{x} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)' + \vec{x} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)$$

۲) پایستگی مکان

اگر در درشتگاه گشت تمام ذرات هم ا، ۲ وجود داشته باشند به طوری که سرعت آنها به ترتیب $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ باشد
چون اصل دقت منبذی می باشد $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ آنگاه پارامتر $\mu_{12} > 0$ وجود دارد به طوری که

ترکیب $\vec{v}_1 + \mu_{12} \vec{v}_2 = \vec{k}$ ← گشت ثابت حرکت است
باین

اگر سه ذره هم نیروی داشته باشند به هم از هم اثر می‌کنند داریم:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 + \mu_{12} \vec{V}_2 &= \vec{K} \\ \vec{V}_2 + \mu_{23} \vec{V}_3 &= \vec{M} \\ \vec{V}_3 + \mu_{31} \vec{V}_1 &= \vec{N}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_1 + \mu_{12} (\vec{M} - \mu_{23} \vec{V}_3) = \vec{V}_1 + \mu_{12} \vec{M} - \mu_{12} \mu_{23} \vec{V}_3$$

$$\Rightarrow \vec{V}_1 + \mu_{12} \vec{M} - \mu_{12} \mu_{23} (\vec{N} - \mu_{31} \vec{V}_1)$$

$$= \mu_{12} \vec{M} - \mu_{12} \mu_{23} \vec{N} + (1 + \mu_{12} \mu_{23} \mu_{31}) \vec{V}_1 = \vec{K}$$

$$\mu_{12} + \mu_{23} + \mu_{31} = -1 \quad \mu_{12} = -\frac{m_{12}}{m_{g1}}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_1 + \mu_{12} \vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \frac{m_2}{m_1} \vec{V}_2 \xrightarrow{\times m_1} \boxed{\vec{P}_{12} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}$$

چیزی که برای ما مهم است μ است نه چیزها

$$\vec{P} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 0 = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{12}}$$

سوال: اگر فرض کنیم یک دستگاه مختصات نسبت به دستگاه مختصات دیگر با سرعت ثابت حرکت این اشیاء را چگونه می‌بیند؟ همه دستگاه‌های مختصات نسبت به هم حرکت هستند

برای مثال در کلاس بهمان

دستور العمل برای نوشتن ماتریس انتقال

$$(x_1, x_2, x_3)$$

$$(x'_1, x'_2, x'_3)$$

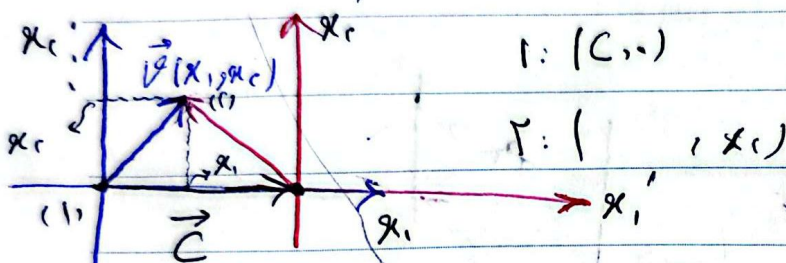
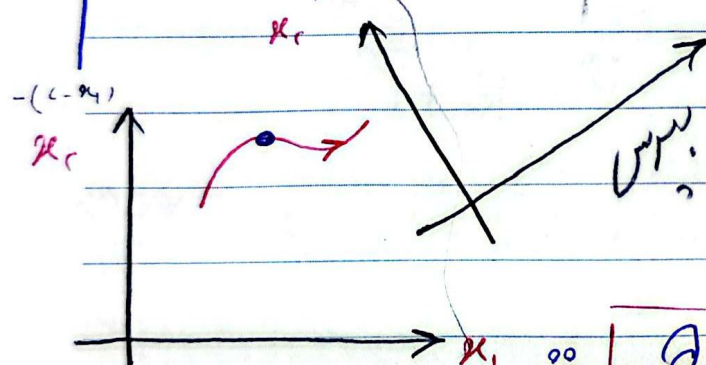
$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$\Rightarrow x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j$$

$$x'_i = a_{ij}x_j + c_i$$

مورد انتقال



$$x_i = f_i(x'_j, t) \rightarrow \ddot{x}_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x'_j} \ddot{x}'_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

$$x_i = g_i(x'_j, t)$$

$$\ddot{x}_i = \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x'_k \partial x'_j} \right] \ddot{x}'_k \ddot{x}'_j + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x'_j} \ddot{x}'_j + \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x'_k \partial t} \right] \ddot{x}'_k + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x'_j} \right] \ddot{x}'_j$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_i = a_{ij}(t) \ddot{x}'_j + c_j(t)$$

$$\Rightarrow f_i = a_{ij}(t) x'_j + c_i(t)$$

$$f_i = a_{ij} x'_j + c_i(t)$$

مشتق نسبت به x'_j

مشتق نسبت به x'_j و مشتق نسبت به t

مشتق نسبت به t و مشتق نسبت به x'_j

آنکه یک ذره هنوز در دستگاه کت اولیه با سرعت ثابت حرکت کند، یعنی $\dot{x}_i = 0$ پس هم جملات منفی است.

جمله اول $\rightarrow$ تابع نسبت به x_i خطی است و مشتق دوم آن منفی است.

جمله دوم $\rightarrow$ مشتاق ذره در دستگاه کت دوم هم منفی است

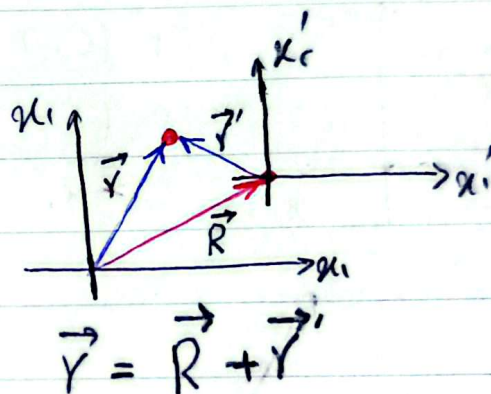
جمله سوم $\rightarrow$ تابع $\rightarrow$ وابسته به t باشد و نسبت به t باشد و مشتق به t باشد

$$f_i(x_j, t) = a_{ij} x_j + C_i(t) \quad \rightarrow \quad C_i(t) = V_i t + C_i$$

$$f_i = a_{ij} x_j + V_i t + C_i \quad *$$

$$x_i = a_{ij} x'_j + V_i t + C_i \quad *$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t + \vec{C} \quad *$$



$$a_{ij} = \delta_{ij} = (I)_{ij} \quad \text{ماتریس همانی}$$

وجود یک چارچوب کت مطابق با اصل اول وجود چارچوبهای کت بسیار دیگری را نیز نشان می دهد که همگی با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر حرکت می کنند. دو چارچوب کت نمی توانند نسبت به هم دوران داشته باشند. زیرا ذره ای که در یک چارچوب روی خط راست حرکت می کند در دیگری چنین نخواهد بود.

آنکه هر دو دستگاه دهاتی باشند نشان دهنده تبدیل سین اکس با هم خطی باشد $f_i(x, t) = f_{ik}(t) x_k + b_i(t) + \beta_i(t) t$ $f_{ik}(t) = \gamma_{ik}$ باید مستقل از زمان باشند.

با انبساط نشان می دهد نشان از دید ناظر دوم، نسبت تابع خطی همگی از شتاب از دید ناظر اول است.

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x}, t, \vec{v})$$

برای حل این معادله نیاز داریم که نیرو را بدانیم

قوانین نیوتون یا مشتق دوم همان پیش می‌روند

if: $F = F(t)$

$$\Rightarrow \int \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} dt = \int_{t_0}^t \vec{F}/m(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} \left[\frac{d\vec{x}}{dt'} \right] dt' = \frac{d\vec{x}}{dt} - \vec{v}_0 = 1/m \int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt'$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t dt' \frac{d\vec{x}}{dt'} = \int_{t_0}^t \vec{v}_0 dt' + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \vec{F}(t'') dt'' dt'$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) = \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} \vec{F}(t'') dt''$$

* $\int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt' = \vec{A}$
 $\vec{F}(t) = \vec{A} e^{-\alpha t}$
 $\vec{x}, \vec{v}$

* motion in 1-D

$$\mathcal{F}(x, t, v) = m \ddot{x}$$

$$\checkmark \mathcal{F}(v) = m \ddot{x} \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = \mathcal{F}(v) \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dv}{m} = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{\mathcal{F}(v)}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 + g(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t dt' [v_0 + g(t')] = \int_{x_0}^{x(t)} dx$$

این فرمول برای حرکت در یک بعد و فقط زمانی که نیرو تابعی از سرعت باشد

Dynamical variable

متغیرهای دینامیکی

همه متغیرهای دینامیکی (تابعی از زمان) $x, \dot{x}$ می‌گویند

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \quad \text{Dyn. Var}$$

هر کمیت ثابت در سیستم وجود داشته

$$\vec{p} = m \dot{\vec{x}} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

"قانون"

با هم می توان کمیت های دینامیک را معرفی کرد.

$$L) \vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \rightarrow \text{"قانون زاویه ای"}$$

$$L) \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{x}} \times \vec{p} + \vec{x} \times \dot{\vec{p}} = \vec{x} \times \vec{F} = \vec{N} \quad \text{"torque"}$$

اگر به سیستم گشتا در وارد نشود در واقع $\frac{d\vec{L}}{dt}$ برابر صفر است در نتیجه $\vec{L}$ باقی می ماند:

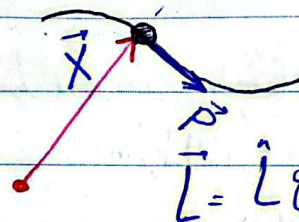
1) نیرو و $\vec{x}$ با هم موازی باشند

گشتا در نیروی است نه

تلاش می شود در

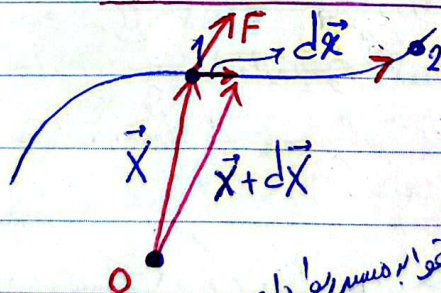
از جبهه خارج کند.

انرژی گشتا در می تواند تغییر کند
گشتا آن تغییر نمی کند



$$\frac{dL}{dt} = \dot{L} l + L \dot{l}$$

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{x}}$$



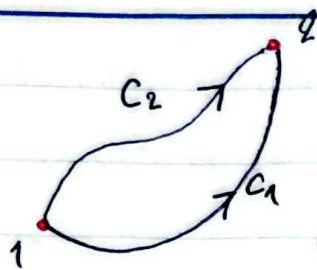
$$W_{12}^c = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} m \frac{d\vec{x}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}] = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} = \int_{t_0}^t m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}})^2 dt = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2(t) - \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2(t_0)$$

$$= W_{12} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2(t) - \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2(t_0)$$

این جمله نشان می دهد که انرژی جنبشی تغییر می کند و این تغییر برابر با کار است

$$Kian SHAD \rightarrow T_2 - T_1 \quad \text{"انرژی جنبشی"}$$



$$W_{12}^{C_1} = W_{12}^{C_2} = W_{12}$$

"نیروی با پتانسیل"
"Conservative Force"

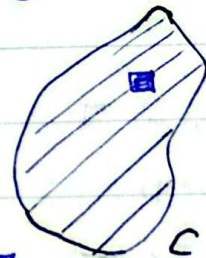
$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x} =$$

اگر مسیر را برعکس کنیم

$$\Rightarrow \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{x} = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad \& \quad \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$$

* نیروهای که به ازای هر جفتی در فضا دارای پتانسیل باشند، نیروی با پتانسیل است.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \quad \text{قضیه استروکس} \quad \rightarrow \quad \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$



□ امثال یک سری به اشتغال دوبعدی تبدیل می شود
شرط لازم و کافی برای اینکه نیرو $\vec{F}$ با پتانسیل باشد
 $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

$$p = mv$$

$$p = m \frac{dx}{dt}$$

همی از مقننه های دینامیکی تعریف است:

□ ویژگی مقننه تعریف، با پتانسیل آن هست: اگر دوزده تنها با پتانسیل به هم نقش

کنند و هیچ نیروی خارجی بر آن ها وارد نشود، تعریف آن ثابت می ماند.

□ توجه شود که این روابط فقط در دستگاه گنات معتبر است. در غیر این صورت، تعریف حتی در غایب نیروهای خارجی

نیز با پتانسیل نخواهد بود.

تعریف زاویه ای: این دو نسبت به یک نقطه مرجع بر حسب تعریف حقیقی آن (معمولاً به سمت مرکز دایره می شود)

$$L = r \times p$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \dot{L} = \frac{d}{dt} (r \times p) = \dot{r} \times p + r \times \dot{p} = r \times F$$

تعریف حقیقی $\rightarrow$ به بزرگای دایره

$$\dot{L} = r \times F \equiv N$$

گشتاور نیرو

گشتاور، تعریف زاویه ای مانند نیرو، تعریف حقیقی است

$$* m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

conservative, $\vec{F}$ by $\vec{F} = -\nabla U$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla U \quad \begin{matrix} \text{تابع پتانسیل} \\ \text{Potential function} \end{matrix}$$

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x} = T_2 - T_1 = - \int_1^2 \nabla U \cdot d\vec{x} = - \int_1^2 du = U(\vec{x}_1) - U(\vec{x}_2)$$

$$* \left| d\mathcal{E}(\vec{x}) = \nabla \mathcal{E} \cdot d\vec{x} \right| \quad * \Rightarrow T_2 + U(\vec{x}_2) = E = T_1 + U(\vec{x}_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U \rightarrow t, \quad \vec{v}_0, \vec{x}_0 \\ U \rightarrow t. \end{array} \right.$$

□؛ انرژی E تعیین می کند در واقع شرایط اولیه سیستم است

1-D motion (1. Particle)

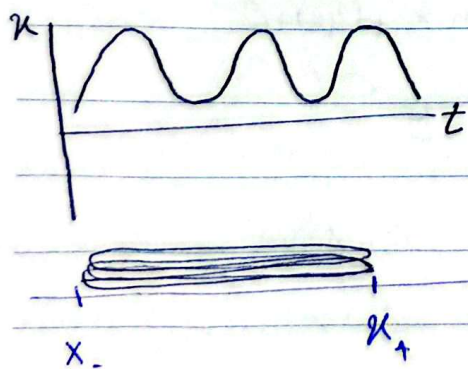
$$m\ddot{x} = \mathcal{F}(x) = -\frac{d}{dx} U(x)$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) \rightarrow E - U(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))} = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

مسئله حل تشریفاتی

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} = \int_0^t dt = t$$



□ در اعداد بالا تر مسئله حل نمی شود

درجه یک تناوبی (Periodic) داریم

Turning pt

نقاط بازگشتی

$$x_- \rightarrow \dot{x} / x_- = 0$$

$$x_+ \rightarrow \dot{x} / x_+ = 0$$

Date:

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2/m(E - U(x))}} = T$$

$$T = \frac{1}{\omega} \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{+1} \frac{A dz}{A \sqrt{1 - z^2}}$$

$$F = -kx \Rightarrow -\frac{dU}{dx} = -kx \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$\dot{x} = 0 \rightarrow E = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$x_{-} = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = -A$$

$$x_{+} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = A$$

$$T = \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{\sqrt{2/m(E - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2)}} = \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}}$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{+1} \frac{A dz}{A \sqrt{1 - z^2}}$$

$$x = Az$$

$$dx = A dz$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\pi}{\omega}$$

"for Harmonic oscillator"

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x)$$

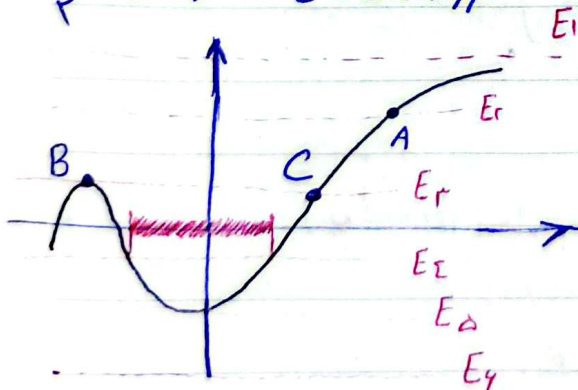
$$F(x) = -\frac{d}{dx} U(x)$$

$$U(x) = -\int_{y_0}^x F(y) dy$$

$$U(x) \rightarrow F(x)$$

$$U(x) + C \rightarrow F(x)$$

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - U(x) \geq 0$$



$$\begin{cases} E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) \\ E' = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) + C \end{cases}$$

دقت انرژی سیستم E_1 باشد، در نقطه A سرعت ذره کمترین است

و بیشترین پتانسیل می باشد در واقع نقطه A نقطه بازگشتی ذره است و یک نیروی خارجی جهت حرکت را بر عکس می کند

Date:

Subject:

وقتی انرژی سیستم E_1 باشد در نقطه B سیب به سرعتی v_1 و خارج می شود و در آنجا به همان
سرعت خواهد ماند. در نقطه C چون سیب به سرعت v_2 می رسد خارج می شود و حرکت
در آنجا به همان سرعت v_2 می کند.

وقتی انرژی سیستم E_2 باشد بازه حرکتی در آن دقیقاً همان بازه که در E_1 است
وقتی انرژی سیستم E_3 باشد در نقطه D تا آنجا که سرعت سیب خواهد ماند از آنجا که سیب
به سرعت v_3 می رسد و به همان سرعت می رود.

اگر انرژی سیستم E_4 باشد؛ در آنجا که سیب به سرعت v_4 می رسد و به همان سرعت می رود.

حالت پویا

نشان داده می‌شود که

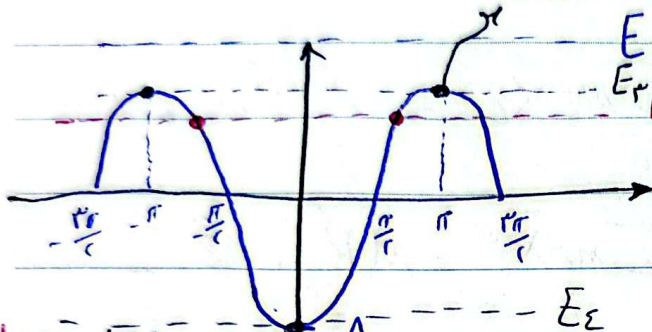
$$U = -A \cos x$$

$$\varphi(x) = -\frac{d}{dt} U(x) = -A \sin x$$

$$m \ddot{x} = -A \sin x$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x)$$

unstable - ناپایدار



$$T = \sqrt{m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

$$x_{\pm} \rightarrow E = U(x)$$

$$T \propto \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{1 + \beta \cos x}}$$

$$K(\theta) = \int \sqrt{1 + \alpha \sin \theta} d\theta$$

در E_r ذره‌ای حرکت زمان طول می‌کشد

نقطه سایدینگ در E_r و در E متوقف می‌شود

و چون نیروی گرانشی برابر است در E

متوقف می‌شود و نقطه ناپایدار داریم

در E_r در نقاط ترمزینگ سرعت صفر است

($E = U(x)$) می‌شود و ذره‌ها سرعت صفر می‌گیرند

در E تنها نقطه‌ای که سرعت فقط نقطه سایدینگ روی نقطه A است و نوسان خیلی خیلی کوچک می‌کند

و نقطه ناپایدار داریم

$$m_i \ddot{X}_i = \vec{F}_{Ti} = \vec{F}_{(ext)i} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

$$\sum_i m_i \ddot{X}_i = \sum_i \vec{F}_{(ext)i} + \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \rightarrow 0$$

$$\vec{F}_{Ti} = \vec{F}_{(ext)i} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

$$\sum m_i \ddot{X}_i = \vec{F}_T = \frac{d}{dt} \left[\sum m_i \dot{X}_i \right] = M \ddot{R}$$

Koian SHAD

$$R \equiv \frac{\sum m_i X_i}{\sum m_i} \text{ Center of mass (مرکز جرم)}$$

cm → مرکز جرم

Date:

Subject:

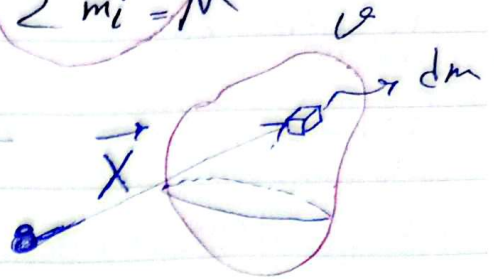
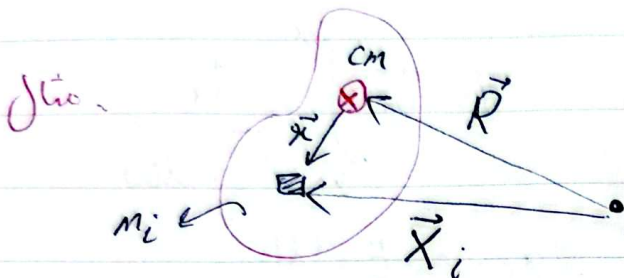
$$\vec{F}_T = M\vec{R} = \frac{d\vec{p}_{cm}}{dt}$$

$$\vec{p}_{cm} \equiv M\vec{R}$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{X}_i \times \dot{\vec{X}}_i = \sum_i \vec{p}_i \times \vec{X}_i$$

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{X}_i}{\sum m_i = M}$$

$$\vec{R} = \frac{\int dm \cdot \vec{x}}{\int dm}$$



$$\sum_i m_i \vec{X}_i = \sum_i \vec{R} m_i + \sum_i \vec{x}_i m_i$$

$$\sum_i m_i \vec{X}_i = M\vec{R} + \sum_i m_i \vec{x}_i$$

توازن حول مرکز جرم همیشه برقرار است $\rightarrow \sum m_i \vec{x}_i = 0$

■ ساده ترین حالت ذره ای است که به حرکت در امتداد یک خط محدود شده است. چنین سیستمی به واقع یک ذره آزاد دارد (ذره ای که روی دایره حرکت می کند). سیستم های تک درجه برای این هم هستند که مسائل پیچیده را با چند درجه آزادی را تجزیه کرده و به یک اشتراک گیری تک بعدی کاهش می دهد نه به آن کوادراتور "quadrature" می گویند.

■ در یک بعد هندسی به تنهایی به معنای (x) جسم پیش دارد یک نیروی وابسته است.

$$F(x) = m \ddot{x}$$

$$F(x) = -\nabla U \Rightarrow W_c = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = T_2 - T_1 = - \int_{x_1}^{x_2} \nabla U \cdot dx$$

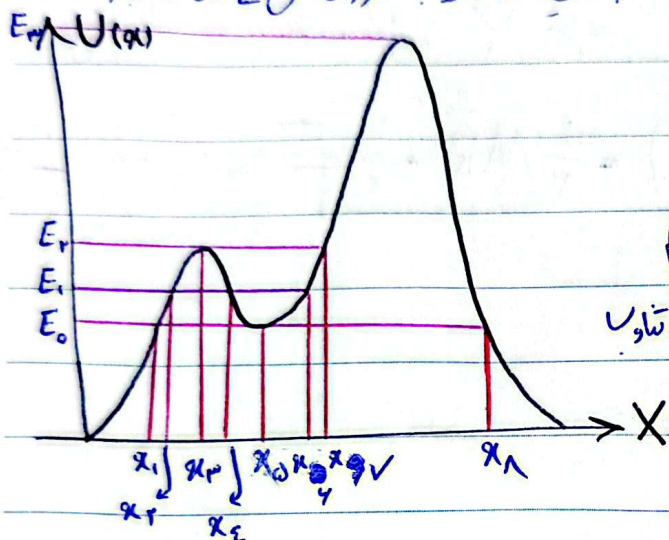
$$\underline{d\mathcal{F} = \nabla \mathcal{F} \cdot dx} \rightarrow - \int_{x_1}^{x_2} dU = U_1 - U_2 = T_2 - T_1$$

$$\rightarrow \left| E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) \right| \rightarrow E - U(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{x_1}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}$$

اگر انرژی E و همان اولیه x معلوم باشد، مسئله اول حل می شود.

از آنجا که انرژی جنبشی $(\frac{1}{2} m \dot{x}^2)$ همواره نامنفی است، ذره نمی تواند وارد ناحیه ای شود که در آن $E < U(x)$. اگر ذره حرکت خود را در ناحیه ای با $E > U(x)$ آغاز کند، می تواند به سمت نقاطی با پتانسیل بالاتر حرکت کند تا به نقطه ای برسد که $U(x) = E$ در این نقطه، انرژی جنبشی صفر شده و ذره نمی تواند جلوتر برود. این نقطه یک نقطه بازگشت برای حرکت است. به این بهترین شرایط انرژی کل E نقاط بازگشت حرکت را تعیین می کند.



$$F = - \frac{dU}{dx}$$

$$P = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

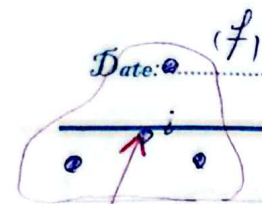
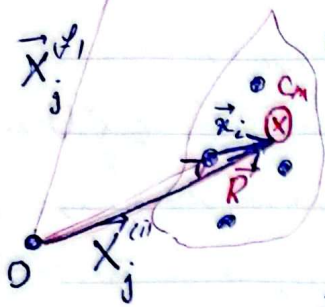
دوره شتاب

سیستم های چند ذره ای

به تفاهت و غیره

الیزاری مد نظر است که $N > 1$ ذره تشکیل شده باشند.

به اصل برهم کنی می بینیم که هر ذره را می توان در قالب برهم کنش های دو ذره کلیل کرد.



$$(c) \quad T = \sum_{j=1}^N T_j = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{x}}_j^2$$

$$\vec{x}_j = \vec{R} + \vec{x}_j$$

$$\dot{\vec{x}}_j = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{x}}_j$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}_j^2 = \dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{x}}_j^2 + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{x}}_j$$

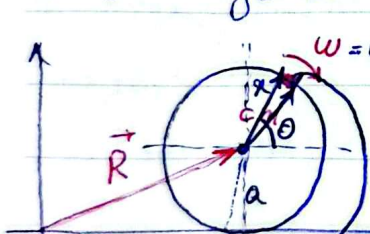
$$T = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j (\dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{x}}_j^2 + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{x}}_j) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\vec{x}}_j^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \sum_j m_j \dot{\vec{x}}_j$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\vec{x}}_j^2$$

انرژی جنبشی مرکز جرم

انرژی جنبشی حول مرکز جرم

$$T = T_{cm} + \frac{1}{2} \int dm \dot{\vec{x}}^2$$



$$\lambda = \frac{dm}{d\ell} = \frac{M}{\ell} = \frac{M}{\pi a}$$

$$T_{cm} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$$

انرژی جنبشی انتقالی

$$\dot{\vec{R}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$dm = \lambda d\ell = \lambda a d\theta$$

$$\dot{x} = a\omega$$

$$\int \frac{1}{2} dm \dot{\vec{x}}^2 = \int \frac{1}{2} \lambda a d\theta a^2 \omega^2$$

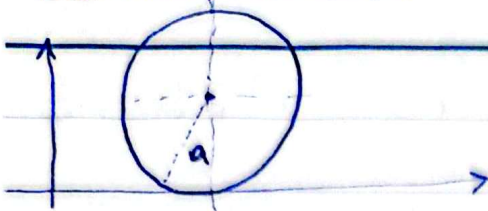
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \lambda a^2 \omega^2 d\theta = \pi \lambda a^2 \omega^2$$

$$= \pi \left(\frac{M}{\pi a} \right) a^2 \omega^2 = \frac{1}{2} M a^2 \omega^2$$

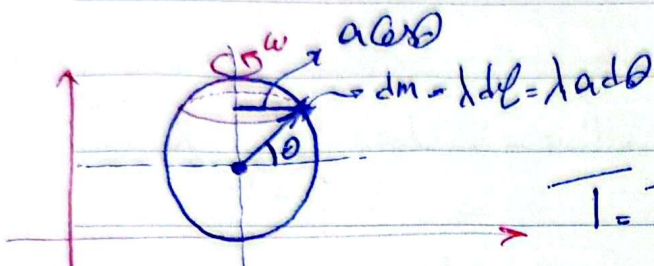
$$= \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Date:

Subject:



تمرین: فرض کنید یک دیسک صاف را برای محاسبه انرژای جنبشی کل در نظر بگیرید.



سوال

$$T = T_{cm} + \int \frac{1}{r} dm (a' \cos' \theta \omega')$$

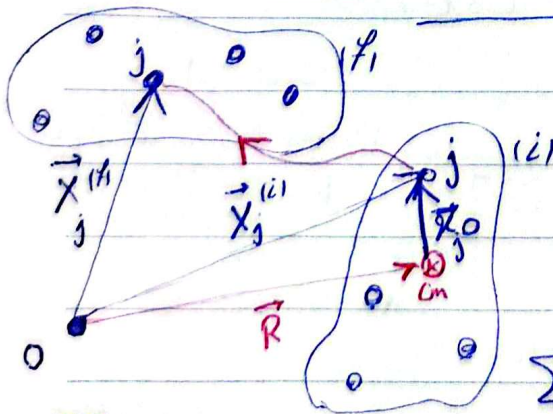
$$\Rightarrow \frac{1}{r} \int_0^{\pi} \omega' \lambda a' \cos' \theta d\theta = \frac{1}{r} \omega' a' \lambda \int_0^{\pi} \cos' \theta d\theta = \frac{1}{r} \omega' a' \frac{M}{\pi a} \pi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \left(\frac{Ma'}{r} \right) \omega' = \frac{1}{r} T_g \omega_g'$$

$$\langle \cos' \theta \rangle = \langle \sin' \theta \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos' \theta d\theta = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{r} MR^2 + \frac{1}{r} I_x \omega_x' + \frac{1}{r} I_y \omega_y' + \frac{1}{r} I_z \omega_z'$$

$$I_x = \frac{Ma^2}{r} = I_y, \quad I_z = Ma^2$$



$$\vec{F}_j = \vec{F}_{ext j} + \sum_k \vec{F}_{int jk} = m_j \ddot{\vec{X}}_j$$

$$W = \sum_j W_j = \sum_j \int_i^f \vec{F}_j \cdot d\vec{X}_j =$$

$$\sum_j \int_i^f \left[\vec{F}_{ext j} + \sum_k \vec{F}_{int jk} \right] \cdot d\vec{X}_j$$

Kian SHAD

$$W = \sum_j \int_i^f m_j \ddot{\vec{X}}_j \cdot \frac{d\vec{X}_j}{dt} dt = \frac{1}{2} \sum_j \int_i^f \frac{d}{dt} [m_j \dot{\vec{X}}_j^2] dt \Rightarrow$$

$$r_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{1}$$

Date:

Subject:

$$T^{(i)} - T^{(i)} = U^{(i)} - U^{(i)} \rightarrow T^{(i)} + U^{(i)} = T^{(i)} + U^{(i)} = E.$$

$$U_j = \sum_{i=1}^N U_{ext i} + \sum_{j,k} U_{(int)jk},$$

$$|E = T + U_{ext} + U_{int}|$$

$$L = I\omega$$

Date:

Subject:

$$T = T_{cm} + T_{re}$$

نسبت به مرکز جرم

برای حرکت چرخشی و انتقالی

$$P = \sum_i p_i \rightarrow \frac{dP}{dt} = F$$

"Angular Momentum"

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$E = T + U_{ext} + U_{int}$$

$$L' = (\vec{R} + \vec{a}) \times \vec{P} = \vec{L} + \vec{a} \times \vec{P}$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{X}_i \times \vec{P}_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{x}_i) \times (\vec{P} + \vec{p}_i) m_i =$$

$$(\vec{X}_i = \vec{R} + \vec{x}_i) \quad = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{P}_i$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{P}_i \quad ; \quad \sum_i \vec{x}_i \times \vec{P}_i \rightarrow \int \vec{x} \times (dm \vec{x}) =$$

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i \vec{X}_i \times (\vec{F}_{ext(i)} + \sum_j \vec{F}_{int(ij)}) = \int dm \vec{x} \times \vec{x}$$

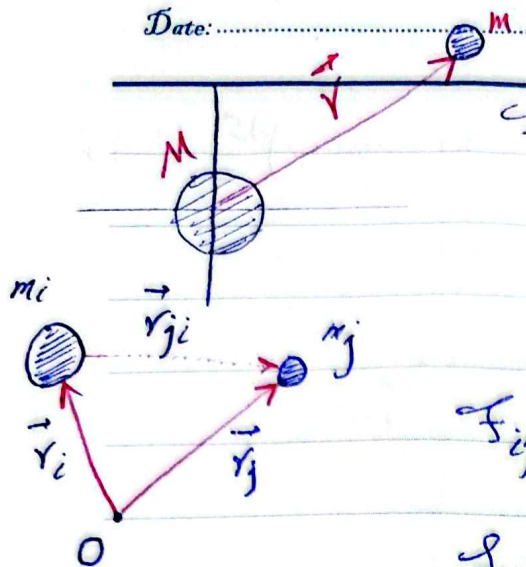
قانون سوم نیوتن: $F_{ij} = -F_{ji} \rightarrow \sum_{ij} F_{ij} = 0$

$\sum_{ij} \vec{x}_i \times \vec{F}_{ij} \neq 0 \quad \vec{F}_{ij} \propto (\vec{x}_i - \vec{x}_j)$

$$\vec{N} = \sum_i \vec{X}_i \times \vec{F}_{ext(i)} = \sum_i (\vec{R} + \vec{x}_i) \times \vec{F}_i = \vec{R} \times \vec{F} + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i$$

توجه: $T_{know} = m_i \ddot{x}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}$

توجه: $\left| \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \right|$



$$\phi(\vec{r}) = -\frac{MmG}{r} \hat{r}$$

$$= -\frac{GmM}{r} \hat{r}$$

$$\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \vec{r}_{ij}$$

$$\vec{F}_{ji} = -\frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \vec{r}_{ji}$$

$$\vec{F}_{Mm} = G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

$$|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$U_{ji}(\vec{r}_{ij}) = U_{ji}(|\vec{r}_{ij}|) = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}$$

$$U_{ij} = U_{ji} = U(r_{ij}) = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \sim U(r_{12}) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$$

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} U$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i} \right)$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_1} U$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x_{1r}}, \frac{\partial U}{\partial y_{1r}}, \frac{\partial U}{\partial z_{1r}} \right)$$

حساب دهم

در کتاب خوارزمی کشف المحجرات

$$U_{ij} = -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}} = U(r_{ij}) = U(|\vec{r}_{ij}|) = U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i}\right) = -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} (x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - z_j)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} = \frac{G m_i m_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^3}$$

$$\begin{aligned} * \frac{\partial U}{\partial r_{ij}} &= -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} & \vec{F}_{ij} &= -\vec{\nabla}_i U = -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \vec{r}_{ij} \\ * \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} &= \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} & \vec{F}_{ji} &= -\vec{\nabla}_j U = \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \vec{r}_{ij} \end{aligned}$$

در اینجا می بینیم که نیروی گرانشی بین دو جرم، همواره در راستای خطی است و به سمت جرم دیگر است. این را می توانیم به صورت زیر نشان دهیم:

$$-\int_{C_i} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = -\int \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \quad \text{ثابت لنز}$$

$$d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = d\vec{r}_i$$

$$\Rightarrow -\int_{C_i} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = -\int \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = G m_i m_j \int \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} d\vec{r}_{ij}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = \frac{1}{2} d(\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}) = \frac{1}{2} G m_i m_j \int \frac{d(r_{ij})}{r_{ij}^2} = G m_i m_j \int \frac{r_{ij} dr_{ij}}{r_{ij}^3}$$

$$\vec{r} = r \hat{r} \rightarrow d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\hat{r}$$

$$\hat{r} \cdot d\hat{r} = 0$$

$$\begin{cases} \hat{r} \cdot \hat{r} = 1 \\ \hat{r} \cdot d\hat{r} = 0 \end{cases}$$

حکمت با زدهم

به نام خداوند گسترده و بزرگوار

مضامین

تعریف: سیستمی از اجزای در نظر بگیریم که تحت تأثیر دینامیک کلی U قرار دارند. تابع لاگرانژی برای این سیستم بصورت زیر تعریف می شود:

$$L = T - U$$

انرژی پتانسیل $\rightarrow L$ تابع لاگرانژی

"Lagrangian"

انرژی جنبشی

لاگرانژی در این سطح برای توابعی تعریف می شود که با استیوار باشند و دینامیک داشته باشند. بعداً لاگرانژی همان انرژی درونی سیستم است.

$$T(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i)$$

اما شغل دارد و در حقیقت کمربند

$$U(\vec{x}_i)$$

$$L(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, t)$$

(4N)

متغیره

Variable

مثال: یک ذره که تحت تأثیر یک پتانسیل خاص در فضا حرکت می کند:

تابع لاگرانژی یک ذره که تحت تأثیر پتانسیل $U(\vec{r})$ حرکت می کند بصورت زیر است:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}) = \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\vec{r}) \right]$$

$$\bullet L(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

$$\bullet \bullet \tilde{L}(r, \theta, \varphi; \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \tilde{U}(r, \theta, \varphi)$$

$$\bullet \bullet \bullet \tilde{\tilde{L}}(\rho, \varphi, z; \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \tilde{\tilde{U}}(\rho, \varphi, z)$$

$$U(x, y, z) = \frac{-k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

حالت خاص گرانش

$$\bullet \Rightarrow L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\bullet \bullet \tilde{L} = T + \frac{k}{r}$$

$$\bullet \bullet \bullet \tilde{L} = T + \frac{k}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

مثال ۲: لاگرانژی همجوشی از ذرات به در همان $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ و قرار دارند و تحت تأثیر متقابل داخلی $U_{int}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$ و خارجی $U_{ext}(|\vec{x}_i|)$ قرار دارند و صورت زیر است.

$$L = T - U$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2$$

3N
متغیر

$$U = \sum_{i=1}^N U_{ext}(|\vec{x}_i|) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{int}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

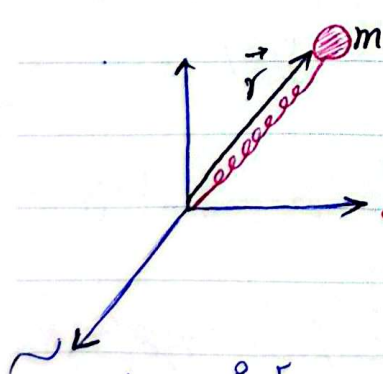
مثال ۳: فرض کنید ذره ای به جرم m به یک فنر با ثابت k متصل است. لاگرانژی این سیستم را در (x, y, z) $\vec{F} = -k\vec{x} \rightarrow -\nabla U = \vec{F} \Rightarrow U = \frac{kx^2}{2}$ را در

$$L = T - U$$

$$\bullet U = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\bullet \bullet \ddot{U} = \frac{1}{2} k \ddot{r}^2$$

با افتقادات کردی.



$$\bullet L = \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2) \right] = \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right) + \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k y^2 \right) + \left(\frac{1}{2} m \dot{z}^2 - \frac{1}{2} k z^2 \right)$$

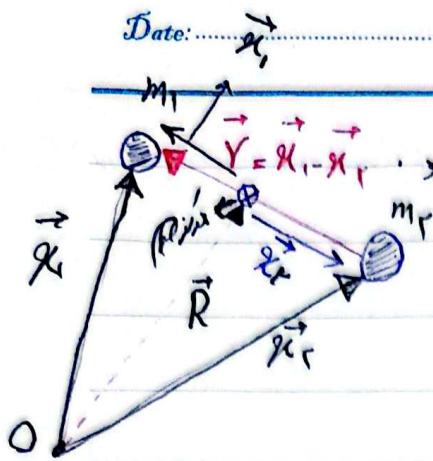
$$\bullet \bullet L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \frac{1}{2} k r^2$$

$$|h = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - \frac{1}{2} k \vec{x}^2$$

لاگرانژی نویسنده
همجوشی

Date:

Subject:



مثال 4: لاکر انتری دو ذره حرکت تا شریکانش یک دیکرینر و انفراسیو
کارترین و کردی

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|}$$

$$R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$$

$$\left. \begin{aligned} R + x_1 &= X_1 \\ R + x_2 &= X_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} X_1 - X_2 &= Y = x_1 - x_2 \\ 0 &= m_1 x_1 + m_2 x_2 \rightarrow x_1 = -\frac{m_2}{m_1} x_2 \end{aligned}$$

$$* \sum_i m_i \ddot{x}_i = 0$$

$$\rightarrow \ddot{Y} = -\frac{m_2}{m_1} \ddot{x}_2 - \ddot{x}_2 = -\frac{M}{m_1} \ddot{x}_2$$

$$* \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{m_1}{M} \ddot{Y}} \quad \boxed{x_1 = \frac{m_2}{M} \ddot{Y}}$$

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{M} \right)^2 \dot{Y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{M} \right)^2 \dot{Y}^2$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} \dot{Y}^2 = \left[\frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{Y}^2 \right]$$

لاکتر انتری ذره
تا شریکانش

* Reduce mass $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

$$L(\dot{R}, \dot{Y}, r) = \left[\frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{Y}^2 + G \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|} \right]$$

برای خواننده مشتاقان

جلسه دوازدهم

مثال: فرض کنید که ذره در اختیار داریم که از آنجا هیچگونه برهم کنش وجود ندارد. ولی هدف ما کثرت تأثیر یک نیروی با استیلا خارجی بر تپانسی آن برای هر ذره به فاصله ذره از مبدأ نیروی است استوار دارد.

لاگرانژی این سیستم را بنویسید. $L = T - U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - \sum_{i=1}^N U(|\vec{x}_i|)$

$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2$, $U = U_{ext} = \sum_{i=1}^N U_{ext}(i)$

$L_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - U(|\vec{x}_i|) = \sum_{i=1}^N U(|\vec{x}_i|)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - U(|\vec{x}_i|) \right] = \sum_{i=1}^N L_i$

اگر در این سیستم ذرات موجود در سیستم با هم برهم کنش نداشته باشند، تپانسی ذرات وجود نداشته باشد. اما لاگرانژی سیستم می شود لاگرانژی همه ذرات جدا جدا جمع از ذره تا N .

نتیجه: در صورتی که N سیستم اینزوله داشته باشیم با هم برهم کنش ندارند، لاگرانژی کل برای این مجموعه جمع تمام لاگرانژی ها خواهد شد.

$L = L_1 + L_2 + \dots + L_N = \sum_{i=1}^N L_i$

ذرات سیستم ها با هم برهم کنش ندارند، L های مقادیری دارند.

برای یک منبر سه بعدی داریم: $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - \frac{1}{2} k \vec{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k y^2 - \frac{1}{2} k z^2$

$-\frac{1}{2} k z^2 = L_x + L_y + L_z$

در این بخش می‌خواهیم به بررسی حرکت یک ذره در یک پتانسیل مرکزی بپردازیم. فرض می‌کنیم که یک ذره با جرم m در یک پتانسیل $V(r)$ قرار دارد. می‌خواهیم معادلات حرکت را برای این سیستم بنویسیم.

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) = \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} k r^2 \right) +$$

$$\left[\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] r^2$$

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

$$= L_{cm}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) + L_{cm}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

$$U(\vec{x}, t)$$

$$L = L_1 + L_2 = L_1(\dot{X}_1, \dot{X}_2, t) + L_2(\dot{X}_1, \dot{X}_2, t) + L_{int}(\dot{X}_1, \dot{X}_2, t)$$

این دو جزء به هم وابسته نیستند و می‌توانیم آن‌ها را به صورت زیر بنویسیم:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{X}_2^2 + G \frac{1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}_2|}$$

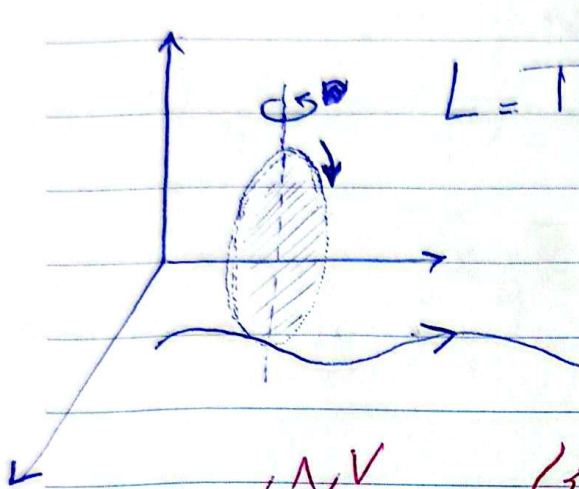
این دو جزء به هم وابسته نیستند و می‌توانیم آن‌ها را به صورت زیر بنویسیم:

$$L^{free} = L_1 + L_2 = \frac{1}{2} m \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{X}_2^2 + \frac{1}{2} g \dot{X}_1 \cdot \dot{X}_2 = L^{free}_1 + L^{free}_2 + L^{int}$$

$$L^{free} = L_1 + L_2 = \frac{1}{2} m \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{X}_2^2 - U(r)$$

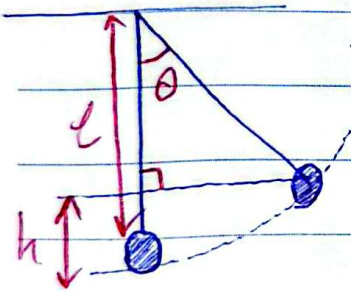
$$\frac{1}{2} \dot{X}_1 \cdot \dot{X}_1$$

۱. اگر دوزده ماهه برهم لنتش (نقد) L_{free} و L_{int} نیز از آنها فرقی نشود که باید تابعی از X_1 و X_2 و X_3 و X_4 نیز باشد.



$$L = T - U = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{\perp} \dot{\varphi}^2$$

مهرنگا خداوند خوشنود و هیران



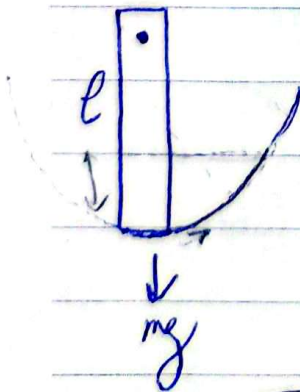
$$V = \dot{\gamma} + (\gamma \dot{\theta})$$

$$T = \frac{1}{r} m v^2 = \frac{1}{r} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$U = mgh = mg(l - l \cos \theta)$$

$$= mgl(1 - \cos \theta)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - m g l (1 - \cos \theta)$$



$$L = T - U \quad u = \omega t$$

$$u = \omega t$$

لاکڑا شری

$$T = \frac{1}{r} m v^2 = \frac{1}{r} m (\omega' r)^2 =$$

$$U = mgh \quad \frac{1}{2} \int dm (\dot{\phi}^2 r^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$\frac{b}{(1 - \cos \theta)} \quad \frac{e' d w' M}{1}$$

$$T = \frac{1}{r} m r^2 \alpha = \frac{1}{r} I \alpha r$$

$$V = I\omega = I\dot{\theta} \quad / \quad V = \dot{\gamma} + \gamma \dot{\theta}$$

به آن آزادانه هستند. همدان
 قضیه: ~~مفروضات~~ مفروضات لنبریت سیستم دینامیکی با که درجه آزادی در اختیار داریم. لگژانژی این
 سیستم را با $L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)$ می‌دهیم که

درجه آزادی ~~مفروضات~~ مفروضات که بازمان تغییر کند، متغیر دینامیکی است. پس درجه آزادی یعنی
 که متغیر که بازمان تغییر می‌کند.

فضای پیرامونی "Configuration Space"
 $\{q_\alpha(t)\}_{\alpha=1}^N \rightarrow \{\dot{q}_\alpha(t)\}_{\alpha=1}^N$

اگرچه معادله دینامیکی به صورت زیر داده می‌شود:
 معادلات "اویلر-لگژانژ"
 $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0$

Example: $L(\vec{X}, \dot{\vec{X}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{X}}^2 - U(\vec{X}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$

$U(x, y, z)$

Newtonian Picture $\rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U$

* E.O.M $\rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{dt} (m\dot{x})$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \left[m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = m\dot{y} \quad y: \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \rightarrow \left[m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \right]$$

$$z: \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = 0 \rightarrow \left[m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \right]$$

$$\Rightarrow \left[m\ddot{\vec{X}} = -\vec{\nabla} U = \vec{F} \right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial h}{\partial \dot{\varphi}} \right]$$

Date:

Subject:

$$h = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(r, \theta, \varphi)$$

$$* r: \frac{\partial h}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 + m r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{d}{dt} [m \dot{r}] = 0$$

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 - m r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$* \theta: \frac{\partial h}{\partial \theta} = m r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} [m r^2 \dot{\theta}] = 0$$

$$\Rightarrow m r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \theta} - [m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta}] = 0$$

$$* \varphi: \frac{\partial h}{\partial \varphi} = - \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} [m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}] = - \frac{\partial V}{\partial \varphi} - 2 m r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\theta} - m r^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} = 0$$

$$- 2 m r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\theta} - m r^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi}$$

$$h = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2)$$

مثال ٢ : مثال فنر

$$= h_1(x, \dot{x}) + h_2(y, \dot{y}) + h_3(z, \dot{z}) ; h_1(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$* x: \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \rightarrow -kx - \frac{d}{dt} (m \dot{x}) = 0 \rightarrow \boxed{m \ddot{x} = -kx}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \dot{x}} \right)$$

$$* y: \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{y}} \right) \rightarrow \boxed{m \ddot{y} = -ky}$$

$$L(x, \dot{x}, t) = e^{-\gamma t} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \quad \text{مثال ۳}$$

$$E.o.m : x: \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = -e^{-\gamma t} m \omega^2 x$$

$$\frac{d}{dt} [e^{-\gamma t} m \dot{x}] \Rightarrow -e^{-\gamma t} m \omega^2 x + \gamma e^{-\gamma t} m \dot{x} - e^{-\gamma t} m \ddot{x} = 0$$

$$- \gamma e^{-\gamma t} m \dot{x} + e^{-\gamma t} m \ddot{x} = e^{-\gamma t} (-m \omega^2 x + \gamma m \dot{x} - m \ddot{x})$$

$$\Rightarrow \boxed{m \ddot{x} = \gamma m \dot{x} - m \omega^2 x} \quad \begin{array}{l} \text{معادله حرکت فیزیکی نه در معین است} \\ \text{قرار دارد} \end{array}$$

← damp نیروی

له انرژی چنین سیستم‌هایی با پستار نیست
un conservative

$$L(r, \vec{R}, \theta, \varphi; \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \vec{R}) \quad \text{مثال ۴: مثال لایبر}$$

$$k = G m_1 m_2$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{k}{r}$$

$$x: \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (M \dot{x}) = 0 \rightarrow M \ddot{x} = 0$$

$$y: \quad M \ddot{y} = 0$$

$$z: \quad M \ddot{z} = 0$$

$$\boxed{\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0} \quad \leftarrow \quad \boxed{M \ddot{\vec{R}} = 0} \quad *$$

اگر تا قبل از جسم وارد نشود نتایج جسم منفرد است

$$L = T - U$$

Date:

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0 \quad \text{"معادله اولی لاگرانژ"}$$

Subject:

2

به نظر خراب و غشینه هم بایں " محاسبه چهاردهم "

مثال: یک ذره در یک پتانسیل مرکزی $V(r)$ حرکت می کند. $L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$ $= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r)$

$M = m_1 + m_2$ $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$

$$E.o.m \rightarrow M \ddot{\vec{R}} = 0 \rightarrow \vec{R}(t) = \vec{v} t + \vec{R}(0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right] = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right] = \mu r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \frac{d}{dr} V(r)$$

$$\left| \mu \ddot{r} = \mu r \dot{\theta}^2 + \mu r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{d}{dr} V(r) \right| \quad - \frac{d}{dr} [\mu \dot{r}] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] = \mu r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \frac{d}{dt} [\mu r \dot{\theta}] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} [\mu r \sin^2 \theta \dot{\phi}] = 0$$

■ دلائل اثبات: نیروی گرانشی سیستم مرکزی هست تا به دل سیستمی که مرکزی است فقط دلائل اثبات دارد

■ معادلات حرکت، معادلات دینامیک در فیزیک یعنی توانایی

■ یک دسته معادلات حرکت، دلائل اثباتی نیستند با همی هم

Physical system $\Rightarrow$ Lagrangian $\xrightarrow{E.L.E}$ E.o.M

E.o.M $\xrightarrow{X}$ UNIQUE Lagrangian

مثال ۸
دو ذره در فضای دو بعدی:

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 - \frac{1}{r} x' - \frac{1}{r} y'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x: \ddot{x} + x = 0 \\ y: \ddot{y} + y = 0 \end{array} \right. \quad L' = \dot{x}\dot{y} - xy = x \frac{\partial L'}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} \right]$$

$$= -y - \frac{d}{dt} (\dot{y}) = 0$$

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

Φ فقط می تواند تابع از زمان
در این باشد (نه سرعت!)

$$L'(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) + \frac{d}{dt} \Phi(q_\alpha, t)$$

$$= L + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = 0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \right] = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] = \frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

Date:

Subject:

جلسه پانزدهم

برقآ خدایر بخشند و همربان

* $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$

لست (مقتدر) قابل امتحان

→ E.O.M → $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$

→ $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \\ \text{E.O.M} \end{cases} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = C t$

$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} = 0$

$\vec{P} = M \dot{\vec{R}}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} = P_x ; \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = P_y ; \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = P_z$

P یک نیروی پایدار برای حرکت است.

□ اگر L conservative باشد نیاز به معادله نیست در *

$\frac{\partial L}{\partial q}$

* $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$

$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = E$

$\frac{dE}{dt} = \sum_\alpha \ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$

$= \left| - \frac{\partial L}{\partial t} \right|$

$$\left| \frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \right|$$

تفسیر: اگر دگر انتری با سیم $L(\dot{q}_\alpha, q_\alpha, t)$
 تابعی صریحی از زمان نداشته باشد یعنی $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$
 آنوقت کمیت رفاهی

$$\mathcal{E} = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L$$

کمیت پایسته خواهد بود !!!

$$* \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$\mathcal{F}(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N)$$

در بعضی موارد نتوانیم از کفایتی شوی

همین فنسیر مانند: $\exp, \sin, \cos$ و ...
 $\Rightarrow \lambda^k \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_N)$

$$\text{مثال} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_2} \rightarrow \text{همین}$$

$$x^\omega \sin x \rightarrow \text{ناهمین}$$

$$d_\lambda (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N) = \lambda^k \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} \frac{d x_i}{d \lambda} = k \lambda^{k-1} \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} x_i$$

$$\Rightarrow \left| \sum_i x_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} = k \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_N) \right| *$$

$$\text{مثال: } x' + y'$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y^2 = 2f$$

$$L = T - V$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

انرژی جنبشی تابع همگن از $\dot{x}_i$ است
درجه 2 است

$$V = V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$$

$$E = T + V$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = 2T$$

لاند انرژی تابع همگن از $\dot{x}_i$ است

$$E = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - (T - V)$$

$L = T - V$

$$= 2T - T + V = T + V = E$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}$$

$$L = \dot{x}\dot{y} - xy \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \rightarrow E_1 = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 \\ \ddot{y} + y = 0 \rightarrow E_2 = \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} - L = 2\dot{x}\dot{y} - L = \dot{x}\dot{y} + xy$$

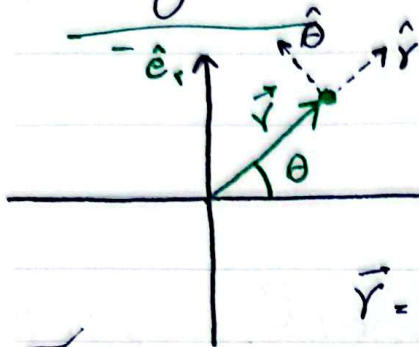
$$\dot{\vec{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

Date:

Subject:

برای خواندن بیشتر همین جلسه را نزنیم

* Rotating frame: An example of one-inertial frame:



$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{z} = \omega \hat{z}$$

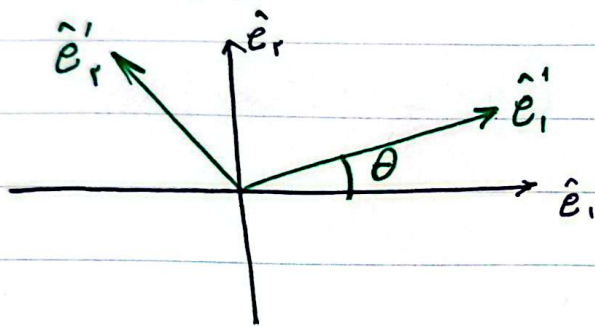
$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r} = r \hat{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} = \dot{r} \hat{r} + r \omega \hat{\theta} = \dot{r} \hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

رابطه سرعت هم قابل تعمیم است

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

تفسیر می کند بردارهای نه می چرخند ولی طول آنها



$$\dot{\hat{e}}_i' = \vec{\omega} \times \hat{e}_i'$$

$$|\dot{\hat{e}}_i' = \vec{\omega} \times \hat{e}_i'|$$

$$\vec{r} = r_i \hat{e}_i = r_i' \hat{e}_i'$$

بردار مکان در زره رقی به دستگاه ناخودآگاه صرفاً برای معرفی زره از دستگاه استفاده می کنیم

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}_i' \hat{e}_i' = \dot{r}_i' \hat{e}_i' + r_i' \dot{\hat{e}}_i' = \dot{r}_i' \hat{e}_i' + r_i' \vec{\omega} \times \hat{e}_i'$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}_i' \hat{e}_i' = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)' + \vec{\omega} \times \vec{r} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

سرعت مؤلفه ها در دستگاه S

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)' + \vec{\omega} \times \vec{r} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)'$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)' = \dot{r}_i' \hat{e}_i' = \dot{r}_i' \hat{e}_i' + 2 \dot{r}_i' \vec{\omega} \times \hat{e}_i' + r_i' \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{e}_i') + r_i' \dot{\vec{\omega}} \times \hat{e}_i'$$

تفسیرات درجہ اولیٰ میں بہتر خود

Date:

Subject:

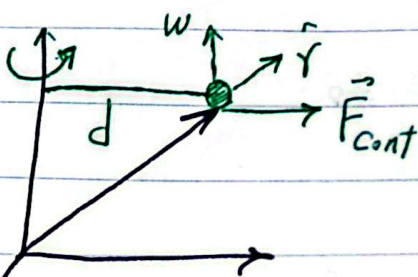
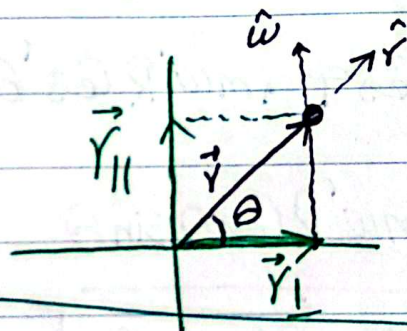
$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_S = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'} + 2\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

$$\times m \rightarrow m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'} = m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'} + 2m\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow \left[F = F - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'}}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Centrifugal}} - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{\text{Euler force}} \right] \leftarrow \text{fictitious forces}$$

$\vec{\omega} = \left(\frac{d}{dt} \right)_S$: سہج

$$\vec{F}_{\text{cont}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m \{ \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\omega^2 \} = m\omega^2 \vec{r} - m\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})$$



$$|\vec{F}_{\text{cont}}| = m\omega^2 d$$

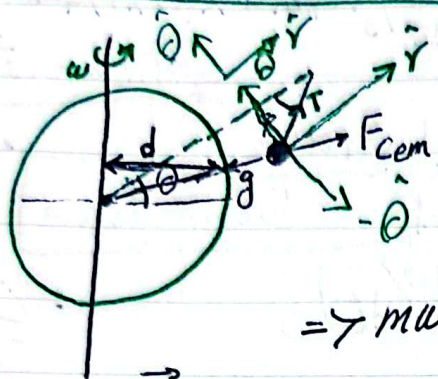
$$\vec{F}_{\text{cont}} = -\nabla V \Rightarrow V = -\frac{m}{2} |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 = -\frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

* سہج

جلسه هفتم

پنجاه و چهارمین جلسه

$$\vec{F}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{V} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$



$$\vec{g} = -g\hat{r}$$

$$\vec{F}_{cent} = |\vec{F}_{cent}| \cos\theta \hat{r} - |\vec{F}_{cent}| \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow m\omega' R \cos\theta \hat{r} - m\omega' R \cos\theta \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{T} = T \cos\varphi \hat{r} + T \sin\varphi \hat{\theta}$$

$$\hat{r} = -mg + T \cos\varphi + m\omega' R \cos\theta = 0$$

$$\hat{\theta} = T \sin\varphi = m\omega' R \cos\theta \sin\theta$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{\omega' R \cos\theta \sin\theta}{g - \omega' R \cos\theta}$$

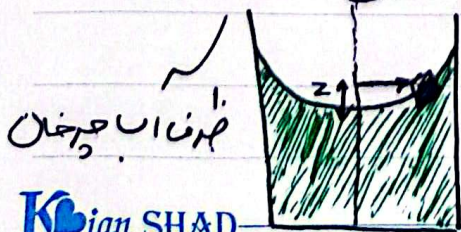
$$\omega' R \cos\theta \ll g$$

$$\tan\varphi = \frac{\omega' R}{2g} \sin 2\theta$$

$$\theta = \pi/4 \rightarrow T_{max} =$$

$$g_{eff} = g - \omega' R$$

در استوا شتاب گداختی کمترین شود.



$$V = -m/2 |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 + mgz$$

$$\vec{V} = -m/2 \omega'^2 r^2 + mgz = etc$$

$$* \left| z - \frac{\omega'^2}{2g} r^2 \right|$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$q\vec{v} \times \vec{B} = -q\vec{B} \times \vec{v}$$

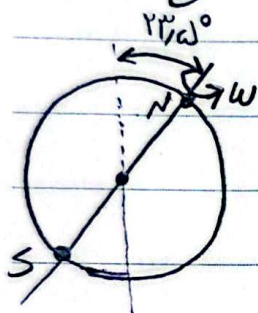
$$2m\omega = qB$$

$$\omega = \frac{qB}{2m}$$

نموده دورفتی

"مداس ترسیاری" "بستالی"

اگر یک فو کو: برنی بر از از داشتی آرنگ فو کو درست می آید توصیف مناسب برای اشکات حرکتی زمین است



$$\vec{\omega} = (0, \omega_0 \cos \theta, \omega_0 \sin \theta) = \vec{\Omega}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega \dot{y} \sin \theta$$

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega \dot{x} \sin \theta$$

$$\Omega \rho = \Omega \sin \theta$$

$$\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

حرکت زمین
Cont

$$T = U \rightarrow \text{تساوی انرژی} \rightarrow T = \frac{1}{2} m [\vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}]^2$$

$$= \frac{1}{2} m [\vec{v}_i^2 + 2\vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{r})^2]$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega_0 \cos \theta & \omega_0 \sin \theta \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \quad (\dot{z} = 0)$$

$$= \hat{i} (\omega_0 z \cos \theta - \omega_0 y \sin \theta) + \hat{j} (\omega_0 x \sin \theta) + \hat{k} (\omega_0 x \cos \theta)$$