

Date:

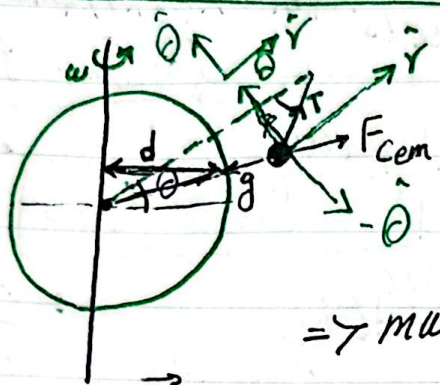
Subject:

سختی برداشتن از چرخش
یادگیری می کند

حلبه مفهوم

برای حل و در بخش بعدی

$$\vec{F}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$



$$\vec{g} = -g\hat{r}$$

$$\vec{F}_{cent} = |\vec{F}_{cent}| \cos\theta \hat{r} - |\vec{F}_{cent}| \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow m\omega' R \cos\theta \hat{r} - m\omega' R \cos\theta \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{T} = T \cos\varphi \hat{r} + T \sin\varphi \hat{\theta}$$

$$\hat{r} = -mg + T \cos\varphi + m\omega' R \cos\theta \hat{r} = 0$$

$$\hat{\theta} = T \sin\varphi = m\omega' R \cos\theta \sin\theta$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{\omega' R \cos\theta \sin\theta}{g - \omega' R \cos\theta}$$

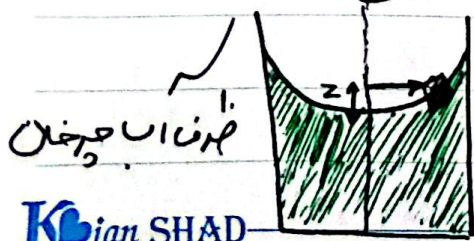
$$\omega' R \cos\theta \ll g$$

$$\tan\varphi = \frac{\omega' R}{2g} \sin 2\theta$$

$$\theta = \pi/4 \rightarrow T_{max} =$$

$$g_{eff} = g - \omega' R$$

در استوا شتاب برداشتی کمتری شود



$$V = -m/2 |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 + mgz$$

$$\vec{V} = -m/2 \omega' r^2 + mgz = etc$$

$$* \left| z - \frac{\omega' r^2}{2g} \right|$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

نموده گزینی

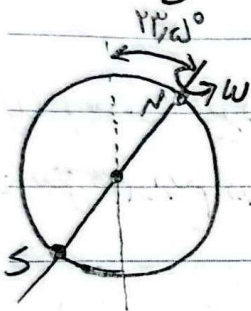
$$q\vec{v} \times \vec{B} = -q\vec{B} \times \vec{v}$$

$$2m\omega = qB$$

$$\omega = \frac{qB}{2m}$$

"ملاس ترسیاری" بستایی

این فولو: تیری بر از ازمایش آرنی فولو برست می آید تو صبح مناسب برای
ایستادگی و رهن است



$$\vec{\omega} = (0, \omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = \Omega$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega \dot{y} \sin \theta$$

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega \dot{x} \sin \theta$$

$$\Omega \rho = \Omega \sin \theta$$

$$\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

چونیت زمین
Cent

$$T - U = \frac{1}{2} m [\vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}]^2$$

$$= \frac{1}{2} m [\vec{v}_i^2 + 2\vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{r})^2]$$

$$\vec{v}_i = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad (\dot{z} \approx 0)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega_0 \cos \theta & \omega_0 \sin \theta \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega_0 \cos \theta & \omega_0 \sin \theta \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

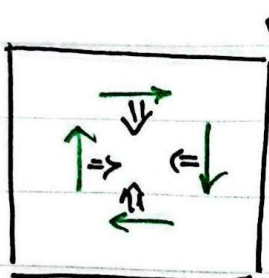
$$= \hat{i}(\omega_0 z \cos \theta - \omega_0 y \sin \theta) + \hat{j}(\omega_0 x \sin \theta) + \hat{k}(\omega_0 x \cos \theta)$$

$$\vec{r}_i = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

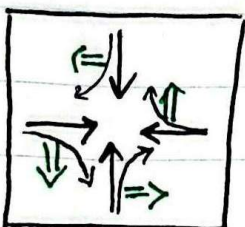
$$\Rightarrow \vec{r}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = x(z\omega_0 \cos\theta - y\omega_0 \sin\theta) + y(x\omega_0 \sin\theta) + z(-x\omega_0 \cos\theta)$$

برای حل این مسئله به دو روش می‌توانیم عمل کنیم

$$F = F_g - 2m\vec{\omega} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\vec{\omega} \times \vec{r}$$

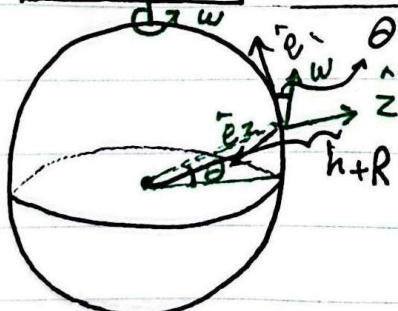


این به سمت بیرون می‌دهد. مثل یک سبزه زدن، سرعت را نشان می‌دهد. این یعنی هم داریم در فضا حرکت می‌کنیم و هم در فضا حرکت می‌کنیم.



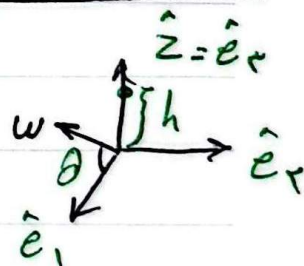
در استوا نیروی مرکز به مرکز داریم. نیروی کوریولیس باعث چرخش می‌شود و در امتداد محور می‌ماند.

$$2m\vec{\omega} \times \vec{r}$$



$$F' = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{r} = m\vec{r}''$$

$$\vec{r}'' = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{r}$$



$$\vec{r} = \vec{g}t - 2\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) \xrightarrow{\vec{r}} \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{g}t +$$

$$4\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0))$$

$$\vec{r} \approx \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{g}t$$

$$\vec{g} = -g\hat{e}_r$$

$$\vec{\omega} = \omega \cos\theta \hat{e}_1 + \omega \sin\theta \hat{e}_2$$

$$|\vec{Y} = -g\hat{e}_r + w\cos\theta gt\hat{e}_r|$$

$$v_c = wR$$

$$\vec{Y} = \underbrace{\left(-\frac{1}{r}gt^2 + R+h\right)}_R \hat{e}_r - \frac{1}{r}w\cos\theta gt^2 \hat{e}_r$$

$$t = \sqrt{\frac{rh}{g}} \quad d = \frac{1}{r} \cos\theta w g \left(\frac{rh}{g}\right)^{3/2}$$

$$L = mvr = mw(R+h)^2 = mvr \quad \text{"angular momentum"}$$

$$v = \frac{w(R+h)^2}{R}$$

$$\vec{F}' = -\frac{k}{r^2} \hat{k} + q \dot{\vec{r}}_s \times \vec{B} - \frac{2}{m} \vec{w} \times (\dot{\vec{r}})_s - m \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$$

$$\vec{F}' = -\frac{k}{r^2} \hat{r} + q \dot{\vec{r}}_s' \times \vec{B} + q(\vec{w} \times \vec{r}) \times \vec{B} - m \vec{w} \times \dot{\vec{r}}_s' -$$

$$m \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) \longrightarrow (\dot{\vec{r}})_s = (\dot{\vec{r}})_s'$$

$$|\vec{w} = -\frac{q}{\gamma m} \vec{B}|$$

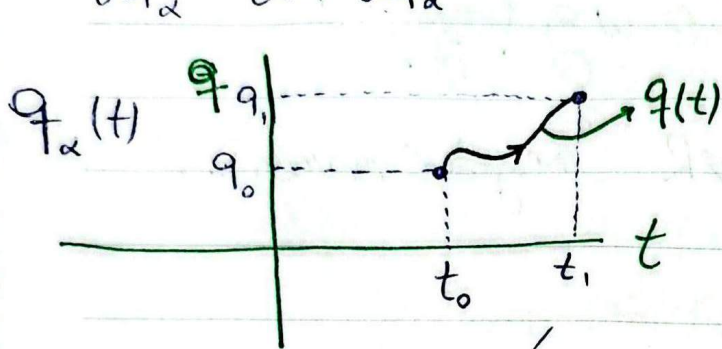
"به ناکا خردند خستیر و هیران" "جلسه نوزدهم"

$$q_\alpha(t) \rightarrow E \cdot L ; E \cdot O \cdot M$$

اصل درشتی ها مینتون

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0$$

$$q_\alpha(0), \dot{q}_\alpha(0) : \text{I know}$$



۲N Initial co

معادله اول را به نظر بگیرید که معادله دوم است

سوال که به نظر می آید را چه را چه میسر
 $q(t)$ این بوده که چه معنی وجود دارد که در این میسر ها نسیم باشد

مثال: یک حساب که ساخته می شود از میزان لنتش سعی موبول های که از این اسم می توانیم
 ما نسیم حساب را بسیاریم

$$S_\alpha[q_\alpha(t)] \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t) \quad \text{لنتش / action}$$

اصل ها مینتون: یک نسیم دنیا مینی فیزیکی که می باید که لنتش مربوط به
 خود را نسیم لنتش !!!

$$L = T - V$$

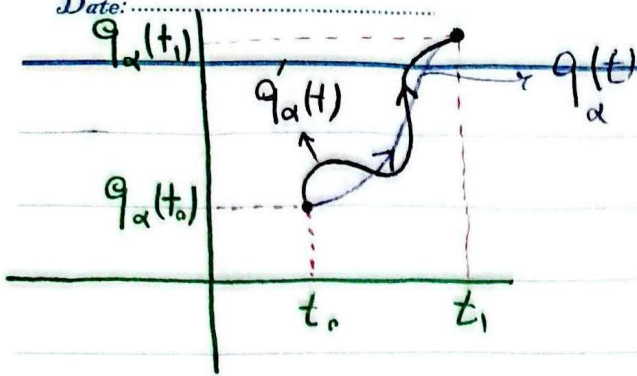
$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt (T - V)$$

در اینجا اگر میسیم لنتش می فاکتور لنتش لنتش
 و بتاسیل باید فاکتور لنتش

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

Date:

Subject:



$$q_\alpha(t) = q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t)$$

$$\delta q_\alpha(t) = \epsilon \sin t$$

$$\delta q_\alpha(t_0) = \delta q_\alpha(t_1) = 0 \quad \text{شرط}$$

$$\Rightarrow \delta q(t) = \epsilon \sin\left(\frac{t}{t_1} n\pi\right) \sin\left(\frac{t}{t_1} m\pi\right)$$

$$\delta q(t_0) = 0, \quad \delta q(t_1) = 0$$

$$q_\alpha(t) \rightarrow S[q_\alpha(t)] \rightarrow \text{ext'}$$

$$| S[q'_\alpha(t)] - S[q_\alpha(t)] - \delta S = 0 |$$

$$q_\alpha(t) \rightarrow \dot{q}_\alpha(t)$$

$$q'_\alpha(t) \rightarrow \dot{q}'_\alpha(t) = \dot{q}_\alpha(t) + \delta \dot{q}_\alpha(t)$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

$$* \text{imp} \quad \delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta L = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right\}$$

$$\delta S = S[q_\alpha + \delta q_\alpha] - S[q_\alpha]$$

فقط تابعی از q_α است پس
 $\delta \dot{q}_\alpha$ را به زودی متوجه می شویم.

$$\text{Kian SHAD} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha$$

Date:

Subject:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right\} + \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha -$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right\} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\} \delta q_\alpha = 0$$

مقعر، $\int dt f_\alpha h_\alpha = 0 \rightarrow f_\alpha = 0$

$$\delta S = 0 \rightarrow \left| \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \right|$$

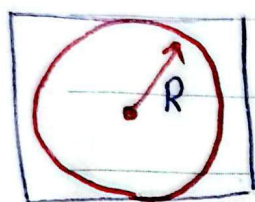
ذرات ریاضیاتی
میکنند که اکثر هم شود.

به نام خداوند بخشنده مهربان "جلسه ششم"

$$* S[q_\alpha(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

$$* \delta S = 0 \Rightarrow \text{E.o.M} ; \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0$$

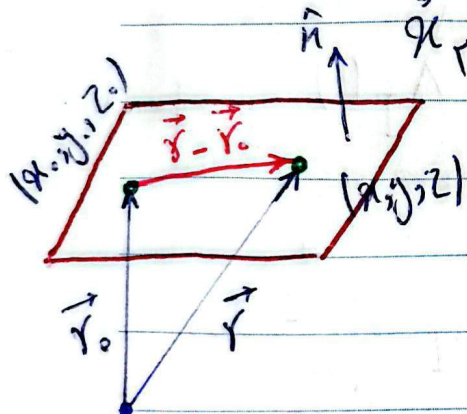
* "Constraints" مقدها



$$\vec{r}_i \rightarrow |\vec{r}_i| \leq R$$

$$\dot{x}_i \sim R \dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_r \sim R \dot{\varphi}$$



$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \hat{n} = \vec{r}_0 \cdot \hat{n} = C$$

$$ax + by + cz = R_0 \quad (0,0,0)$$

$$Q | ax + by + cz = 0 |$$

همه ی این ها به این معنی است

$$a x(t) + b y(t) + c z(t) = 0$$

$$x'(t) + y'(t) + z'(t) = R'$$

$$q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)$$

$$K_{\text{ian SHAD}} * \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = 0$$

$$* x' + y' + z' - R' = 0$$

$$* a x + b y + c z - R_0 = 0$$

$$f_1(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = 0$$

$$f_2(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = 0$$

⋮

$$f_n(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = 0$$

$N \rightarrow$ تعداد $q_\alpha(t)$

$K \leq N$
 $\downarrow$ $\rightarrow$
 مقید

ضرایب لاگرانژی

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \equiv L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) + \sum_{I=1}^K \lambda_I(t) f_I(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

$$* \text{E.o.M} \rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \sum_{I=1}^K \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial q_\alpha} = 0$$

$$\text{if } f_I(q_\alpha, t)$$

$$* \left| \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \right|$$

$$\left| L = L + \sum_{I=1}^K \lambda_I f_I(q_\alpha, t) \right|$$

$$q_\alpha(t) \rightarrow q_\alpha \quad \begin{cases} \alpha = 1, \dots, N \\ I = 1, \dots, k \end{cases}$$

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \quad \begin{aligned} & \rightarrow \left| \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \sum_{I=1}^k \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial q_\alpha} \right| = 0 \\ & f_I(q_\alpha, t) = 0 \end{aligned}$$

$$N, k \rightarrow \text{متغیرها} \rightarrow (q_\alpha, \lambda_I) \rightarrow N + k$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \left| \sum_{I=1}^k \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial q_\alpha} \right| \quad \begin{aligned} \alpha &= 1 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \quad ; f(x, t) = 0$$

$$m \ddot{x} = - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_F + \underbrace{\lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{قید ریاضی}}$$

λ فقط تابعی از t است

یعنی می‌تواند تابعی از q و $\dot{q}$ باشد.

ضرایب لاگرانژی یعنی به متغیرهای زینامیکی نزدیک است.

"جلسه نهم و بیستم"

نیم نایک فراوانر بخشیده همزمان

$$* S[q_\alpha(t)] = \int dt L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)$$

$$* \delta S = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0. \quad \alpha = 1, \dots, N$$

$$* f_I(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = 0 \quad I = 1, 2, \dots, k$$

$$* f_I(q_\alpha, t) = 0 \quad \text{Holonomic constraints} \quad \text{صیغه همدلی}$$

$$L \equiv L + \sum_{I=1}^k \lambda_I(t) f_I$$

ضرایب لایبراتور

$$E.o.M = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \sum_{I=1}^k \lambda_I(t) \frac{\partial f_I}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \right|$$

$$* \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = - \sum_{I=1}^k \lambda_I(t) \frac{\partial f_I}{\partial q_\alpha}$$

تعداد معادلات: $N+k$

$$* \left| \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \sum_{I=1}^k \lambda_I \left(\frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \right|$$

حالا چرا؟

در لایه های غیر هولو نوزم، استفاده از معادلات لانه انژی برای ما سخت است.

وقتی $\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha}$ ظاهر می شود در حالت می هولو نوزم است.

$$f(q_\alpha, t) = 0 \rightarrow \frac{df}{dt} = \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \left| \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}, \dot{q}_\alpha, t \right| = 0$$

باید $f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$

$$H(x, y) = 0 \rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy = 0$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \right|$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \rightarrow \text{Hessian} \equiv H_{\alpha\beta}$$

$$L = T - V$$

Trace ماتریس

Proof $\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$

$$\sum_\beta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\beta + \sum_\beta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\beta + \frac{\partial L}{\partial t \partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

$$\Rightarrow \sum_\beta H_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta = F_\alpha(q, \dot{q}, t)$$

$$|\ddot{q}_\alpha = S_\alpha(q, \dot{q}, t)| \quad H Q = F$$

Hespan : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ (Lagrangian Mechanics)

Subject:

Date:

$$V = -mgr \cos \theta$$

ad hoc
% 6 w

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta$$

مقادیر: $r = a$ ، تغییرات طول ریسمان

$$f(r, \theta) = r - a = 0 \quad \left| \dot{r} = 0 \right|$$

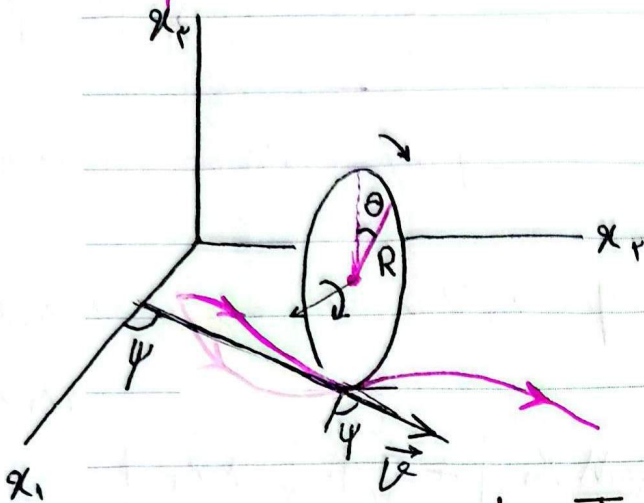
$$\begin{cases} r: \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = -\lambda = m r \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - m \ddot{r} \\ \theta: -mgr \sin \theta - \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0 \\ r = a \end{cases}$$

$$\rightarrow -\lambda = m a \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$$

$$mg \sin \theta = -m a \ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \underline{g \sin \theta = -a \ddot{\theta}}$$

"حل مسئله دو در دو"

"مکانیک کلاسیک" در فضا و در مختصات کروی



$$|\vec{v}| = R\dot{\theta}$$

$$1 = R\dot{\theta}\sin\psi = \dot{x}_1$$

$$2 = R\dot{\theta}\cos\psi = \dot{x}_2$$

$$3 = x_3 = cte$$

$$L = T - V = T = \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} I_{\theta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{\psi} \dot{\psi}^2$$

مشتق‌های زیر در معادله اولی. لاگرانژ می‌شوند، مشتق‌های دینامیکی کوپلر.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_1 = R\dot{\theta}\cos\psi - \dot{x}_1 &= 0 \\ \mathcal{F}_2 = R\dot{\theta}\sin\psi - \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \right| \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right] = - \sum_I \lambda_I^{(+)} \frac{\partial \mathcal{F}_I}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$$

$$\mathcal{F}_1 = R\dot{\theta}\cos\psi - \dot{x}_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] = - \sum_I \lambda_I^{(+)} \frac{\partial \mathcal{F}_I}{\partial \dot{x}_1} = \boxed{M \ddot{x}_1 = +\lambda_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] = - \sum_I \lambda_I^{(+)} \frac{\partial \mathcal{F}_I}{\partial \dot{x}_2} = \boxed{M \ddot{x}_2 = +\lambda_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right] = - \sum_I \lambda_I^{(+)} \frac{\partial \mathcal{F}_I}{\partial \dot{\psi}} = \boxed{-I_{\psi} \ddot{\psi} = 0}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] = - \left[\lambda_1(t) \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\theta}} \right] = \begin{cases} -I_{\theta} \ddot{\theta} = -\lambda_1 R \cos \psi - \lambda_2 R \sin \psi \end{cases}$$

$$|\psi(t) = \Omega t + \psi_0|$$

معادلات حرکت را بدست می آوریم

$$\overset{\text{در معادله}}{\dot{\theta}} \Rightarrow I_{\theta} \ddot{\theta} = \lambda_1 R \dot{\theta} \cos \psi + \lambda_2 R \dot{\theta} \sin \psi \Rightarrow I_{\theta} \ddot{\theta} = \lambda_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 \dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} I_{\theta} \dot{\theta}^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 \right] + \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2} M \dot{x}_2^2 \right]$$

$$* \psi(t) = \Omega t + \psi_0$$

$$* \frac{1}{2} I_{\theta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \mathcal{E} = \frac{1}{2} I_{\theta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2\mathcal{E}}{I_{\theta} + MR^2} \rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{I_{\theta} + MR^2}} = \omega \rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$$

$\dot{\theta} = \omega$

$$* \dot{x}_1 = R \omega \cos(\Omega t + \psi_0)$$

$$* \dot{x}_2 = R \omega \sin(\Omega t + \psi_0)$$

$$* \lambda_1 = -M_1 \ddot{x}_1 = -R M \ddot{x}_1 = -R M \omega \Omega \cos(\Omega t + \psi_0) + R M \omega \Omega \sin(\Omega t + \psi_0)$$

$$\lambda_2 = -M_2 \ddot{x}_2 = -R M \ddot{x}_2 = -R M \omega \Omega \sin(\Omega t + \psi_0) + R M \omega \Omega \cos(\Omega t + \psi_0)$$

برای λ_1 و λ_2 هر دو از معادله نیرون هستند. در معادله نیرون لغت به نفع نیرون ها

اصفاک هستند. نیرون اصفاک به سرعت ها بستگی دارد.

Date:

Subject:

$$f(q_\alpha) = f(q_\alpha(q_\beta)) = \tilde{f}(q_\alpha) \quad \begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(q_\beta) \\ q_\beta = q_\beta(q_\alpha) \end{cases}$$

$$f(x, y) = x^r - y^r$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = \tilde{f}(r, \theta) = r^r (\cos^r \theta - \sin^r \theta) = r^r \cos^r \theta$$

$$x(x', y'), \quad y(x', y')$$

$$f(x, y) = \tilde{f}(x', y') \stackrel{C.T.}{=} g(x', y')$$

$$f(x, y) = x' + y' = \tilde{f}(r, \theta) = r^r$$

$$\tilde{f}(x', y') = x' + y'$$

مثال ٥

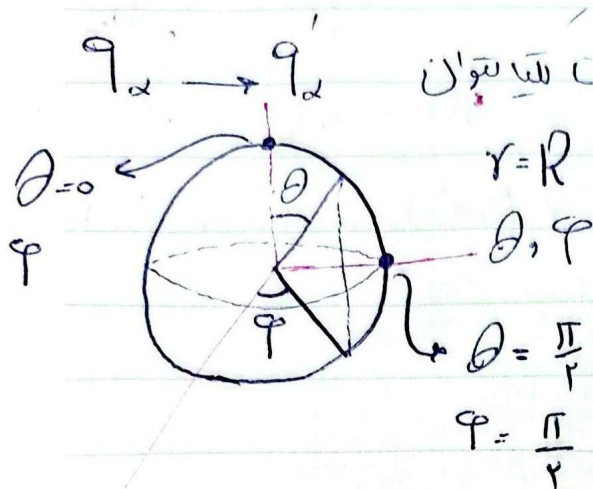
$$\begin{cases} x = \cos \theta x' - \sin \theta y' \\ y = \sin \theta x' + \cos \theta y' \end{cases}$$

تقابل
تساوی
کتابخانه

$$f(x, y) = f(x', y')$$

"در یک فضای چند بعدی"

جایگاه نسبت به هم



حساب بردار مختصات: یعنی به هر ایزدی مختصات می‌توان

نسبت داد.

در فضای چند بعدی در دستگاه مختصات، عبارت شود

$$q'_\alpha = q_\alpha(q_\beta)$$

$$q'_1 = f_1(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$q'_2 = f_2(q_1, \dots, q_n)$$

$$q'_n = f_n(q_1, \dots, q_n)$$

برای اینکه به عنوان مثال q'_2 را بر حسب q_1 و q_n بنویسیم باید درجه‌های آن را نویسیم آن مخالف

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_1} & \frac{\partial f_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

$$q'_\alpha = q_\alpha(q_\beta) \longleftrightarrow q_\alpha = q_\alpha(q_\beta)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta} \end{vmatrix} \neq 0$$

Date:

Subject:

$$\begin{array}{l}
 x = r \cos \theta = x(r, \theta) \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{array} \right| = r \\
 y = r \sin \theta = y(r, \theta)
 \end{array}$$

■ در فضای صفر بعدی و قرارش $r=0$ باشد پس در نقطه $r=0$ کمالات متشکل دارد.

■ ما به چنین کمالات می‌گوییم، کمالات ها یا زنی کو اسم.

$$f(q_\alpha) = f'(q_\alpha)$$

$$f(x, y, z) = x' + y' + z'$$

$$f(x, y, z) = f'(r, \theta, \varphi) = r'$$

تعریف تقارن: $f(x, y, z) = f'(x', y', z') = f(x', y', z')$

اگر دستگاه را بچرخانیم تقارن دستگاه، حالت بشود.

$$\begin{cases}
 x = x' \cos \theta + y' \sin \theta \\
 y = -x' \sin \theta + y' \cos \theta \\
 z = z'
 \end{cases}$$

$$f(x, y, z) = f'(x', y', z') = x' + y' + z' = f(x', y', z')$$

■ تعریف: تابع f از روی کمالات $\{q_\alpha\}$ در تقارن
نه به صورت $f(q_\alpha)$ نوشته می‌شود.

میزان بشود: این تابع می‌تواند است یعنی کمالات تبدیل کمالات $q_\alpha \rightarrow q'_\alpha$ در اینجه می‌شود
می‌کند

$$f(q_\alpha) = f'(q'_\alpha)$$

تابع f را می‌توان این تبدیل کمالات می‌نامیم $f(q_\alpha)$ در دامی کو اسم

$$f(q'_\alpha) = f(q_\alpha) \quad \text{اگر}$$

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz \\ y' &= gx + fy + dz \\ z' &= hx + ky + qz \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & f & d \\ h & k & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A \rightarrow a_{ij}$$

$$q'_\alpha = q_\alpha + \epsilon q_\beta$$

"تبدیل مختصات میونسیم"

$$q'_1 = q_1 + \epsilon \delta q_1$$

$$|\epsilon| \ll 1$$

$$q'_r = q_r + \epsilon \delta q_r$$

لم جمعی میونسیم

$$\begin{cases} x = x' + \theta y' \\ y = y' - \theta x' \\ z = z' \end{cases}$$

تفسیر نوسر: اگر دانه‌تری می‌لستم (میان‌مدلی) کتاب تبدیل مختصات میونسیم، مقدار باشد (نادر باشد) آنگاه به‌لای آن تبدیل مختصات می‌لست ثابت (میونسیم) وجود دارد.

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

$$L'(q'_\alpha, \dot{q}'_\alpha, t) = L(q'_\alpha, \dot{q}'_\alpha, t) ; L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

$$L'(q'_\alpha, \dot{q}'_\alpha, t) = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

$$q'_\alpha = q_\alpha + \epsilon \delta q_\alpha$$

$$\dot{q}'_\alpha = \dot{q}_\alpha + \epsilon \delta \dot{q}_\alpha$$

$$L'(q_\alpha + \epsilon \delta q_\alpha, \dot{q}_\alpha + \epsilon \delta \dot{q}_\alpha, t) =$$

$$\cancel{L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)} + \sum_\alpha \frac{\partial L'}{\partial q_\alpha} \epsilon \delta q_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} \epsilon \delta \dot{q}_\alpha =$$

$$\cancel{L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)}$$

$$\Rightarrow L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t)$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \epsilon \delta q_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \epsilon \delta \dot{q}_\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \sum_\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \epsilon \delta q_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \epsilon \delta \dot{q}_\alpha = 0$$

$$= \epsilon \frac{d}{dt} \left[\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right] = 0$$

"دینا که عذاب و فشاره، دهر بان"

عکس نسبت دینا

تفسیر نوتر

$$L(q_a, \dot{q}_a, t) \rightarrow L'(q'_a, \dot{q}'_a, t) = L(q_a, \dot{q}_a, t) + \frac{dK}{dt}$$

$$q'_a = q_a + \epsilon \delta q_a \Rightarrow \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a = cte.$$

$$* \left| L'(q_a, \dot{q}_a, t) = L(q_a, \dot{q}_a, t) + \frac{dK}{dt} \right| \quad \text{For arbitrary}$$

$$K(q_a, t)$$

$$* \left| \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a - K = cte. \right|$$

نکته: تفسیر دینا و ثابت انرژی

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \quad \text{مثال: ذره ای در صفحه xy بدون تپاس}$$

$$L'(x, \dot{x}, y, \dot{y}, t) = L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, t)$$

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$\Rightarrow y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad y = x \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$* x' = x + \theta y \Rightarrow \delta x = y$$

$$* y' = y + \theta x \Rightarrow \delta y = x$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta y$$

$$Q = M\dot{x}y - M\dot{y}x = (\underbrace{\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}}_{\vec{L}}) \cdot \hat{z}$$

متغیرهای مستقل و وابسته $\Rightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x + \epsilon \\ y' = y \end{cases} ; \begin{cases} x' = x \\ y' = y + \epsilon \end{cases}$

$$\delta x = 1 \quad \delta y = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} = M\dot{x} = \text{cte} = P_x$$

دفعه 1

$$P_y = \text{cte}.$$

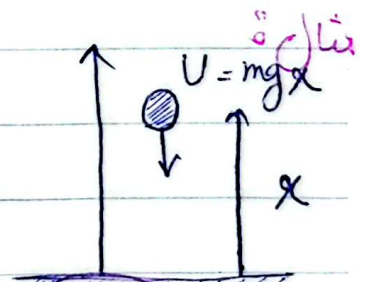
$$| \epsilon = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a - L = -1 |$$

تقارن دورانی
تقارن انتقال $\rightarrow$ تقارن
تقارن استقلال زمانی

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx$$

$$* x' = x + a$$

$$L' = \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 - mgx' = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - mgx - mga$$



$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} - k = [m\dot{x} - mgt] = Q \quad L(x, \dot{x}, t) \quad \text{arbitrary} \quad \frac{dk}{dt} = \gamma$$

$$k = mgt$$

جلسه دوازدهم

به نیت خداوند گشوده گردان

□ Laplace - Runge - Lenz

□ Virial Theorem

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + k/r$$

$\vec{L}$: کمیت شاراف
اولیه
 $\vec{E}$: کمیت های ثابت
 $\vec{p}$

□ برای سیستم دو جرمی E کمیت ثابت داریم

نسبت به انتقال ناوردای داریم نسبت به R
نسبت به چرخش ناورد است نسبت به ϕ

تغییر درجات آزادی $R(x, y, z)$

 $r(x, y, z)$ G درجه آزادی

$\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$: انرژی جنبشی
تغییر

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \mu k \frac{\vec{r}}{r}$$

angular momentum

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{p} = \mu \dot{\vec{r}}$$

$$* \frac{dA}{dt} = 0$$

□ بردار A برای سیستم دو جرمی نا کمیت نااسته است

$$* \vec{L} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$$

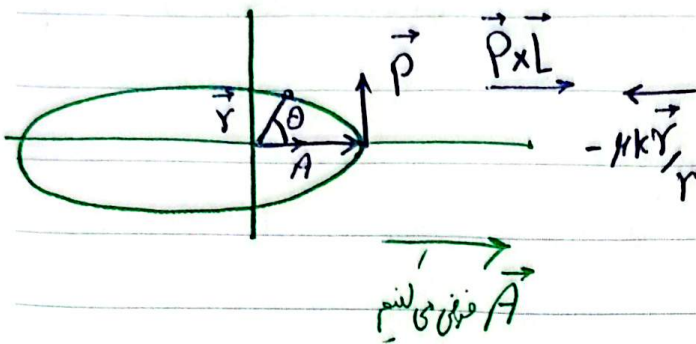
$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) - \mu k \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} = -\frac{k}{r^2} \hat{r} \times (\vec{r} \times \vec{p}) = -\frac{k}{r^2} \{ \vec{r} \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}} \vec{r} \}$$

$$= -\frac{k\mu}{r^2} \{ \vec{r} \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}} \vec{r} \} = +\mu k \left\{ \frac{-\vec{r}}{r^2} \dot{\vec{r}} + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right\} = \mu k \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \checkmark$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\vec{L} \cdot \vec{A} = \vec{L} \cdot (\vec{P} \times \vec{L}) - \mu k \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{L} = 0$$



$$\vec{r} \cdot \vec{A} = r A \cos \theta$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (\vec{P} \times \vec{L}) - \mu k r =$$

$$\ell' - \mu k r$$

$$* r(A \cos \theta + \mu k) = \ell'$$

$$\Rightarrow r = \frac{\ell'}{\mu k + A \cos \theta} = \frac{\ell'}{\mu k \left(1 + \left(\frac{A}{\mu k}\right) \cos \theta\right)}$$

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

مقدار e را برای مدارهای مختلف در نظر بگیرید

$$* \left| e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell'}{\mu k^2}} \right| \Rightarrow \begin{cases} e=0 & \text{دایره} \\ e=1 & \text{سیمی} \\ e < 1 & \text{بیض} \end{cases}$$

$$| E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{k}{r} |$$

$$G = \vec{r} \cdot \vec{p}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{dU}{dr} \hat{r} = \vec{p}$$

$$\frac{dG}{dt} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} + \vec{r} \cdot \dot{\vec{p}} = rT + \vec{r} \cdot \underbrace{\left(-\frac{dU}{dr} \hat{r}\right)}_{\vec{F}}$$

$$\Rightarrow rT - \frac{dU}{dr} r$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau T dt - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dU}{dr} r dt$$

is average

Date:

Subject:

$$\frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} = 2\bar{T} - \frac{dU}{dr} r$$

$\tau \rightarrow$ "Period"

* "For periodic motion"

$$\left| \overline{2T} = \overline{\frac{dU}{dr} r} \right| \text{ Virial Theory } \underline{\text{meo}}$$

$$U(r) = ar^{n+1}$$

$$\frac{dU}{dr} r = a(n+1) r^{n+1}$$

$$\left| \overline{2T} = (n+1) \overline{U} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{U} \right|$$