

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: ریاضی - فیزیک ۱

میانترم ۱۷ آبان ماه ساعت کلاس (دو فصل اول کتاب درآرکن و وبر و آرکن)

Arfken Edition 3

Arfken - veber Edition 5

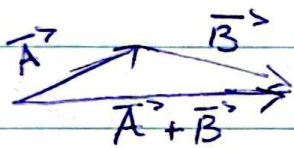
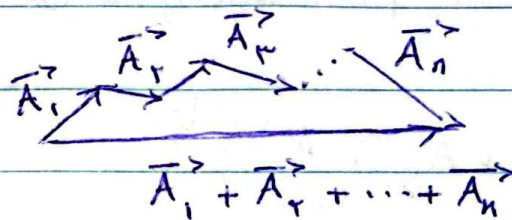
۸،۵ نفره میانترم

۸،۵ نفره پایانترم

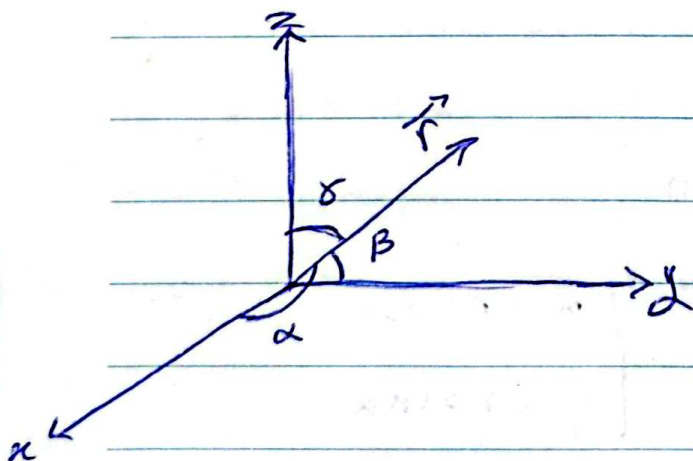
۳ نفره تدریسار

1. vectors بردارها

1.1 defenitions,



Direction cosines کسینوسهای جهتی



$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \cos \beta$$

$$z = r \cos \gamma$$

$$|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$r^2 = r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \cos^2 \beta + r^2 \cos^2 \gamma \Rightarrow$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

$$\vec{r} = (x, y, z) = (r; \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

نقطه در فضای سه بعدی

Unit vectors $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

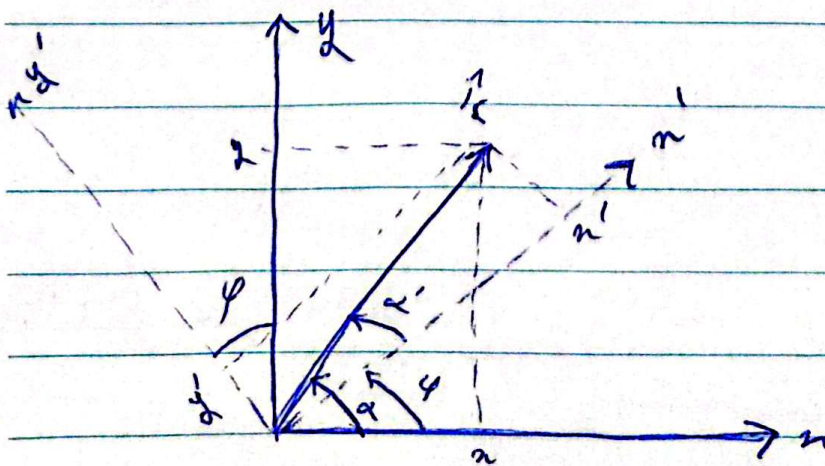
$$\vec{A} = \hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z$$

A_x, A_y, A_z (components) اجزای

$$|\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

$$\vec{A} = 0 \iff A_x = A_y = A_z = 0$$

1.2 Advanced definition



$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cos \alpha' \\ y' = r \sin \alpha' \end{cases}$$

$$\alpha' = \alpha - \phi$$

$$\begin{cases} x' = x \cos(\alpha', \alpha) + y \sin(\alpha', \alpha) \\ y' = x \sin(\alpha', \alpha) + y \cos(\alpha', \alpha) \end{cases}$$

Date: _____ Subject: _____

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases} \quad (1) \quad \begin{array}{l} \text{کسینوسهای } A_\alpha \text{ و } A_\gamma \text{ اگر} \\ \text{همانند رابطه‌ی (1) تبدیل شوند آنگاه} \end{array}$$

$$\begin{cases} A'_\alpha = A_\alpha \cos \varphi + A_\gamma \sin \varphi \\ A'_\gamma = -A_\alpha \sin \varphi + A_\gamma \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{آنگاه } A_\alpha \text{ و } A_\gamma \text{ مولفه‌های یک بردارند.} \end{array}$$

* چرخش و انتقال دستگاه مختصات را

$$\begin{cases} \alpha \rightarrow \alpha_1 \\ \gamma \rightarrow \alpha_r \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha' \rightarrow \alpha'_1 \\ \gamma' \rightarrow \alpha'_r \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{می‌توان اینگونه تعبیر کرد که دو ناظر} \\ \text{مختلف و در حال مشاهده یک پدیده} \\ \text{همسفری خواهیم تعیین کنیم که چگونه این} \end{array}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha'_1 = \alpha_1 \cos \varphi + \alpha_r \sin \varphi \\ \alpha'_r = -\alpha_1 \sin \varphi + \alpha_r \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{دو ناظر می‌توانند درباره این پدیده} \\ \text{تحت فیزیک و ریاضی} \\ \text{حرف بزنند. وقتی ناظر اول} \end{array}$$

اطلاعاتی را درباره یک پدیده گزارش

$$\begin{cases} a_{11} = \cos(\alpha'_1, \alpha_1) = \cos \varphi \\ a_{1r} = \cos(\alpha'_1, \alpha_r) = \sin \varphi \\ a_{r1} = \cos(\alpha'_r, \alpha_1) = \sin \varphi \\ a_{rr} = \cos(\alpha'_r, \alpha_r) = \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{می‌کند. ناظر دوم باید بتواند این} \\ \text{اطلاعات را درست و در} \\ \text{دستگاه خود تحلیل کند.} \\ \text{یعنی عملاً قوانین فیزیکی را در دستگاه} \end{array}$$

های مختلف تبدیل می‌کنیم.

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha'_1 = a_{11} \alpha_1 + a_{1r} \alpha_r = \sum_{j=1}^2 a_{1j} \alpha_j \\ \alpha'_r = a_{r1} \alpha_1 + a_{rr} \alpha_r = \sum_{j=1}^2 a_{rj} \alpha_j \end{cases}$$

$$\text{تعریف} \quad \cos(\alpha'_i, \alpha_j) =: a_{ij} \quad \left| \quad \alpha'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} \alpha_j \right.$$

بهت نسبت n_j n_j نسبت n_i

$$a_{ij} = \cos(n'_i, n_j)$$

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

$d = \text{dummy index}$
 $i = \text{free index}$

$$x'_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} x_j \Rightarrow A'_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} A_j$$

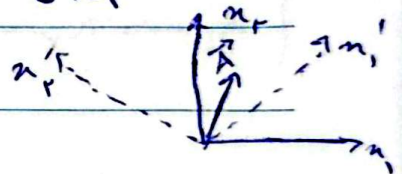
Generalization to the N -dimension

تقسیم به فضای N بعدی

$$(x_1, x_2, \dots, x_N) \xrightarrow[\text{مختصات}]{\text{شکل}} (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$$

$$a_{11} = \frac{\delta x'_1}{\delta x_1} = \frac{\delta x_1}{\delta x'_1} \quad , \quad a_{12} = \frac{\delta x'_1}{\delta x_2} = \frac{\delta x_2}{\delta x'_1}$$

$$a_{21} = \frac{\delta x'_2}{\delta x_1} \quad , \quad a_{22} = \frac{\delta x'_2}{\delta x_2}$$



$$(x_1, \dots, x_N)$$

$$(x'_1, \dots, x'_N)$$

x_1 و x'_1 دستگاه مختصات اولیه است.
 x'_1 و x'_2 دستگاه جدید است که از چرخش دستگاه قبلی به دست آمده.
 $\vec{A}$ یک بردار در فضا است که می توانیم مولفه های آن را در دستگاه جدید بیان کنیم.

$$a_{ij} = \cos(n'_i, n_j) = \frac{\delta x'_i}{\delta x_j} = \frac{\delta x_j}{\delta x'_i}$$

$$A'_i = \sum_{j=1}^N \frac{\delta x'_i}{\delta x_j} A_j \quad \xrightarrow{\text{دردگاری}} \quad \sum_{j=1}^N \frac{\delta x_j}{\delta x'_i} A_j \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

بنابراین رابطه فوق N تا معادله است.

orthogonality condition شرط متعامد

بنای شرط: کسینوس های هادی a_{ij} روابط زیر را برآورده کنند:

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

دستای کرونکر

طبق شرط * : تمام مشتقات به جز $d=2$ برابر صفری شود. $\frac{\delta \kappa'_i}{\delta \kappa_r} = a_{ir}$

Date: $\kappa'_i = a_{i1} \kappa_1 + a_{i2} \kappa_2 + a_{i3} \kappa_3 + \dots$ Subject: -----

$$\kappa'_i = \sum_j a_{ij} \kappa_j \quad \xrightarrow{\frac{\delta}{\delta \kappa_j}} \quad a_{ij} = \frac{\delta \kappa'_i}{\delta \kappa_j}$$

* اگر فرض استقلال همه ی مشتقات از هم دیگر را در نظر بگیریم : $\frac{\delta \kappa'_i}{\delta \kappa_j} = 0$ $i \neq j$
 مبنی محور ها مستقل اند و از یکدیگر تشکیل نشده اند.

$$\frac{\delta \kappa'_i}{\delta \kappa_j} = \frac{\delta \kappa_j}{\delta \kappa'_i}$$

Date: / /

Sat.

Sun.

Mon.

Tue.

Thu.

Wed.

Fri.

Subject: -----

تعریف بردار: هر موجودی که تحت دوران محورها، مولفه‌هایش مطابق رابطه

$$x'_i = \sum_{j=1}^d a_{ij} x_j$$

تبدیل شود.

$$x'_i = \sum_{j=1}^d a_{ij} x_j$$

تعریف بردار

$$i = 1, 2, \dots, d$$

Date: / /

Sat Sun Mon Tue Thu Wed Fri

Subject: -----

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad (A)$$

رابطه شمار

$$\sum_{i=1}^N a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} \quad (B)$$

مصفی از a_{ij} ←
ماتریس A

$$(A) \Rightarrow \sum_{i=1}^N (A^T)_{ji} (A)_{ik} = \mathbb{1}_{jk}$$

ماتریس
ترانپوزه

$$(A^T A)_{jk} = \mathbb{1}_{jk} \Rightarrow A^T A = \mathbb{1} \quad (C)$$

$$(B) \Rightarrow A A^T = \mathbb{1} \quad (D)$$

اثبات شرط شمار:

$$(A) \Rightarrow \sum_{i=1}^N a_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^N \frac{\delta x_i}{\delta x_j} \frac{\delta x_i}{\delta x_k} =$$

دکارتی

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta x_j}{\delta x_i} \frac{\delta x_i}{\delta x_k} = \frac{\delta x_j}{\delta x_k} = \delta_{jk}$$

فصل جابجایی $j=k$

← ساده شد! قاعده زنجیری است.
سیگما از بین می رود.

$$A A^T = A^T A = \mathbb{1} \quad \text{شرط تمام دو ماتریس}$$

Date: / /

Sat Sun Mon Tue Thu Wed Fri

Subject: -----

Vector space فضای برداری

$$1) \vec{X} = \vec{Y} \Rightarrow x_i = y_i$$

$$2) \vec{X} + \vec{Y} = \vec{Z} \Rightarrow x_i + y_i = z_i$$

$$3) a\vec{X} = (ax, ay, az)$$

$$4) -\vec{X} = (-x, -y, -z)$$

$$5) \vec{0} = (0, 0, 0)$$

$$a) \vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X}$$

$$b) (\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z} = \vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z})$$

$$c) a(\vec{X} + \vec{Y}) = a\vec{X} + a\vec{Y}$$

$$d) (a+b)\vec{X} = a\vec{X} + b\vec{X}$$

$$e) (a \cdot b)\vec{X} = a(b\vec{X})$$

1.3 Scaler product = Dot product = Inner product

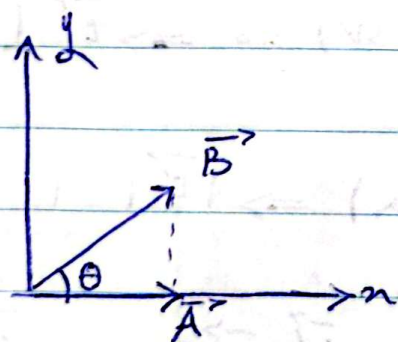
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad \text{تعریف جبری}$$

$$= \vec{B} \cdot \vec{A}$$

اگر دو بردار متناظر داشته باشیم با انتقال موازی یکی از آنها، ابتدای یکی را روی ابتدای دیگری تراز می دهیم.

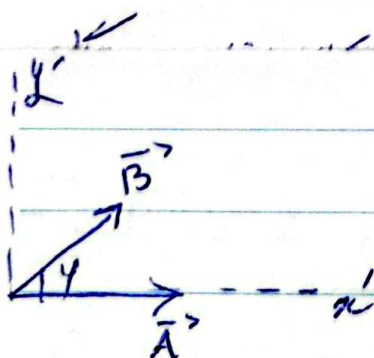
الکون از این دو بردار یک منته γ می گذرد که این دو بردار در آن تراز دارد.

محورها را به گونه ای انتخاب می کنیم که روی یکی از بردارها بیفتد.



تعریف هندسی

$$\begin{cases} A_y = A_z = 0 = B_z \\ B_x = B \cos \theta \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \\ A_x = |A| \end{cases}$$



$$\vec{B}' = (B \cos \gamma, B \sin \gamma)$$

$$\vec{A}' = (A, 0)$$

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = A'_x B'_x + A'_y B'_y = B \cos \gamma A + 0 = \vec{A}' \cdot \vec{B}'$$

ضرب داخلی مستقل از دستگاه است

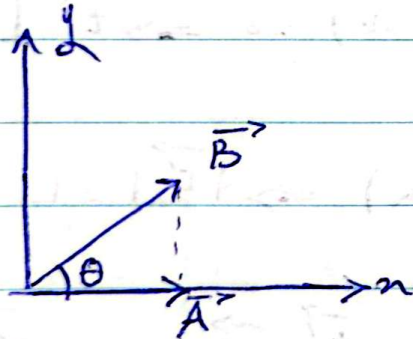
1.3 Sclar product = Dot pro... = Inner pro.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad \text{تعریف جبری} \\ = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

اگر دو بردار متناظر داشته باشیم با انتقال موازی یکی از آنها، ابتدای یکی را روی ابتدای دیگری قرار می دهیم.

الکون از این دو بردار یک صفحه α می گذرد که این دو بردار در آن قرار دارد.

محور n را به گونه ای انتخاب می کنیم که روی یکی از بردارها بیفتد.



$$\begin{cases} A_y = A_z = 0 = B_z \\ B_x = B \cos \theta \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \\ A_x = |A| \end{cases} \quad \text{تعریف هندسی}$$

تغییر دستگاه مختصات به معنی تغییر نظر است. ضرب اسکالر با تغییر دستگاه

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad \text{مختصات نباید تغییر کند.}$$

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = \sum_k A'_k B'_k = \sum_k \left[\left(\sum_i a_{ki} A_i \right) \left(\sum_j a_{kj} B_j \right) \right] \\ = \sum_i \sum_j \left[A_i B_j \left(\sum_k a_{ki} a_{kj} \right) \right] \quad \text{اسکالر است.}$$

$$= \sum_i \sum_j (A_i B_j \delta_{ij}) = \sum_i A_i B_i = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

Date: / /

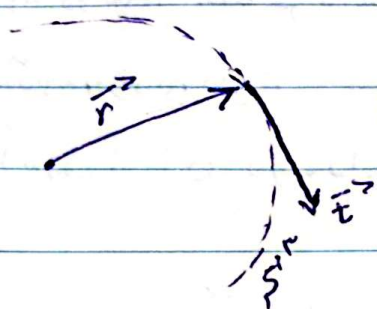
Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

مثال از ضرب داخلی: $\vec{r} = (x, y, z, w)$ و $|\vec{r}| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$

بردار $\vec{t}$ را به گونه ای بیابید که بر $\vec{r}$ عمود باشد و اندازه آن 1 باشد. $\vec{t} = ?$

$$|\vec{t}| = 1, \quad \vec{t} \cdot \vec{r} = 0$$



$$\vec{t} = (y, -x, w, -z) \Rightarrow$$

$$|\vec{t}|^2 = y^2 + x^2 + w^2 + z^2 = 1$$

$$\vec{t} \cdot \vec{r} = yx + (-x)y + wz + (-z)w = 0 \Rightarrow \vec{t} \perp \vec{r}$$

$$\vec{t}' = (w, -z, y, -x) \Rightarrow |\vec{t}'| = 1$$

$$\vec{t} = (x, y, z, w)$$

$$\vec{t}' \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{t}' \perp \vec{r}$$

$$|\vec{t}| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

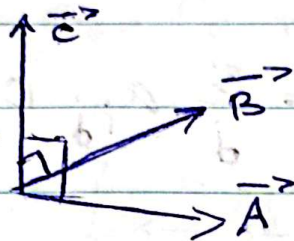
Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

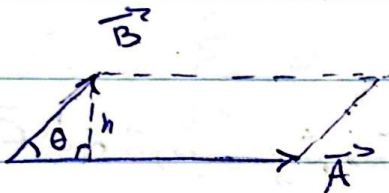
1.4 vector or cross product ضرب برداری

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



تعریف هندسی:

$$C = AB \sin \theta = |\vec{A} \times \vec{B}|$$



$$h = B \sin \theta$$

$$\text{مساحت} = Ah = A(B \sin \theta) = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

تعریف جبری:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i} (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j} (-A_x B_z + A_z B_x) + \hat{k} (A_x B_y - A_y B_x)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A_x (A \times B)_x + A_y (A \times B)_y + A_z (A \times B)_z = 0$$

$$\Rightarrow \vec{A} \perp \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{A} \times \vec{B}$$

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \left(\begin{matrix} \end{matrix} \right)_x^2 + \left(\begin{matrix} \end{matrix} \right)_y^2 + \left(\begin{matrix} \end{matrix} \right)_z^2$$

$$= A^2 B^2 \sin^2 \theta$$

اگر $\begin{cases} A'_i = \sum_j a_{ij} A_j \\ B'_i = \sum_j a_{ij} B_j \end{cases} \xrightarrow{\text{بازنگاه؟}} C'_i = \sum_j a_{ij} C_j$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$\vec{C}$ طبق تعریف پیشرفته بردار یک بردار است.

$$\vec{C}' = \vec{A}' \times \vec{B}'$$

اثبات:

$$C'_i = A'_j B'_k - A'_k B'_j \quad i=3, j=1, k=2$$

$$C'_i = \left(\sum_l a_{jl} A_l \right) \left(\sum_m a_{km} B_m \right)$$

$$- \left(\sum_l a_{kl} A_l \right) \left(\sum_m a_{jm} B_m \right)$$

$$= \sum_{l,m} (a_{jl} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) A_l B_m$$

$$i=3, j=1, k=2 \Rightarrow C'_3 = \sum_{l,m} (a_{1l} a_{2m} - a_{2l} a_{1m}) A_l B_m$$

از تری کولر

$$\begin{cases} a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = a_{33} \\ a_{12} a_{21} - a_{22} a_{11} = a_{33} \\ a_{13} a_{22} - a_{22} a_{13} = a_{31} \end{cases}$$

کتاب

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

$$\begin{aligned}
 C'_r &= a_{rr} A_r B_r + a_{rr} A_r B_r + a_{r1} A_r B_r \\
 &\quad - a_{rr} A_r B_r - a_{rr} A_r B_r - a_{r1} A_r B_r \\
 &= a_{rr} C_r + a_{rr} C_r + a_{r1} C_1
 \end{aligned}$$

$$C'_r = \sum_{j=1}^r a_{rj} C_j \quad j=1, 2, \dots$$

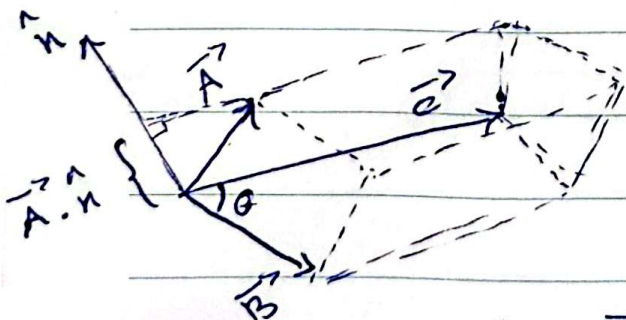
$$C'_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} C_j$$

1.5 Triple scalar product

اسکالر $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_x (\vec{B} \times \vec{C})_x + A_y (\vec{B} \times \vec{C})_y + A_z (\vec{B} \times \vec{C})_z$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

تفسیر هندسی $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

$$\hat{n} = \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B} \times \vec{C}|}$$

$$\text{ارتفاع} = \vec{A} \cdot \hat{n}$$

$$\text{حجم} = \text{مساحت} \times \text{ارتفاع} = |\vec{B} \times \vec{C}| \vec{A} \cdot \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B} \times \vec{C}|} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

حجم یک سبب اسکالر است!

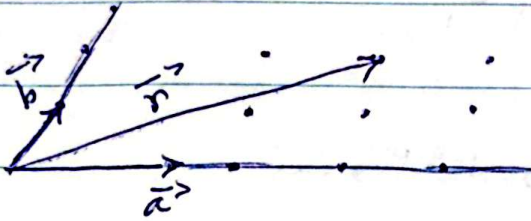
Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

کاربرد فوب سه گانه در reciprocal lattice (شبکه متقابل)

$$\vec{r} = n_a \vec{a} + n_b \vec{b} + n_c \vec{c} \quad (n_a, n_b, n_c = \text{اعداد صحیح})$$



از سه بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ سه بردار جدید $\vec{a'}, \vec{b'}, \vec{c'}$ به صورت زیری ساز می‌گیریم.

$$\vec{a'} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}, \quad \vec{b'} = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}, \quad \vec{c'} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}$$

$$\begin{cases} \vec{a'} \cdot \vec{a} = \vec{b'} \cdot \vec{b} = \vec{c'} \cdot \vec{c} = 1 \\ \vec{a'} \cdot \vec{b} = \vec{a'} \cdot \vec{c} = \vec{b'} \cdot \vec{a} = \vec{b'} \cdot \vec{c} = \vec{c'} \cdot \vec{a} = \vec{c'} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

- Triple vector product

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

1.6 Gradient

اگر $\varphi(x, y, z)$ یک اسکالر نقطه‌ای باشد، $\varphi'(x', y', z') = \varphi(x, y, z)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_i} = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x'_i} \stackrel{\text{تبدیل زنجیره‌ای}}{=} \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}}_{a_{ij}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\vec{A}'_i = \sum_j a_{ij} A_j \quad (3) \quad \text{برای بردار } \vec{A} \text{ داریم}$$

مشتقات $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ همواره مولفه‌های یک بردار عملی‌کنند. $(2), (3) \Rightarrow$

این بردار دارای مولفه‌های زیر است: $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$

$$\text{خود بردار } \vec{\nabla} \varphi \equiv \hat{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

nabla
del

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Example 1.6.1

$$f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \Rightarrow \vec{\nabla} f(r) = \hat{i} \frac{\partial f(r)}{\partial x} +$$

$$\hat{j} \frac{\partial f(r)}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f(r)}{\partial z}$$

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -- ① -- تدریس ریاضی

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i$$

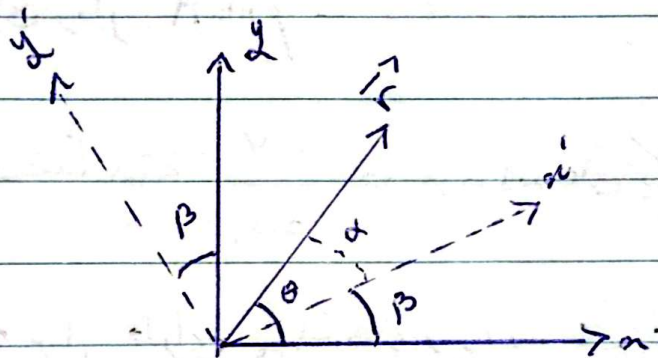
$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i$$

$$A_x = A \cos \theta, \quad A_y = A \sin \theta$$

$$|\vec{A}|^2 = A^2 = \sum_{i=1}^3 A_i A_i = A_x A_x + A_y A_y = A_x^2 + A_y^2$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad A' = \sqrt{A_x'^2 + A_y'^2}$$

انرژی بردار با تغییر دستگاه
نباید تغییر کند



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\theta = \alpha + \beta \rightarrow \alpha = \theta - \beta$$

$$x' = r \cos \alpha = r \cos \theta - \beta = \underbrace{r \cos \theta}_{x} \cos \beta + \underbrace{r \sin \theta}_{y} \sin \beta$$

$$y' = r \sin \alpha = r \sin \theta - \beta = \underbrace{r \sin \theta}_{y} \cos \beta - \underbrace{r \cos \theta}_{x} \sin \beta$$

مختصات در دستگاه

جدید

$$\begin{cases} x' = x \cos \beta + y \sin \beta \\ y' = -x \sin \beta + y \cos \beta \end{cases}$$

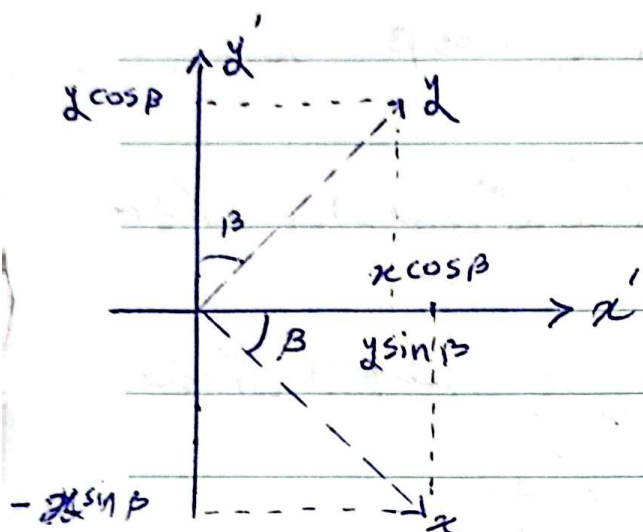
Date: / /

Sat Sun Mon Tue Thu Wed Fri

Subject:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مختصات جدید به صورت ماتریسی



به دست آوردن روابط به صورت هندسی

$$x' = x \cos \beta + y \sin \beta$$

$$y' = -x \sin \beta + y \cos \beta$$

تقسیم به N برد

$$x \rightarrow x_1$$

$$y \rightarrow x_2$$

$$x' \rightarrow x'_1$$

$$y' \rightarrow x'_2$$

$$x'_1 = \sum_{j=1}^r a_{1j} x_j$$

$$x'_r = \sum_{j=1}^r a_{rj} x_j$$

$$\Rightarrow x'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j$$

$i = 1, 2, \dots, N$

با رابطه بالا اندازه بردار در راستای محور x'_i (جدید) به صورت همگی از جهات

$$a_{ij} = \cos(\alpha'_i, x_j)$$

شامل کسینوس های هادی تعیین می شود.

از به صورت ایندکس آزاد (دلفراخ) انتخاب می شود و روی زهای مترالی

جمع بسته می شود.

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

$$x'_1 = \sum_{j=1}^2 a_{1j} x_j = x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta = x_1 a_{11} + x_2 a_{12}$$

$$x'_2 = \sum_{j=1}^2 a_{2j} x_j = -x_1 \sin \beta + x_2 \cos \beta = x_1 a_{21} + x_2 a_{22}$$

حال که بردار را به صورتی تعریف کردیم که وقتی آن را به دستگاه جدید منتقل کنیم مولفه

های آن از رابطه $x'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j$ به دست می آید، می توانیم شرط

$\underbrace{a_{ij}}_{\text{مولفه } i \text{ ام در دستگاه جدید}} = \underbrace{a_{ij}}_{\text{مولفه } j \text{ ام در دستگاه قدیم}}$

برقرار بودن را

با استفاده از این تعریف تعیین کنیم. اگر عبارت مورد نظر در دستگاه جدید برابر با مولفه های

بالا به دست آید، عبارت یک بردار است. $\otimes$

$$\begin{cases} A'_x = A_x \cos \beta + A_y \sin \beta \\ A'_y = -A_x \sin \beta + A_y \cos \beta \end{cases}$$

مثال: بردار بودن A را بررسی می کنیم:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = -y \hat{i} + x \hat{j}$$

$$\begin{cases} A_x = -y \\ A_y = x \end{cases}$$

$$\vec{A}' = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A'_x = -y' = -(-\sin \beta x + \cos \beta y) \\ A'_y = x' = x \cos \beta + y \sin \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A'_x = \sin \beta x - \cos \beta y = A_y \sin \beta + A_x \cos \beta = -y' \\ A'_y = y' = x \cos \beta + y \sin \beta = A_y \cos \beta - A_x \sin \beta \end{cases}$$

چون به رابطه (*) رسیدیم پس $\vec{A}$ یک بردار است.

مثال: بردار بودن A را بررسی می‌کنیم:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = -x \hat{i} + y \hat{j} = \begin{cases} A_x = -x \\ A_y = y \end{cases}$$

$$\vec{A}' = A'_x \hat{i} + A'_y \hat{j} = \begin{cases} A'_x = -x' \\ A'_y = y' \end{cases}$$

$$A'_x = - (x \cos \beta + y \sin \beta) = -x \cos \beta - y \sin \beta$$

$$= A_x \cos \beta - A_y \sin \beta$$

باید مثبت می‌بود

$$A'_y = y' = -x \sin \beta + y \cos \beta = A_x \sin \beta + A_y \cos \beta$$

باید منفی می‌بود

پس از رابطه (*) پیروی نمی‌کند بردار نیست.

$$\delta_{ij} = \frac{dx_i}{dx_j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

ضرب داخلی

$$\vec{A} = \sum_i A_i \hat{e}_i, \quad \vec{B} = \sum_j B_j \hat{e}_j$$

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = \sum_i A_i \hat{e}_i \cdot \sum_j A_j \hat{e}_j = A_i A_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) \\ \Rightarrow \sum_i A_i \sum_j A_j \delta_{ij} = \sum_i A_i A_i = A_i A_i = A^2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(\sum_i A_i \hat{e}_i \right) \left(\sum_j B_j \hat{e}_j \right) = \sum_{i,j} A_i B_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) \\ = A_i B_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = A_i B_j \cos(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$$

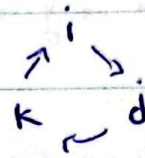
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\sum_{j=1}^4 A_j \delta_{rj} = \underbrace{A_1 \delta_{r1}}_0 + \underbrace{A_r \delta_{rr}}_1 + \underbrace{A_r \delta_{rr}}_1 + \underbrace{A_r \delta_{rr}}_0$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(\sum_n A_n \hat{e}_n \right) \times \left(\sum_m B_m \hat{e}_m \right) = \sum_{n,m} A_n B_m (\hat{e}_n \times \hat{e}_m)$$

$$\hat{e}_n \times \hat{e}_m = \sum_l \epsilon_{nm\ell} \hat{e}_\ell$$

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kji} = 1$$



$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = \cancel{\epsilon_{i j i} \hat{e}_i} + \cancel{\hat{e}_j \epsilon_{j i j}} + \epsilon_{i j k} \hat{e}_k$$

پایان جلسه اول تدریس ریاضی

تعبیر هندسی گرادیان

$$\varphi(x, y, z) = C$$

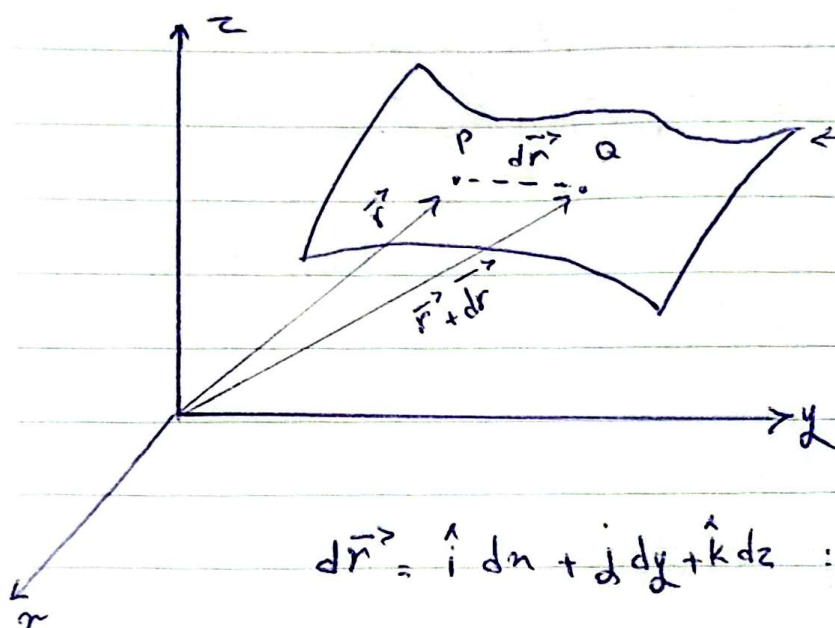
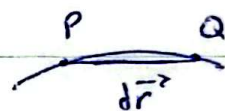
یک رویه در فضای ۳ بعدی

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = C > 0$$

یک کره به شعاع $\sqrt{C}$

$$\varphi(x, y, z) = x + 2y + 3z = C$$

یک صفحه



اگر Q خیلی نزدیک به P باشد

$$d\vec{r} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz : \text{در نقطه P مماس بر سطح می شود}$$

$$\vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi(x, y, z)$$

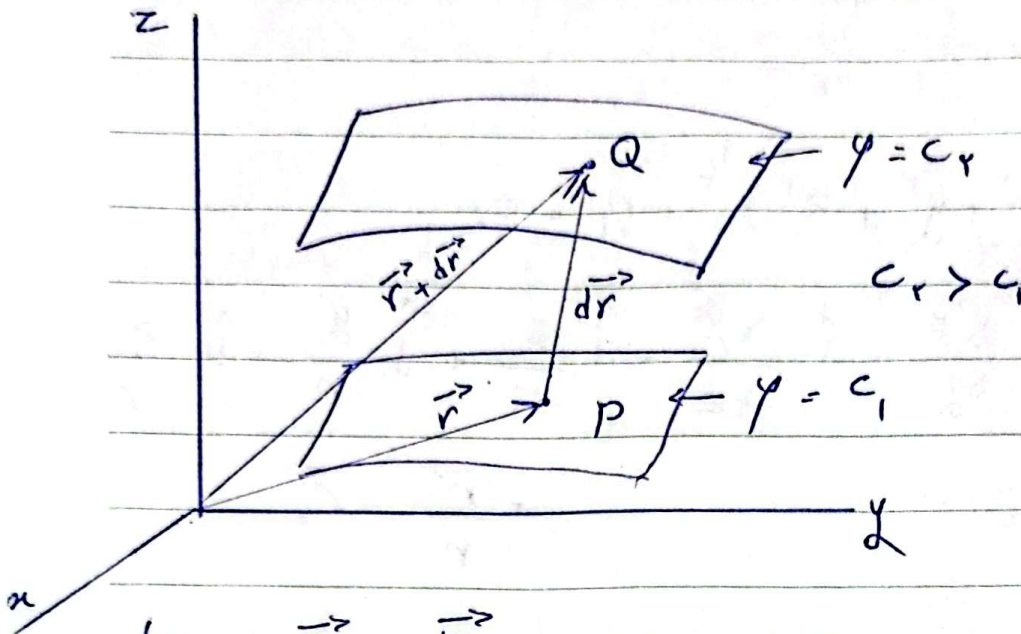
$$\varphi = C \Rightarrow \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = 0 = \varphi(Q) - \varphi(P) \Rightarrow \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\vec{\nabla} \varphi \perp d\vec{r}$$

اکنون Q را نزدیک P با فاصله $d\vec{r}$ بگیریم. $d\varphi = \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \varphi \perp d\vec{r} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \varphi \perp d\vec{r} \\ \vec{\nabla} \varphi \perp d\vec{r} \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla} \varphi \perp (\text{سطح } \varphi = C)$$

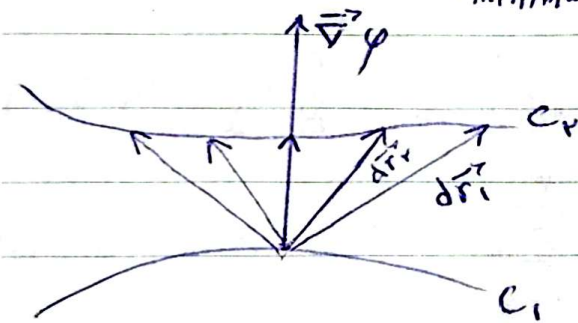
لذا راستای $\vec{\nabla} \varphi$ عمود بر سطح $\varphi = C$ است.



$$d\varphi = \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(Q) - \varphi(P) = c_2 - c_1 = \Delta c$$

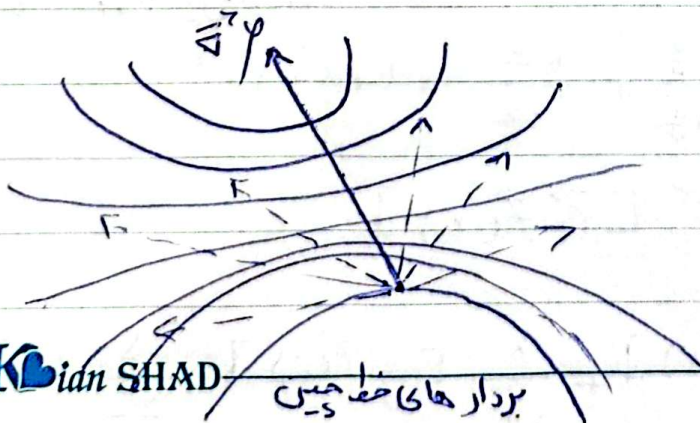
$$\Rightarrow \Delta c = |\vec{\nabla} \varphi| |d\vec{r}| \cos \theta \Rightarrow |d\vec{r}| = \frac{\Delta c}{|\vec{\nabla} \varphi| \cos \theta}$$

$$\cos \theta = 1 \Rightarrow (d\vec{r})_{\text{minimum}} \Rightarrow \theta = 0$$



$$(\Delta c)_{\text{min}} = |\vec{\nabla} \varphi| |d\vec{r}|_{\text{min}}$$

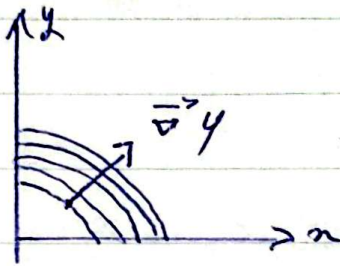
$\vec{\nabla} \varphi$ در جهت ماکزیم تغییرات
نیای φ است.



Example 1.6.2

$$\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r = c$$

$$\vec{\nabla} \phi = \hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \hat{i} \frac{x}{r} + \hat{j} \frac{y}{r} + \hat{k} \frac{z}{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{r}_0$$

1.7 Divergence $\vec{\nabla} \cdot$

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} V_x + \hat{j} V_y + \hat{k} V_z \right)$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \quad \text{این یک اسکالر است}$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{این یک عملگر اسکالر است}$$

و با $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ یکی نیست

$$\vec{V} = \vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\vec{V} = \vec{r} f(r) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot [\vec{r} f(r)]$$

$$\text{Kian SHAD} = \frac{\partial}{\partial x} [x f(r)] + \frac{\partial}{\partial y} [y f(r)] + \frac{\partial}{\partial z} [z f(r)]$$

$$= 3f(r) + \left\{ x \frac{\partial f(r)}{\partial x} + y \frac{\partial f(r)}{\partial y} + z \frac{\partial f(r)}{\partial z} \right\} = \vec{r} \cdot \vec{\nabla} f$$

$$\begin{aligned}
 &= r f(r) + x \underbrace{\frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x}}_{\frac{x}{r}} + y \underbrace{\frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y}}_{\frac{y}{r}} + z \underbrace{\frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial z}}_{\frac{z}{r}} \\
 &= r f(r) + \frac{df}{dr} \left[\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} \right] = r f(r) + r \frac{df(r)}{dr}
 \end{aligned}$$

تعبیر فیزیکی Divergence

یک سیال تراکم پذیر با دانیسته $\rho(x, y, z, t)$ در زمان t در نقطه x, y, z

سرعت عبور $\vec{V}(x, y, z, t)$ است. در نتیجه رابطه زیر را داریم:

معادله پیوستگی (اثبات حذف) $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

در هر زمانی $\vec{V}$ نیز کاهش دانیسته در واحد زمان $\Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V})$

$x^0 \equiv ct, \quad V^0 \equiv c \Rightarrow 0 = \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$= \frac{\partial (\rho V^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial (\rho V^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial (\rho V^3)}{\partial x^3} + \frac{\partial (\rho V^0)}{\partial x^0}$$

$$0 = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial (\rho V^\mu)}{\partial x^\mu}$$

1.8 curl $\nabla \times$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\hat{i} V_x + \hat{j} V_y + \hat{k} V_z)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{بر حسب سطر اول بسط} \\ \text{داده و مشتقات طرف} \\ \text{حسب با شش} \end{array}$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \hat{j} (\dots) + \hat{k} (\dots) \quad \text{این یک بردار است}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = \text{این یک عملگر برداری است}$$

$$\vec{\nabla} \times \left\{ f(x, y, z) \vec{V}(x, y, z) \right\} \Big|_n$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \{ f V_z \} - \frac{\partial}{\partial x} \{ f V_y \} = \frac{\partial f}{\partial y} V_z + f \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} V_y - f \frac{\partial V_y}{\partial x}$$

$$= f \left[\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial y} V_z - \frac{\partial f}{\partial x} V_y \right] - f \frac{\partial V_y}{\partial z}$$

$$= f (\nabla \times \vec{V}) \Big|_n + \{ \vec{\nabla} f \times \vec{V} \} \Big|_n \Rightarrow \vec{\nabla} \times (f \vec{V})$$

$$= (\vec{\nabla} f \times \vec{V} + f \vec{\nabla} \times \vec{V})$$

فایده لایبسنیز برای کرل نیز برقرار است.

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \{ f(x, y, z) \vec{V}(x, y, z) \} &= \frac{\partial (f V_x)}{\partial x} + \frac{\partial (f V_y)}{\partial y} + \frac{\partial (f V_z)}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x} V_x + f \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} V_y + f \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} V_z + f \frac{\partial V_z}{\partial z} \\
 &= f \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{V}
 \end{aligned}$$

با استفاده از این فرمول برای دیرورتاش نیز برقرار است.

* $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ is solenoidal است میدان سولنوئیدی

* $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{V}$ is irrotational است غیر چرخشی

Example 1.8.1

$$\vec{\nabla} \times [\vec{r} f(r)] \Big|_x = \frac{\partial}{\partial y} [z f(r)] - \frac{\partial}{\partial z} [y f(r)]$$

$$= z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z} = z \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{r} f(r) = \vec{V} \text{ غیر چرخشی}$$

پتانسیل های گرانشی-الکتریکی

$$V_G = -\frac{GM}{r}$$

$$V_{es} = -k_c \frac{Q}{r}$$

$$\vec{F}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{r}$$

$$\vec{F}_{es} = k \frac{qQ}{r^2} \vec{r}$$

Kian SHAD $\vec{V} = \frac{c}{\beta} \vec{r} \Rightarrow f(r) = \frac{c}{r^2} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$

تعبیر فیزیکی curl خد است.

$$\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B})}_{\vec{\nabla}_B (\vec{A} \cdot \vec{B})} - \underbrace{\vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})}_{(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B}}$$

این یک بردار است

همون این سمت مشتق فقط روی

 $\vec{B}$ گرفته می شود، سمت راستهم باید مشتق فقط روی $\vec{B}$ باشد

$$\vec{\nabla}_B (\vec{A} \cdot \vec{B}) \Big|_n = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_B (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \quad \text{نکته:}$$

$$\text{باز نویسی خط اول} \quad \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}_B (\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B}$$

$$\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}_A (\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

1.9 successive application of ∇

1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi$

2) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi$

3) $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})$

4) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{r})$

5) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{r})$

$$1. \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi \equiv \text{Laplacian of } \phi$$

لابلاسيان تابع ϕ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

اگر ϕ پتانسیل الکترواستاتیکی باشد $\nabla^2 \phi = 0$

Example 1.9.1

$\nabla^2 g(r) = ?$

En 1.7.2 $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} f(r)) = r f''(r)$

$$, \vec{\nabla} f(r) = \vec{r} \frac{df}{dr} + r \frac{df}{dr}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} g(r) = \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{r} \frac{dg(r)}{dr} \right] = \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{r} \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} \right]$$

$$= \frac{r}{r} \frac{dg}{dr} + r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{dg}{dr} \right] = \frac{r}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$2: \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) - \hat{j} (\dots) + \hat{k} (\dots)$$

$$= 0 = \vec{\nabla} \varphi = \text{غیر چرخشی}$$

$$(n_1, n_2, \dots, n_n)$$

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$4: \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{solenoidal}$$

$$3: \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \text{ گرادینان از اسکالر}$$

$$5: \underbrace{\vec{\nabla}}_a \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{V})}_c = \underbrace{\vec{\nabla}}_b \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})}_{\substack{\text{لج گرادینان از اسکالر} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V}}} \stackrel{\text{همچنین}}{=} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{\nabla}^2 \vec{V}$$

$$= \nabla^2 (\hat{i} V_x + \hat{j} V_y + \hat{k} V_z) = \hat{i} \nabla^2 V_x(x, y, z)$$

$$+ \hat{j} \nabla^2 V_y(x, y, z)$$

$$+ \hat{k} \nabla^2 V_z(x, y, z)$$

V_x و V_y و V_z اسکالر هستند که از آنها لاپلاس گرفته می شود.

En 1.9.2 Electromagnetit wave equation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1)$$

توازی ماکسول

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$(3), \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \xrightarrow{(4)} \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Kian SHAD

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

ماده موج

وجود $\frac{1}{c^2}$ نشان می دهد که سرعت انتشار میدان الکتریکی در خلأ c است.

D'Alembertian $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\square \vec{E} = 0$

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

D'Alembertian in the (m, n) dimensional space-time
 یک بُعد افضا کنی، یک بُعد زمان
 بُعد اینبری افضای سه

$$\square = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial t_j^2} \quad (\text{space time})$$

1.10 Vector integration

- انتگرال های خطی، سطحی و حجمی

- Linear integrals

$$\int_C \varphi(x, y, z) d\vec{r}, \int_C \vec{V}(x, y, z) \cdot d\vec{r}, \int_C \vec{V}(x, y, z) \times d\vec{r}$$

C یک منحنی در فضای xyz است و ممکن است باز یا بسته باشد.

$$\int_C \varphi d\vec{r} = \hat{i} \int_C \varphi(x, y, z) dx + \hat{j} \int_C \varphi(x, y, z) dy + \hat{k} \int_C \varphi(x, y, z) dz$$

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

پیرمسیر C (مسیر انتگرال گیری) داده شده باشد تا انتگرال اول تابعی از x

دوی تابعی از y و سری تابعی از z شود. ثابت گرفتن متغیرهایی که انتگرال

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

اگر $\vec{F}$ نیرو باشد این فرمول کار است

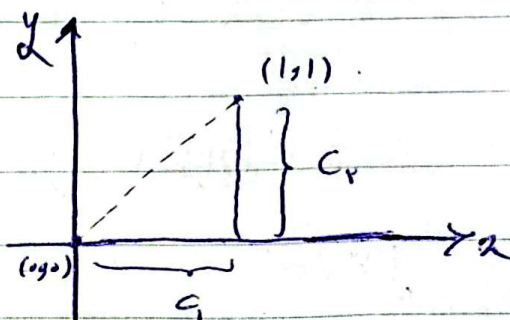
$$= \int_C F_x(x, y, z) dx + \int_C F_y(x, y, z) dy + \int_C F_z(x, y, z) dz$$

Example 1. 10. 1

$$\vec{F} = -\hat{i}y + \hat{j}x \quad , \quad d\vec{r} = \hat{i} dx + \hat{j} dy$$

$$(0, 0) \rightarrow (1, 1)$$

$$W = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (-y dx + x dy)$$



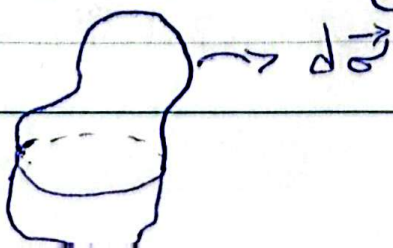
$$W = \int_{C_1} (-y dx + x dy) + \int_{C_r} (-y dx + x dy)$$

$$= \int_{C_1} (-0 dx + x dx) + \int_{C_r} (-1 dx + 1 dy) = \int_0^1 dy = 1$$

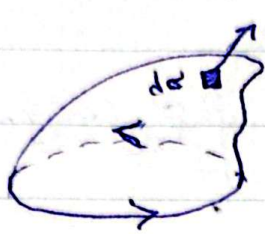
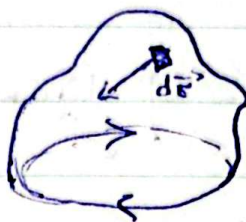
- surface integrals

$$\int_S \phi(x, y, z) d\vec{\sigma}, \quad \int_S \vec{V}(x, y, z) \cdot d\vec{\sigma}, \quad \int_S \vec{V}(x, y, z) \times d\vec{\sigma}$$

اگر سطح بسته باشد $d\vec{\sigma}$ عمود بر سطح و به طرف بیرون سطح است



اگر سطح باز باشد جهت $d\vec{s}$ از طریق جهت منفی ریزی با دست راست مشخص می شود.



$$\int_V \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

فلوی است که به واسطه میان برداری $\vec{V}$ از سطح عبوری کند

- Volume integral

$$\tau = \tan$$

$$\int_V \psi(x, y, z) d\tau, \quad \int_V \vec{W}(x, y, z) d\tau$$

$$d\tau = dx dy dz$$

- تعاریف گرادیان، دیفرانسیل و کول به صورت انتگرالی

$$\textcircled{1} \vec{\nabla} \psi = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \psi d\vec{s}}{\int d\tau}$$

$$\textcircled{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \vec{V} \cdot d\vec{s}}{\int d\tau}$$

$$\textcircled{3} \vec{\nabla} \times \vec{V} = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int d\vec{s} \times \vec{V}}{\int d\tau}$$

که در آنها $d\tau$ خود یک المان جمع است.

$$\int d\tau = \int_{x_0}^{x_0+dx} \int_{y_0}^{y_0+dy} \int_{z_0}^{z_0+dz} dz = dx dy dz$$

$$\vec{A} = \sum_i A_i \hat{e}_i, \quad \vec{B} = \sum_j B_j \hat{e}_j, \quad \vec{C} = \sum_k C_k \hat{e}_k$$

یعنی $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B_i = g_{ij} A^i B^j = g^{ij} A_i B_j$

و نیز $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\mu B_\mu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = \sum_i A_i B_i$$

$\begin{matrix} \nearrow i \\ \nwarrow j \end{matrix} \quad \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n}, \quad \hat{n} \perp \vec{A}, \quad \hat{n} \perp \vec{B}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_i \sum_j A_i \hat{e}_i \times B_j \hat{e}_j = \sum_{i,j} A_i B_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) = A_i B_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j)$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \rightarrow \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

$$= \epsilon_{121} \hat{e}_1 + \epsilon_{122} \hat{e}_2 + \epsilon_{123} \hat{e}_3$$

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{jik} = 1$$

$$\epsilon_{ijk} \Rightarrow i=j \Rightarrow 0$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \epsilon_{123} = 1, \epsilon_{231} = 1, \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{132} = -1, \epsilon_{213} = -1, \epsilon_{321} = -1 \end{cases}$$

$$\epsilon_{112} = \epsilon_{121} = \epsilon_{212} = \dots = 0$$

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

Date:

Subject:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \Rightarrow$$

$$= \sum_i A_i \hat{e}_i \times \left(\sum_j B_j \hat{e}_j \times \sum_k C_k \hat{e}_k \right)$$

$$= \sum_{i,j,k} A_i B_j C_k \hat{e}_i \times (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)$$

$$= \sum_{i,j,k,l} A_i B_j C_k \hat{e}_i \times \epsilon_{jkl} \hat{e}_l = \sum_{jkl} \epsilon_{jkl} A_i B_j C_k (\hat{e}_i \times \hat{e}_l)$$

$$= \sum A_i B_j C_k \epsilon_{jkl} \sum_m \epsilon_{ilm} \hat{e}_m$$

$$= \sum_{i,j,k,l,m} A_i B_j C_k \epsilon_{jkl} \underbrace{\epsilon_{ilm}}_{-\epsilon_{lim}} \hat{e}_m = - \sum A_i B_j C_k \epsilon_{jkl} \epsilon_{lim} \hat{e}_m$$

$$+ \sum_l \epsilon_{jkl} \epsilon_{lim} = \delta_{ji} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ki}$$

$$= \sum_{i,j,k,m} A_i B_j C_k \hat{e}_m (\delta_{jm} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{km})$$

$$= \sum_{i,j,k,m} A_i B_j C_k \hat{e}_m \delta_{jm} \delta_{ki} - \sum_{i,j,k,m} A_i B_j C_k \hat{e}_m \delta_{ji} \delta_{km}$$

$$= \sum_{j,k} A_k B_j C_k \hat{e}_j - \sum_{j,k} A_j B_j C_k \hat{e}_k$$

$$= \left(\sum_k A_k C_k \right) \left(\sum_j B_j \hat{e}_j \right) - \left(\sum_j A_j B_j \right) \left(\sum_k C_k \hat{e}_k \right)$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

K[♥]ian SHAD

$$= \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i,j,k=1}^3 A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k =$$

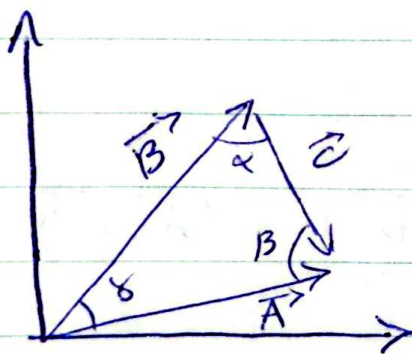
$$\sum_{k=1}^3 (A_1 B_2 \epsilon_{12k} \hat{e}_k + A_1 B_3 \epsilon_{13k} \hat{e}_k + A_2 B_1 \epsilon_{21k} \hat{e}_k + A_2 B_3 \epsilon_{23k} \hat{e}_k + A_3 B_1 \epsilon_{31k} \hat{e}_k + A_3 B_2 \epsilon_{32k} \hat{e}_k)$$

$$\Rightarrow (A_1 B_2 \epsilon_{123} \hat{e}_3 + A_1 B_3 \epsilon_{132} \hat{e}_2 + A_2 B_1 \epsilon_{213} \hat{e}_3 + A_2 B_3 \epsilon_{231} \hat{e}_1 + A_3 B_1 \epsilon_{312} \hat{e}_2 + A_3 B_2 \epsilon_{321} \hat{e}_1)$$

$$= (A_2 B_3 - A_3 B_2) \hat{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \hat{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{k}$$

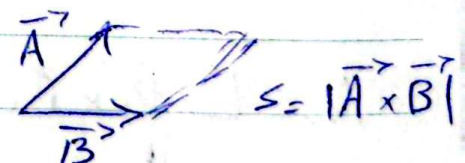
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = \sum_{j,k=1}^3 (A_1 B_j \epsilon_{1jk} \hat{e}_k +$$

$$A_2 B_j \epsilon_{2jk} \hat{e}_k + A_3 B_j \epsilon_{3jk} \hat{e}_k)$$

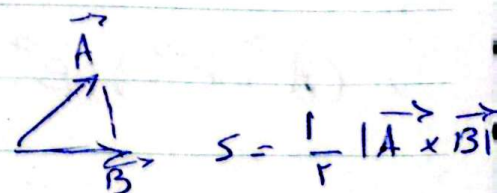


$$\frac{\sin \alpha}{A} = \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \gamma}{C}$$

$$S_1 = \frac{1}{r} |\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{r} AB \sin \gamma$$



$$S_2 = \frac{1}{r} |\vec{B} \times \vec{C}| = \frac{1}{r} BC \sin \alpha$$



$$S_3 = \frac{1}{r} |\vec{A} \times \vec{C}| = \frac{1}{r} AC \sin \beta$$

Kian SHAD

$$S_1 = S_2 = S_3 \Rightarrow \frac{1}{r} ABC$$

$$\frac{\sin \gamma}{C} = \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \alpha}{A}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

به ازای تغییر هر سطر، یک منفی در دترمینان ضرب می شود. پس دو سطر را تغییر می دهیم.

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

جای ۰ را با $\times$ عوض می کنیم

$$\vec{A} \cdot [\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B})] = \vec{A} \cdot [\vec{A} (\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{A})]$$

سین $bac - cab$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{A}) (\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$= A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

$$A \cdot B = B \cdot A \quad 1, 2, 5, 1$$

$$A \times B = -B \times A$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$\vec{A} \cdot [\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})] = \vec{A} \cdot [\vec{C} (\vec{B} \cdot \vec{D}) - \vec{D} (\vec{B} \cdot \vec{C})]$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

1. 3. 5. 1

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{D}) \vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}) \vec{D}$$

$$= [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D})] \vec{C} - [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})] \vec{D} =$$

$$\vec{C} (\vec{B} \cdot \vec{D}) - \vec{D} (\vec{B} \cdot \vec{C}) = \vec{C} [(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{D}] - \vec{D} [(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}]$$

بردار $\vec{\nabla} f(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k})$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{بردار } \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b}$$

$$= \sum_i \delta_i (\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_i \delta_i \sum_{j,k} a_j b_k \epsilon_{ijk} \Rightarrow$$

$$= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \delta_i (a_j b_k)$$

$$= \sum_{i,j,k} \epsilon_{i,j,k} \delta_i (a_j) b_k + \sum_{i,j,k} \underbrace{\epsilon_{ijk} a_j}_{-\epsilon_{jik}} \delta_i (b_k)$$

$$= \sum_k b_k \underbrace{\sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \delta_i a_j}_{(\vec{\nabla} \times \vec{a})_k} - \sum_j a_j \underbrace{\sum_{i,k} \epsilon_{jik} \delta_i b_k}_{(\vec{\nabla} \times \vec{b})_j}$$

$$= \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

11. A.1

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

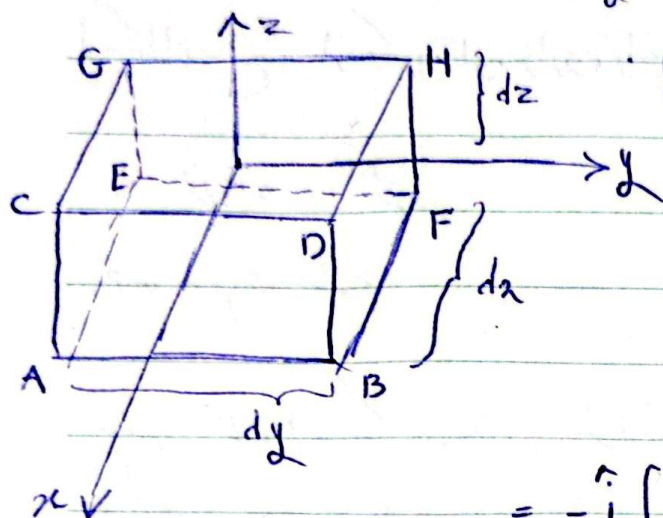
$$= (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B}$$

$$= (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

$$* (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} = x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$$

هم $\int dz$ دیر است .

$$\vec{\nabla} \varphi = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \varphi d\vec{\tau}}{\int d\tau} \quad \int d\tau \rightarrow dxdydz$$



مبدأ منتسبات را روی مرکز مکعب قرار می دهیم .

$$\int_{EFGH} \varphi d\vec{\sigma} = \int_{EFGH} \varphi \left(-\frac{dx}{r}, y, z \right) (\hat{i} dy dz)$$

$$= -\hat{i} \int \left[\varphi(0, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(-\frac{dx}{r} \right) \right] dy dz$$

$$\int_{ABCD} \varphi d\vec{\sigma} = \int_{ABCD} \varphi \left(\frac{dx}{r}, y, z \right) (\hat{i} dy dz) =$$

$$\hat{i} \int \left[\varphi(0, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{dx}{r} \right) \right] dy dz$$

$$\int_{ABCD + EFGH} \varphi d\vec{\sigma} = \hat{i} \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz = \hat{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz$$

برای باری وجه ها هم همینطور بدست می آید

برون همه چیز دیر است
بود از انتگرال بیرون آمد

$$\int \varphi d\vec{\sigma} = \left[\hat{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] dx dy dz = \vec{\nabla} \varphi d\tau$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \varphi = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \varphi d\vec{\sigma}}{\int d\tau}$$

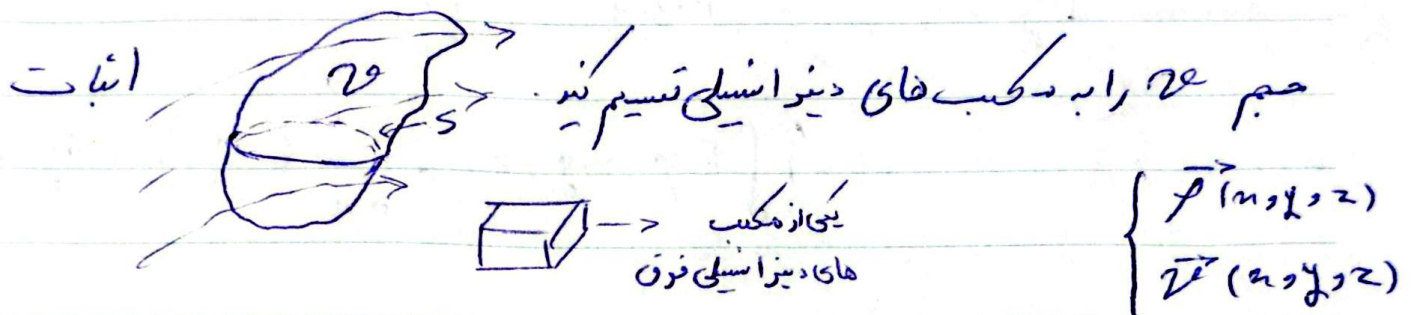
$$\int d\tau = \int_{x_0}^{x_0+dx} dx \int_{y_0}^{y_0+dy} dy \int_{z_0}^{z_0+dz} dz = dx dy dz = d\tau$$

1.11 The Gauss's theorem

انتهال سطح از يك ميدان بزرگي را به انتگرال حجم همان ميدان رها دهد.

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$$

$V \equiv \text{حجم}$
 $S \equiv \text{ميدان بزرگي}$



$$1.61 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) d\tau = \text{مقدار خالص در واحد زمان}$$

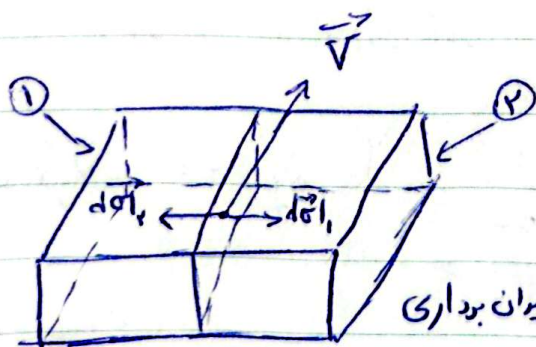
سرعت $\vec{V}$

$$\sum \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau$$

در تمام مکعب ها جمع بزنید
میدان برداری $\vec{V}$

$$\sum \sum \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \sum \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau$$

تمام مکعب ها
هر شش وجه مکعب
تمام مکعب



$$d\vec{\sigma}_1 = -d\vec{\sigma}_2$$

$$\vec{V} \cdot d\vec{\sigma}_1 + \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}_2 = 0$$

میدان برداری

انتهال $\vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$ روی تینده مشترک حذف می شود و شش وجه مکعب جدید 1 و 2

$$\sum \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \sum \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau$$

تمام مکعب ها

$$\oint_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau$$

The Green's theorem

رابطه اسکالر در نظر بگیریم $u(x, y, z)$ و $v(x, y, z)$

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\tau = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{v}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} + f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (u \vec{v}) = \vec{\nabla} u \cdot \vec{v} + u \nabla^2 v & ① \\ \vec{\nabla} \cdot (v \vec{u}) = \vec{\nabla} v \cdot \vec{u} + v \nabla^2 u & ② \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (u \vec{v} - v \vec{u}) = u \nabla^2 v - v \nabla^2 u$$

از طرفین انتگرال میگیریم

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (u \vec{v} - v \vec{u}) d\tau = \int_{\mathcal{V}} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\tau$$

Kian SHAD

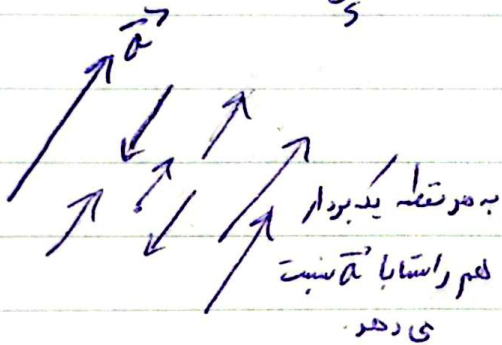
$$\Rightarrow \int_S (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{V}} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\tau$$

$$\textcircled{1} \text{ انتگرال از رابطه } \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} v) d\tau = \int_V (\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u \nabla^2 v) d\tau$$

$$\Rightarrow \oint_S (u \vec{\nabla} v) \cdot d\vec{\sigma} = \int_V (\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u \nabla^2 v) d\tau$$

(فرم دوم قضیه گرین)
- Alternative forms of the Gauss's theorem

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau = \oint_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$$



$$\vec{V}(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \vec{a}$$

که بردار دلخواه است (ثابت)
بعد از انتخاب نیاز تغییر کند.

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \varphi) d\tau = \oint_S \vec{a} \varphi \cdot d\vec{\sigma}$$

$\vec{V} = \varphi \vec{a}$ را در رابطه گاوس قرار دهیم.

$(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \varphi + \vec{a} \cdot \nabla \varphi$

$$\int_V \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \varphi d\tau = \vec{a} \cdot \int_S \varphi d\vec{\sigma} \Rightarrow \vec{a} \cdot \left[\int_V \vec{\nabla} \varphi d\tau - \int_S \varphi d\vec{\sigma} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \varphi d\tau = \int_S \varphi d\vec{\sigma}$$

در رابطه گارس
تواری می دهیم
مالت دوم $\vec{V}(x, y, z) = \vec{a} \times \vec{P}(x, y, z) \rightarrow$
بردار ثابت

$$\int_V \underbrace{\vec{\nabla}}_{A'} \cdot (\underbrace{\vec{a}}_{B'} \times \underbrace{\vec{P}}_{C'}) d\tau = \int_S \underbrace{(\vec{a} \times \vec{P})}_{B' \times C'} \cdot \underbrace{d\vec{\sigma}}_{A'} \Rightarrow$$

تواری می دهیم $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\int_V \vec{a} \cdot [-\vec{\nabla} \times \vec{P}] d\tau = \int_S \vec{a} \cdot (\vec{P} \times d\vec{\sigma})$$

$$-\vec{a} \cdot \left[\int_V \vec{\nabla} \times \vec{P} d\tau - \int_S d\vec{\sigma} \times \vec{P} \right] = 0$$

$$= -\vec{a} \cdot \int_S d\vec{\sigma} \times \vec{P}$$

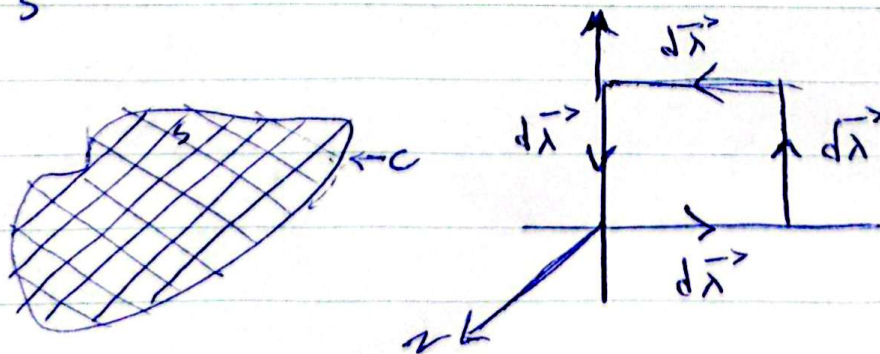
$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{P} d\tau = \int_S d\vec{\sigma} \times \vec{P}$$

1.12 The Stokes's theorem

انتگرال های سطحی و خطی از یک میدان برداری را به هم ربط می دهد.

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{\lambda}$$

$C = \partial S$
C مرز S است



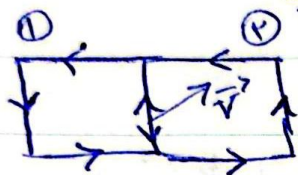
$d\vec{\sigma} = \hat{k} da dy$
به دست راست
نشان می دهیم

sec 1.8

$$\text{حرفش} = (\vec{\nabla} \times \vec{V})_z \, dx \, dy = (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\sum_{\text{برمبارضام مستطیل}} \vec{V} \cdot d\vec{\lambda} = (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\sigma}$$

از تعریف حرفش



در مرز مشترک جهت $d\vec{\lambda}$ ها مخالف
همدیگر هستند.

دو مستطیل مجاور

$$\text{ضلع مشترک} = \vec{V} \cdot d\vec{\lambda} \big|_1 + \vec{V} \cdot d\vec{\lambda} \big|_2 = 0$$

$$\sum_{\text{تمام مستطیلات}} \sum_{\text{برمبارضام مستطیل}} \vec{V} \cdot d\vec{\lambda} = \sum_{\text{تمام مستطیلات}} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\sum_{\text{انواع خارجی}} \vec{V} \cdot d\vec{\lambda} = \sum_{\text{تمام مستطیلات}} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{\lambda} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\int_{S'} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{\lambda} \quad C = \partial S'$$

- Alternative forms of the Stokes's theorem

$$\textcircled{1} \vec{V}(x, y, z) = \underbrace{\vec{a}}_{\text{تایید}} \phi(x, y, z)$$

$$\Rightarrow \int_S \underbrace{[\vec{\nabla} \times (\vec{a} \phi)]}_{\text{تایید}} \cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{a} \phi \cdot d\vec{\lambda}$$

$$\hookrightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \phi + (\vec{\nabla} \phi) \times \vec{a}$$

$$\int_S \underbrace{[(\vec{\nabla} \phi) \times \vec{a}]}_{\text{B}} \cdot \underbrace{d\vec{\sigma}}_{\text{A}} = \vec{a} \cdot \oint_C \phi d\vec{\lambda}$$

$$\vec{a} \cdot \int_S d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla} \phi = \vec{a} \cdot \oint_C \phi d\vec{\lambda} \quad | A \cdot (B \times C) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{a} \cdot \left[\int_S d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla} \phi - \oint_C \phi d\vec{\lambda} \right] = 0 \Rightarrow$$

تایید دلتوا

$$\int_S d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla} \phi = \oint_C \phi d\vec{\lambda} \quad \text{فرم دوم قضیه استوکس}$$

$$\textcircled{2} \vec{V} = \underbrace{\vec{a}}_{\text{تایید}} \times \vec{P}(x, y, z)$$

$$\int_S (d\vec{\sigma} \times \vec{V}) \times \vec{P} = \oint_C d\vec{\lambda} \times \vec{P} \quad \text{تایید کنید}$$

* combination of the Gauss's and Stokes's theorems

$$\text{Gauss: } \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}, \quad S' = \partial V$$

S مرز V است

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{W} \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}) d\tau = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{W}) \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{W}) \cdot d\vec{\sigma} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{W} \cdot d\vec{\lambda} = 0 \quad (1)$$

Stokes's

$$C = \partial S \Rightarrow C = \partial(\partial V) \Rightarrow C = \partial^2 V \quad (2)$$

مرز مرز وجود ندارد و صفر است

$$(1), (2) \Rightarrow \partial^2 V = 0 \Rightarrow \partial^2 \text{ is a nilpotent operator}$$

پوچ توان

عملگر پوچ توان در Homology تریب می شود

1.13 potential theory

scalar potential پتانسیل اسکالر

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \phi \quad (3)$$

اگر نیروی $\vec{F}$ به صورت روبرو نوشته شود

که برای تلبیه با فیزیک

ϕ را پتانسیل اسکالر می گویند

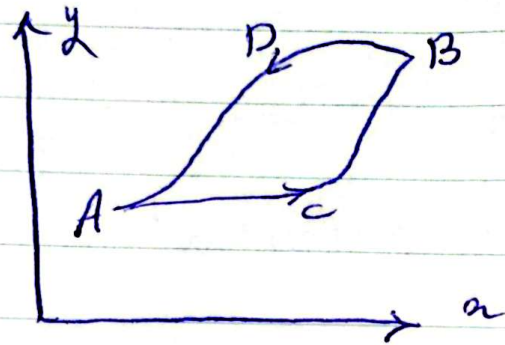
$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \text{غیر چرخشی}$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = -d\varphi$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \oint d\varphi = 0 \quad \text{اگر کرل نیرو صفر باشد}$$

کار نیرو در محیط بسته صفر باشد، پتانسیل اسکالر وجود دارد. در این صورت



$\vec{F}$ conservative (پایدار) می‌گردد

$$W_{ACBDA} = \int_{ACBDA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{BDA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{ACB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{ADB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{ACB} = W_{ADB} \quad \text{کار نیروی پایدار مستقل از مسیر است}$$

بدست آوردن $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$ از فرمول کار:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B d\varphi = \varphi(A) - \varphi(B)$$

بدست آوردن $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ از صفر بودن کار در محیط بسته.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

سطح کم را دینامیک بگیریم:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \text{دلفراهِ است: } d\vec{\sigma}$$

Example 1.13.1 Gravitational potential

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0 = -\frac{k \vec{r}_0}{r^2}, \quad \vec{r}_0 = \hat{r}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{r} f(r)) = 0, \quad f(r) = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} \varphi \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\varphi$$

$$\int_r^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(\infty) - \varphi(r)$$

$$-k \int_r^\infty \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}}{r^2} = -\varphi(r), \quad \varphi(\infty) = 0$$

$$\vec{r}_0 \cdot d\vec{r} = dr \quad d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2r dr$$

$$2 (dr) \vec{r} \Rightarrow \hat{r} dr = dr$$

$$\Rightarrow -k \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

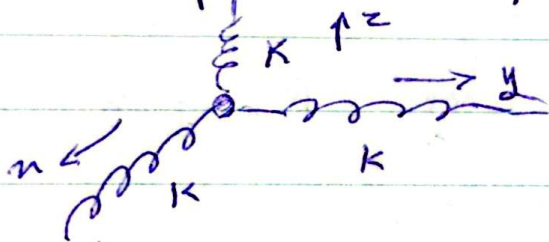
Example 1.13.2 centrifugal potential
گدیز از مرکز

$$\vec{F} = \omega^2 r \vec{r}_0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} \phi \Rightarrow \int_0^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^r d\phi = \phi(0) - \phi(r)$$

$$\omega^2 \int_0^r \underbrace{r \vec{r}_0 \cdot d\vec{r}}_{dr} = -\phi(r) \text{ و } \phi(0) = 0$$

$$\phi(r) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2)$$



$$\phi = -\frac{1}{2} k x^2$$

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{m \omega^2}_{*} x^2$$

تجانبی در بربت به نیروی زیر حساب کنید $\alpha \ll 1$

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1 m_2 \vec{r}_0}{r^2} e^{-\alpha r n}$$

Exact differentials
کاملاً دینامیک

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = d\phi(x, y)$$

تحت چه شرایطی این عبارت دینامیک
کاملاً است.

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

$$\begin{cases} P = \frac{\delta f}{\delta x} \\ Q = \frac{\delta f}{\delta y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \\ \frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} = 0 \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} \Big|_z = \frac{\delta F_y}{\delta x} - \frac{\delta F_x}{\delta y} = 0 \quad (10)$$

د و $\alpha \Leftarrow P$ و Q مولفه های α و β یک میدان غیرمحلی باشد.

تحت چه شرایطی عبارت های زیر دیراسیل کامل هستند؟

$$(1) \int P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

$$(2) \sum_{i=1}^n P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i$$

vector potential

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\delta b_i}{\delta x} = - \left(\frac{\delta b_r}{\delta y} + \frac{\delta b_{rz}}{\delta z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{نشان می دهیم که برای هر $\vec{B}$ داده شده}$$

$$\vec{B} = \hat{i} b_1 + \hat{j} b_r + \hat{k} b_{rz} \quad \text{معمولاً برای $\vec{A}$ وجود دارد.}$$

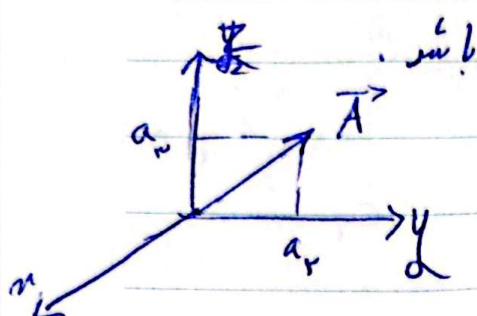
$$\vec{A} = \hat{i} a_1 + \hat{j} a_r + \hat{k} a_{rz}$$

$$b_1 = \frac{\delta a_r}{\delta y} - \frac{\delta a_{rz}}{\delta z} \quad (11)$$

$$b_r = \frac{\delta a_1}{\delta z} - \frac{\delta a_{rz}}{\delta x} \quad (12)$$

$$b_{rz} = \frac{\delta a_r}{\delta x} - \frac{\delta a_1}{\delta y} \quad (13)$$

دستگاه مختصات را انتخاب می‌کنیم که در آن $a_1 = 0$ باشد.



$$a_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_r = -\frac{\partial a_r}{\partial n} \\ b_r = \frac{\partial a_r}{\partial n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_r = -\int_{n_0}^n b_r dn + f_r(y, z) \\ a_r = \int_{n_0}^n b_r dn + f_r(y, z) \end{cases} \quad (F)$$

(F) را در (D) تکرار دهیم

$$b_1(n, y, z) = \left(-\int_{n_0}^n \frac{\partial b_r}{\partial y} dn + \frac{\partial f_r}{\partial y} \right)$$

$$- \left(\int_{n_0}^n \frac{\partial b_r}{\partial z} dn + \frac{\partial f_r}{\partial z} \right)$$

$$= \int_{n_0}^n - \left(\frac{\partial b_r}{\partial y} + \frac{\partial b_r}{\partial z} \right) dn + \left(\frac{\partial f_r}{\partial y} - \frac{\partial f_r}{\partial z} \right)$$

$\frac{\partial b_1}{\partial n}$

$$b_1(n, y, z) = b_1(n, y, z) \Big|_{n_0}^n + \frac{\partial f_r}{\partial y} - \frac{\partial f_r}{\partial z}$$

$$\Rightarrow b_1(n, y, z) = \frac{\partial f_r}{\partial y} - \frac{\partial f_r}{\partial z}$$

و متوجه شدیم متغیرها بیشتر از
مقادیر است در انتخاب یک یا چند

متغیر آزادی عمل داریم. مثلاً با انتخاب $f_r = 0$

$$f_r(y, z) = \int_{y_0}^y b_1(n, y, z) dy$$

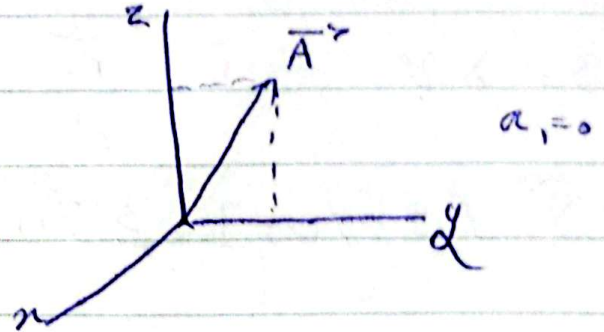
$$\vec{A} = \hat{i} \int_{x_0}^x b_r dx + \hat{k} \left[\int_{y_0}^y b_1(n, y, z) dy - \int_{z_0}^z b_1(n, y, z) dz \right]$$

$$\vec{A} = \hat{i} \int_{x_0}^x b_1(x, y, z) dx + \hat{j} \left[\int_{y_0}^y b_1(x, y, z) dy - \int_{x_0}^x b_2(x, y, z) dx \right]$$

$$\vec{B} = \hat{i} b_1 + \hat{j} b_2 + \hat{k} b_3$$

$$\vec{A} = \hat{i} a_1 + \hat{j} a_2 + \hat{k} a_3$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$



این حل کامل نیست، زیرا به $\vec{A}$ می توان هر $\vec{\nabla} \phi$ اضافه کرد چون که $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0$ است.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

1.14 Gauss's Law, Poisson's equation

$$\vec{E} = \frac{q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- اگر نقطه ای q را در مبدأ مختصات قرار دهیم

$$\oint_{\text{سطح}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{اگر سطح شامل مبدأ (بار) باشد} \\ 0 & \text{اگر سطح شامل مبدأ (بار) نباشد} \end{cases}$$

اثبات: از قضیه گاورس داریم:

$$\oint_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau$$

$$S = \partial V, \quad \vec{V} = \frac{\vec{r}}{r^n} \rightarrow \oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{\sigma}}{r^n} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^n} \right) d\tau \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{r} f(r)] = 3f(r) + r \frac{df}{dr}, \quad f(r) = r^{n-1}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot [\vec{r} r^n] = (n+3) r^{n-1}$$

$$n = -2 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{r}}{r^2} \right] = 0, \quad r \neq 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = 0, \quad \text{و } r \neq 0 \text{ برای موقعی که مبدأ را در بر ندارد}$$

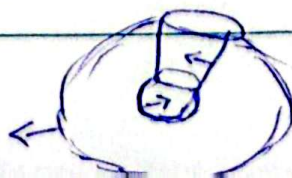
$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

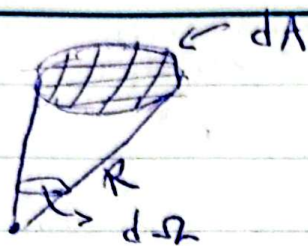
با راجع سطح بسته $S + S' + S_{\text{pipe}}$ است.

بنابراین از قضیه قبل می‌توانیم داریم:

$$\oint_{S+S'+S_{\text{pipe}}} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\int_S + \int_{S'} + \int_{S_{\text{pipe}}} \right) \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$





$$dA = R^2 d\Omega$$

زاویه فضایی

$$4\pi R^2 = R^2 \Omega$$

$$\Omega = 4\pi \text{ استرادیان}$$

ادامه اثبات

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} \Rightarrow 0 \Rightarrow \int_S \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} + \int_S \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = 0$$

$\text{spire} \rightarrow 0$

$$d\vec{\sigma} = -r_0 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \int_S \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = + \int_{\phi'} \frac{r_0 \cdot r_0 \sin\theta d\theta d\phi}{r^2} = \int_S d\Omega = 4\pi$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{اگر } q \text{ مربوط به یک توزیع یکنواخت باشد}$$

$$q = \int_V \rho d\tau \Rightarrow \oint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{قانون گاوس}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \sim \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{اگر } \vec{B} \text{ مستقل از زمان باشد}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

یک بار برای

خارج و

یک بار

برای

داخل

مسئله

محیط

$$\Rightarrow \left[\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \right] \rightarrow \phi$$

معادله پواسون

Kian SHAD

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \phi, \text{ Laplace}$$

خارج ناحیه توزیع بار $\rho = 0$

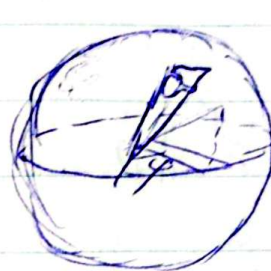
$$\vec{F}_G = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0 \Rightarrow \varphi = - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho_{\text{mass}} \rightarrow \text{چگالی جرم}$$

$$S^1: x_1^2 + x_2^2 = R^2$$



$$S^2: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$


 θ, φ

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$4\pi = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$S^n: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = R^2$$

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$$

$$d\Omega_n = ?$$

Arfken

1.15 & 16 Helmholtz's theorem

A-WC

uniqueness theorem

تئرمین یکتایی

۱- اگر یک ناحیه از فضا، ① کره بردار مشخص باشد.

② دیواره‌اش بردار مشخص باشد

③ در لغز عبودی بردار بر سطح مشخص باشد.

نگاه بردار به مبروت یکتایی می‌شود.

اثبات

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{V}_1 = \vec{C} & \leftarrow \text{معلوم} \quad \text{بدار } V_1 \text{ را در نظر می گیریم} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1 = S & \leftarrow \text{معلوم} \quad \text{از برهان خلف فرض کنیم} \\ V_{1n} = \lambda & \leftarrow \text{معلوم} \quad \vec{V}_1 \text{ هم در شرایط فوق صدق می کند.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{V}_r = \vec{C} & w = \vec{V}_1 - \vec{V}_r \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_r = S & \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \nabla \cdot V_1 - \nabla \cdot V_r = 0 \quad (\alpha) \\ V_{rn} = \lambda & \vec{\nabla} \times \vec{w} = \nabla \times V_1 - \nabla \times V_r = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{w} = -\vec{\nabla} \phi \quad (\beta)$$

$$w_n = V_{1n} - V_{rn} = \lambda - \lambda = 0 \quad (\delta)$$

$$\text{از قضیه گرین} \quad \int_S u \vec{\nabla} v \cdot d\vec{\sigma} = \int_v \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v d\tau + \int_v u \nabla^2 v d\tau$$

$$u = v = \phi \Rightarrow \int_S \underbrace{\phi \vec{\nabla} \phi}_{-\vec{w}} \cdot d\vec{\sigma} = \int_v \underbrace{\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi}_{\vec{w} \cdot \vec{w}} d\tau + \int_v \phi \nabla^2 \phi d\tau$$

$$\Rightarrow - \int \phi \vec{w} \cdot (\hat{n} dA) = \int_v |\vec{w}|^2 d\tau + \int_v \phi \nabla^2 \phi d\tau \quad (\lambda)$$

$$\alpha, \beta \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

$$\Rightarrow - \int \varphi \underbrace{W_n}_{=0} dA = \int_V |\vec{W}|^2 d\tau + 0 \Rightarrow \int_V |\vec{W}|^2 d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \vec{W} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

$$\underbrace{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}_{=0} = 0$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0) \Rightarrow (a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \Leftrightarrow \text{coulomb gauge} \quad \text{تکلیف}$$

$$= A_n$$

The Dirac delta-function

- در یک بعد

$$\begin{cases} \delta(x-a) = 0, & x \neq a \\ \int_{|x-a| < \varepsilon} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx$$

$$= \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) \delta(x-a) dx$$

- در سه بعد

$$\delta(\vec{r} - \vec{a}) = 0, \quad \vec{r} \neq \vec{a}$$

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) d\tau = f(\vec{a})$$

که آن حجم V نقطه $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ را در بر دارد.

یک نرم برای $\delta^{(r)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_r)$

از مثال ۱.۹.۱ داریم :

$$\nabla^r g(r) = \frac{r}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2}$$

$$g(r) = r^n \Rightarrow \nabla^r r^n = n(n+1)r^{n-2}$$

$$n = -1, r \neq 0 \Rightarrow \nabla^r \frac{1}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\int_{V_e} \nabla^r \frac{1}{r} d\tau = \int_{V_e} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} d\tau = - \int_{V_e} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} d\tau$$

$$= - \oint \frac{\vec{r} \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = \begin{cases} -4\pi & \text{اگر کعبه را دربردارد} \\ 0 & \text{اگر کعبه را دربرنبرد} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{V_e} \nabla^r \frac{1}{r} d\tau = 1 \quad (2)$$

که مشاهده می‌رود

از تعریف تابع δ : $f(\vec{r}) = 1$ و $a = 0$

$$\int \delta(\vec{r}) d\tau = 1, \vec{r} \neq 0$$

$$\int_{V_e} \delta(\vec{r}) d\tau = 1 \quad (3)$$

از مقایسه ① و ② با ③ داریم :

$$\delta(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^r \frac{1}{|\vec{r}|}$$

$$\Rightarrow \nabla_1^r \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_r|} = -4\pi \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_r)$$

$$\vec{\nabla}_1 (f(r_1 - r_2)) = -\vec{\nabla}_2 f(r_1 - r_2)$$

Date: $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{C} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0$ Subject:

Proof:

$$\text{وأيضاً: } \vec{C}(\infty) = 0$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = -\nabla^2 \phi = -s(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{C}(\vec{r}) \end{cases}$$

$$\nabla_1^2 \phi(r_1) = \frac{1}{4\pi} \int s(\vec{r}_r) \nabla_1^2 \frac{1}{r_{1r}} d\tau_r$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int s(\vec{r}_r) (-4\pi \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_r)) d\tau_r = -s(\vec{r}_1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\text{فإنه } = -\nabla_1^2 \vec{A}(\vec{r}_1) = -\frac{1}{4\pi} \int C(\vec{r}_r) \nabla_1^2 \frac{1}{r_{1r}} d\tau_r$$

$$= \int \vec{C}(\vec{r}_r) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_r) d\tau_r = \vec{C}(\vec{r}_1) - 4\pi \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1)$$

$$\text{وأيضاً } = \vec{\nabla}_1 (\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{A}(r_1)) = \frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \cdot \left(\frac{\vec{C}(\vec{r}_r)}{r_{1r}} \right) d\tau_r$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla}_1 \cdot (\vec{C}(\vec{r}_r) \cdot \vec{\nabla}_1 \frac{1}{r_{1r}}) d\tau_r$$

$$\textcircled{2} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla}_1 \cdot (\vec{C}(\vec{r}_r) \cdot \vec{\nabla}_r \frac{1}{r_{1r}}) d\tau_r$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}_r) \cdot \vec{\nabla}_r \nabla_1 \frac{1}{r_{1r}} d\tau_r$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}_r) \cdot \vec{\nabla}_r \vec{\nabla}_r \frac{1}{r_{1r}} d\tau_r$$

Date:

Subject:

$$\text{دو جمله } I_n = \frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}_r) \cdot \vec{\nabla}_r \frac{\delta}{\delta n_r} \frac{1}{r_{12}} d\tau_r$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla}_r \cdot \left(\vec{C}(\vec{r}_r) \frac{\delta}{\delta n_r} \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_r -$$

$$\frac{1}{4\pi} \int (\vec{\nabla}_r \cdot \vec{C}(\vec{r}_r)) \frac{\delta}{\delta n_r} \frac{1}{r_{12}} d\tau_r$$

$$\stackrel{\text{کامپوز}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{S \rightarrow \infty} \vec{C}(\vec{r}_r) \cdot \frac{\delta}{\delta n_r} \underbrace{\frac{1}{r_{12}}}_{\frac{1}{r_r}} \underbrace{d\vec{\sigma}_r}_{r_r^2}$$

از عرض = $\vec{C}(\infty)$ $\circ$

2. Coordinate Systems

نسبتهای منحنی

Vector analysis in curved coordinates
and tensors

$$\nabla^2 \psi + K^r \psi = 0$$

دستگاه‌هایی که در این معادله به معادله

دیراکیل معمولی تجزیه می‌شوند مورد نظر هستند.

$$\text{If } K^r = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0 \quad \text{Laplace equation}$$

$$K^r > 0 \Rightarrow \text{Helmholtz eqn.}$$

$$K^r < 0 \Rightarrow \text{Diffusion eqn.}$$

$$K^r \propto \text{potential energy} \Rightarrow \text{Schrödinger eqn.}$$

۷ تا ۸ دستگاه در بهترین‌های کتاب است که یکی از آنها سوال امتحانی است.

2.1. curved linear coordinates

$$q_{h_1}, q_{h_2}, q_{h_3} = \text{نسبتهای}$$

نسبتهای منحنی

$$\begin{cases} q_{h_1} = c_1 \\ q_{h_2} = c_2 \\ q_{h_3} = c_3 \end{cases}$$

از تقاطع سه
 صحنه‌ی زیر،
 دگارتی
 صحنه‌های مختلفات

$$\begin{cases} x = c_1 & \text{ثابت} \\ y = c_2 & \text{ثابت} \\ z = c_3 & \text{ثابت} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$$

نقطه (c و b و a) پیدا می‌شود.

در فضای دوبعدی برای پیدا کردن یک نقطه، خط $x=a$ ، یا $y=b$ یا $z=c$

می‌دهیم تا نقطه مورد نظر پیدا شود.

مختصات = q_{h_1} و q_{h_2} و q_{h_3}
 این سطوح لزوماً عمود بر هم نیستند اما
 دستگاه مختصات دای را مطالعه می‌کنیم که

$$\begin{cases} q_{h_1} = c_1 \\ q_{h_2} = c_2 \\ q_{h_3} = c_3 \end{cases}$$

این سطوح عمود بر هم باشند.

$$\begin{cases} x = x(q_{h_1}, q_{h_2}, q_{h_3}) \\ y = y(q_{h_1}, q_{h_2}, q_{h_3}) \\ z = z(q_{h_1}, q_{h_2}, q_{h_3}) \end{cases}$$

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

$$x_i = x_i(q_{h_1}, q_{h_2}, q_{h_3})$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

$$q_{h_i} = q_{h_i}(x, y, z) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

برای بردار یک دکارتی، $\hat{k}$ را عمود بر $z = 0$ و جهت آن را در جهت افزایش z در نظر گرفته‌ایم.

جهت $\hat{e}_i$ در جهت $\hat{e}_i$ عمود
 افزایش q_i $\Rightarrow$ برابر
 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ثابت $q_i =$

$$\vec{V} = V_1 \hat{e}_1 + V_2 \hat{e}_2 + V_3 \hat{e}_3$$

سه سطح q_1, q_2, q_3 داریم سه بردار $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ را در جهت افزایش آن‌ها و عمود بر سطح‌های q_1, q_2, q_3 در نظر می‌گیریم.

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3) \text{ و } i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_{h_j}} dq_{h_j}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i \text{ (المان طول بین دو نقطه در دستگاه دکارتی)}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left[\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_{h_j}} dq_{h_j} \right) \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_{h_k}} dq_{h_k} \right) \right]$$

$$= \sum_j \sum_k \left[\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_{h_j}} \frac{\partial x_i}{\partial q_{h_k}} \right) dq_{h_j} dq_{h_k} \right]$$

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial x}{\partial q_j} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_j} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_j} \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

$$= g_{kj}$$

g_{ij} = metric or ds^2

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j$$

دستگاه مختصات

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{ij} = 0 \quad i \neq j \\ g_{ir} = g_{ri} = g_{rr} = 0 \\ g_{ii} = h_i^2, \quad i = 1, 2, r \end{array} \right.$$

h_1, h_2, h_r = scale factors
فاکتورهای مقیاس

$$ds^2 = g_{11} (dq_1)^2 + 2g_{1r} dq_1 dq_r + g_{rr} (dq_r)^2$$

$$+ g_{22} (dq_2)^2 + 2g_{2r} dq_2 dq_r + g_{rr} (dq_r)^2$$

نتیجه

$$\underline{\underline{g_{11} (dq_1)^2 + g_{rr} (dq_r)^2 + g_{rr} (dq_r)^2 = \sum_{i=1}^r g_{ii} (dq_i)^2}}$$

$$= (h_1 dq_1)^2 + (h_r dq_r)^2 + (h_r dq_r)^2$$

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^r \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2$$

$$ds_i = h_i dq_i$$

اگر از q_1, q_2, q_3 دو تا ثابت باشد

$$\Rightarrow [h_i dq_i] = d\phi$$

که دیوانسرون

المان انتگرال خطی $c \in c$:

$$\begin{cases} ds^r = dx^r + dy^r + dz^r \\ d\vec{r} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz \end{cases}$$

$$c \in c; \begin{cases} ds^r = (h_1 dq_1)^r + (h_2 dq_2)^r + (h_3 dq_3)^r \\ d\vec{r} = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{e}_3 h_3 dq_3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\vec{v} = \hat{e}_1 v_1 + \hat{e}_2 v_2 + \hat{e}_3 v_3 \quad (2)$$

این عبارت

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int (v_1 h_1 dq_1 + v_2 h_2 dq_2 + v_3 h_3 dq_3) \quad (3)$$

چون انکالر

است و

مستقل از

دستگاه

است

$$\Rightarrow d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i h_i dq_i$$

هرمین را بر $h_i dq_i$ تقسیم کنیم

$$\frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\hat{e}_j h_j}{h_i} \underbrace{\frac{dq_j}{dq_i}}_{\delta_{ij}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\hat{e}_j h_j}{h_i} \delta_{ij} = \hat{e}_i$$

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i} \left[\hat{i} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right]$$

- انتگرال سطحی در c/c متناظر :

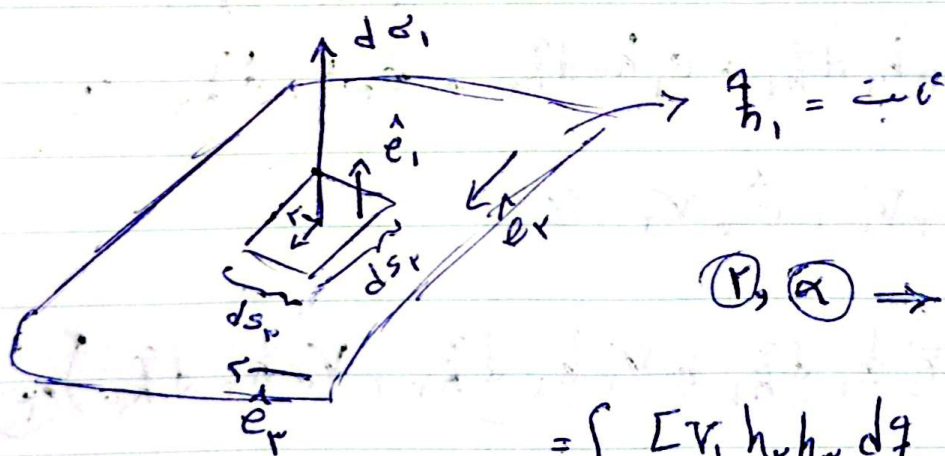
$$d\vec{\sigma}_1 = \hat{e}_1 ds_r ds_\varphi = \hat{e}_1 h_r h_\varphi dq_{h_r} dq_{h_\varphi} \quad \text{مورد } q_{h_1} = \varphi \text{ و موازی } \hat{e}_r \text{ و } \hat{e}_\varphi$$

$$d\vec{\sigma}_r = \hat{e}_r ds_1 ds_\varphi = \hat{e}_r h_1 h_\varphi dq_{h_1} dq_{h_\varphi} \quad \text{مورد } q_{h_r} = \varphi \text{ و موازی } \hat{e}_r \text{ و } \hat{e}_1$$

$$d\vec{\sigma}_\varphi = \hat{e}_\varphi ds_1 ds_r = \hat{e}_\varphi h_1 h_r dq_{h_1} dq_{h_r} \quad \text{مورد } q_{h_\varphi} = \varphi \text{ و موازی } \hat{e}_r \text{ و } \hat{e}_1$$

$$d\vec{\sigma} = d\vec{\sigma}_1 + d\vec{\sigma}_r + d\vec{\sigma}_\varphi$$

$$= \hat{e}_1 h_r h_\varphi dq_{h_r} dq_{h_\varphi} + \hat{e}_r h_1 h_\varphi dq_{h_1} dq_{h_\varphi} + \hat{e}_\varphi h_1 h_r dq_{h_1} dq_{h_r} \quad \textcircled{\alpha}$$



$$\textcircled{\alpha}, \textcircled{\alpha} \Rightarrow \int_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$= \int_S [V_1 h_r h_\varphi dq_{h_r} dq_{h_\varphi} + V_r h_1 h_\varphi dq_{h_1} dq_{h_\varphi} + V_\varphi h_1 h_r dq_{h_1} dq_{h_r}]$$

- انتگرال حجمی از c/c متناظر :

$$d\tau = ds_1 ds_r ds_\varphi = h_1 h_r h_\varphi dq_{h_1} dq_{h_r} dq_{h_\varphi}$$

$$d\tau = \sqrt{|g|} d^3q_h$$

که در آن g متريک است

$$(g) = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_\varphi^2 \end{pmatrix}$$

$$d\tau = \sqrt{|g|} d^3q = \sqrt{h_1^2 h_r^2 h_\varphi^2} dq_1 dq_r dq_\varphi$$

$$= h_1 h_r h_\varphi dq_1 dq_r dq_\varphi$$

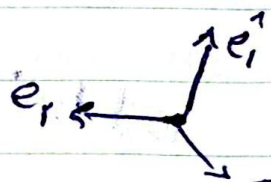
$$\int_V \psi(q_1, q_r, q_\varphi) d\tau = \int_V \psi h_1 h_r h_\varphi dq_1 dq_r dq_\varphi$$

ضرب داخلی در فضای CLC :

$$\begin{cases} \vec{A} = \hat{e}_1 A_1 + \hat{e}_r A_r + \hat{e}_\varphi A_\varphi \\ \vec{B} = \hat{e}_1 B_1 + \hat{e}_r B_r + \hat{e}_\varphi B_\varphi \end{cases}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_r B_r + A_\varphi B_\varphi = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$$

$$\begin{cases} \hat{e}_1 \times \hat{e}_r = \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_1 \\ \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_1 = \hat{e}_r \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{e}_1 \leftarrow \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_r \leftarrow \hat{e}_1 \end{matrix} \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_r & \hat{e}_\varphi \\ A_1 & A_r & A_\varphi \\ B_1 & B_r & B_\varphi \end{vmatrix}$$



2.2 - Differential vector operators $\vec{e}_i$ in CLC

- Gradient : $ds_i = h_i dq_i$, $\psi = \psi(q_1, q_r, q_\varphi)$

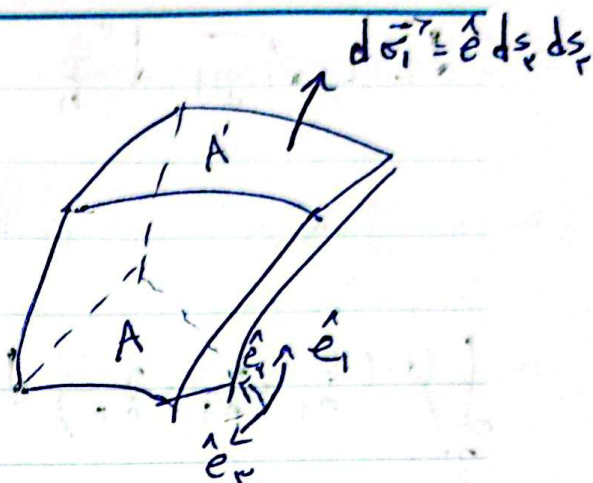
$$\nabla \psi |_i = \frac{\partial \psi}{\partial s_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

$$\nabla \psi = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{e}_i}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} = \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_r}{h_r} \frac{\partial \psi}{\partial q_r} + \frac{\hat{e}_\varphi}{h_\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial q_\varphi}$$

• Divergence:

$$\vec{V} = \vec{V}(q_1, q_2, q_3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}}{\Delta \tau}$$



فلوی خالص از
کرین سطح A و A'

$$= \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} \Big|_{A'} - \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} \Big|_A$$

$$= \left[\vec{V} \cdot d\vec{\sigma} \Big|_A + dq_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (\vec{V} \cdot d\vec{\sigma}) - \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} \Big|_{A'} \right]$$

$$= dq_1 \frac{\partial}{\partial q_1} [V_1 h_2 h_3] dq_2 dq_3 = \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3$$

فلواز هر شش سطح

$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right]$$

$$\underbrace{dq_1 dq_2 dq_3 \times h_1 h_2 h_3}_{d\tau} \times \frac{1}{h_1 h_2 h_3} = \vec{\nabla} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right]$$

$$\vec{V} = V_1 \hat{e}_1 + V_r \hat{e}_r + V_\varphi \hat{e}_\varphi \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \psi = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{e}_r \frac{1}{h_r} \frac{\partial \psi}{\partial q_r} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial q_\varphi} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_r h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_r h_\varphi) + \frac{\partial}{\partial q_r} (V_r h_1 h_\varphi) + \frac{\partial}{\partial q_\varphi} (V_\varphi h_1 h_r) \right] \quad (3)$$

$$\nabla^r \psi = \frac{1}{h_1 h_r h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_r h_\varphi}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_r} \left(\frac{h_1 h_\varphi}{h_r} \frac{\partial \psi}{\partial q_r} \right) + \frac{\partial}{\partial q_\varphi} \left(\frac{h_1 h_r}{h_\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial q_\varphi} \right) \right] \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_r h_\varphi} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_r & \hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_r} & \frac{\partial}{\partial q_\varphi} \\ h_1 V_1 & h_r V_r & h_\varphi V_\varphi \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$h_i^r = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^r + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^r + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^r \quad (6)$$

در مختصات آردون
 $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ حذف است

2.3 special coordinate systems

مختصات کروی مختصات استوانه‌ای مختصات مستطینی

- Rectangular cartesian systems

(مختصات زاویه‌ای)

$$x_i = x_i(q_1, q_r, q_\varphi)$$

$$\begin{cases} x = q_1, & y = q_r, & z = q_\varphi, & \hat{e}_1 = \hat{i}, & \hat{e}_r = \hat{j}, & \hat{e}_\varphi = \hat{k} \\ h_1 = h_x = 1, & h_r = h_y = 1, & h_\varphi = h_z = 1 \end{cases}$$

Kian SHAD

در مختصات استوانه‌ای و کروی (1) - (5) $\nabla \psi$, $\nabla \times \vec{V}$, $\nabla \cdot \vec{V}$, $\nabla^r \psi$

در مختصات مستطینی

استرانه لزوماً سطح مقطع دایره ندارد و می تواند هر سطح مقطعی داشته باشد.

Date:

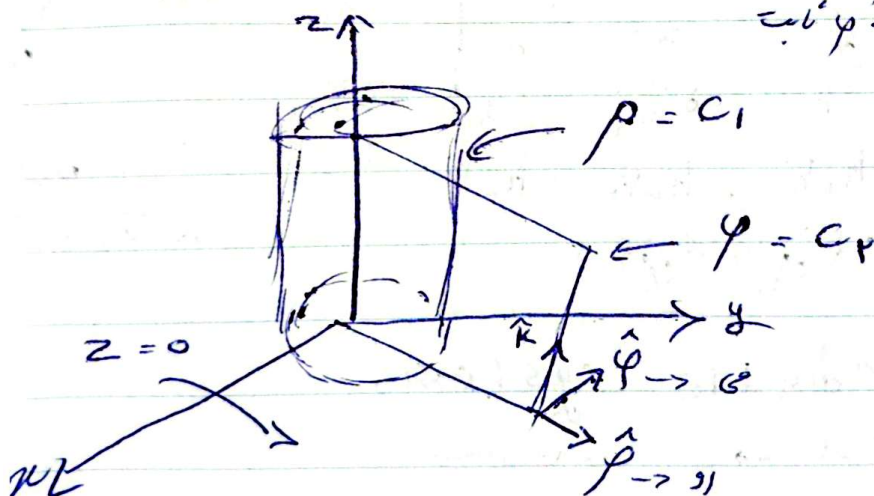
Subject:

2.4 circular cylindrical coordinates

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} h_1 = \rho \\ h_2 = \varphi \\ h_3 = z \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad z = C_3$$

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi \Rightarrow y = x \tan \varphi$$



هر سه سطح مختصات

$$z = C_3, \varphi = C_2, \rho = C_1$$

بر هم عمودند.

$$h_1^2 = h_\rho^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$\begin{cases} h_1 = h_\rho = 1 \\ h_2 = h_\varphi = \rho \\ h_3 = h_z = 1 \end{cases}$$

$$(9) \quad d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 (\hat{e}_i h_i dq_i) = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_r h_r dq_r + \hat{e}_z h_z dq_z$$

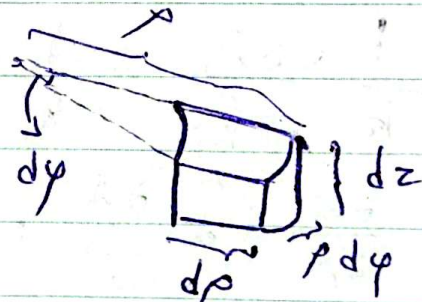
$$d\vec{r} = \hat{\rho} h_\rho d\rho + \hat{\varphi} h_\varphi d\varphi + \hat{k} h_z dz = \hat{\rho} d\rho + \hat{\varphi} \rho d\varphi + \hat{k} dz$$

$$(v) \quad d\vec{\sigma} = d\vec{\sigma}_1 + d\vec{\sigma}_r + d\vec{\sigma}_z = \hat{e}_1 h_r h_\rho dq_r dq_\rho + \hat{e}_r d_1 h_r dq_1 dq_\rho + \hat{e}_z h_\rho h_r dq_\rho dq_r$$

$$d\vec{\sigma} = \hat{\rho} \rho d\varphi dz + \hat{\varphi} d\rho dz + \hat{k} \rho d\rho d\varphi$$

$$(1) \quad d\tau = h_1 h_r h_\rho dq_1 dq_r dq_\rho$$

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$$



$$\begin{cases} q_1 = \rho \\ q_r = \varphi \\ q_\rho = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = \hat{\rho} \\ \hat{e}_r = \hat{\varphi} \\ \hat{e}_\rho = \hat{k} \end{cases}$$

$$\vec{V} = \hat{\rho} V_\rho + \hat{\varphi} V_\varphi + \hat{k} V_z$$

$$\nabla \psi = \hat{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} V_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) \right]$$

$$\text{Kian SHAD} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\nabla^r \psi &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix} = \vec{W}$$

$$\textcircled{7} \hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i} \left[\hat{i} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right]$$

$$\hat{\rho} = \hat{i} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial \rho} = \hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{\rho} \left[\hat{i} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right]$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[-\hat{i} \rho \sin \varphi + \hat{j} \rho \cos \varphi + 0 \right] = -\hat{i} \sin \varphi + \hat{j} \cos \varphi$$

$$\hat{k} = \hat{k}$$

$$\nabla^r \vec{V} = \nabla^r (\hat{r} V_r + \hat{\varphi} V_\varphi + \hat{k} V_z) \quad \text{محاسبه } \nabla^r \vec{V} \text{ در استوانه‌ای}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^r V^r$$

$$\Rightarrow \nabla^r \vec{V} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})}_{\vec{W}}$$

$$\nabla^r \vec{V}|_r = \nabla^r V_r - \frac{1}{r} V_r - \frac{r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}$$

$$\nabla^r \vec{V}|_\varphi = \nabla^r V_\varphi - \frac{1}{r} V_\varphi + \frac{r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}$$

$$\nabla^r \vec{V}|_z = \nabla^r V_z$$

Example 2.4.1 A Navier-Stokes term:

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})], \quad \vec{V} = \hat{k} V(r)$$

سرعت فقط در جهت $\hat{k}$ است.

$$\Rightarrow v_\varphi = v_r = 0$$

$$\vec{W} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v(r) \end{vmatrix} = -\hat{\varphi} \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{k} \\ V_r & V_\varphi & V_z \\ w_r & w_\varphi & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{k} \\ 0 & 0 & v(r) \\ 0 & -\frac{\partial v}{\partial r} & 0 \end{vmatrix} = \hat{r} v(r) \frac{\partial v}{\partial r} \equiv \vec{U}$$

$$\nabla \times \vec{U} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{2z \partial v}{\partial \rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

2.5 spherical polar coordinates

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \phi$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = C_1 \Rightarrow$$

سطوح مختلفات
کره ای به شعاع r

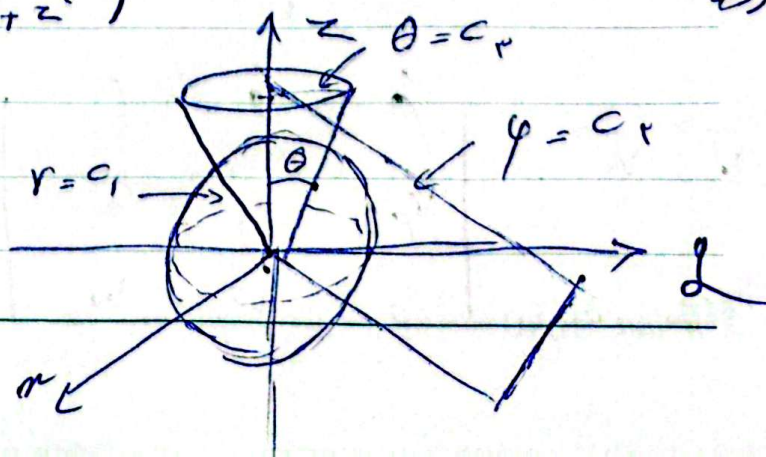
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = C_2 \Rightarrow y = x \tan C_2$$

یک صفحه که محور
 z را در بر دارد

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = C_3 \Rightarrow z = r \cos C_3$$

مساحه مخروط
مفروضه

$$\begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi < 2\pi \end{cases}$$



Date:

Subject:

$$h_i^r = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^r + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^r + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^r$$

$$h_1^r = h_r^r = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^r + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^r + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^r =$$

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1$$

$$\begin{cases} h_1 = h_r = 1 \\ h_r = h_\theta = r \\ h_r = h_\varphi = r \sin \theta \end{cases}$$

$$d\vec{r} = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_r h_r dq_r + \hat{e}_\theta h_\theta dq_\theta$$

$$d\vec{r} = \vec{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\varphi} r \sin \theta d\varphi \quad (A)$$

$$\vec{r} = \hat{r} r \Rightarrow d\vec{r} = \hat{r} dr + r d\hat{r} \quad (B)$$

$$(A, B) \Rightarrow d\hat{r} = \hat{\theta} d\theta + \hat{\varphi} \sin \theta d\varphi$$

برای اثبات متناظر بودن یک دستگاه مختصات q_i ، برای $i \neq j$ (مختصات) می نویسیم

و باید $g_{ij} = 0$ بررسی

Area element: $d\vec{\sigma} = \hat{r} h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi + \hat{\theta} h_r h_\varphi dr d\varphi + \hat{\varphi} h_r h_\theta dr d\theta =$

$$\hat{r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi + \hat{\theta} r \sin\theta dr d\varphi + \hat{\varphi} r dr d\theta$$

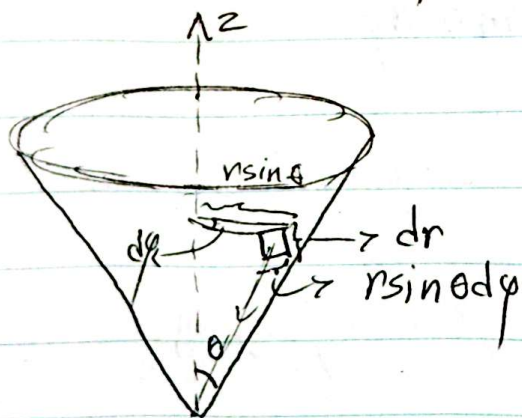
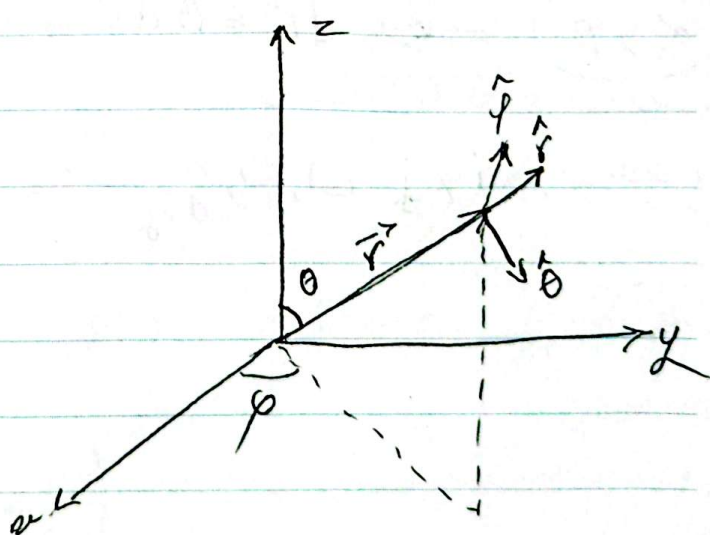
اگر همان سطح روی سطح کره به شعای $r = a$ باشد که ثابت است:

$$d\vec{\sigma} = \hat{r} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi =: \hat{r} a^2 d\Omega$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow \int_{\text{کره}} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi$$

اگر همان روی $\theta = \theta_0$ باشد،
مفروضه ثابت

$$d\vec{\sigma} = \hat{\theta} r \sin\theta dr d\varphi$$



Volume element:

$$d\tau = h_r h_\theta h_\varphi dr d\theta d\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

unit vectors $\hat{e}_r = \hat{r}$, $\hat{e}_\theta = \hat{\theta}$, $\hat{e}_\varphi = \hat{\varphi}$

$$d\hat{r} = \hat{\theta} d\theta + \hat{\phi} \sin\theta d\varphi$$

Date:

Subject:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{r} = \hat{i} \sin\theta \cos\varphi + \hat{j} \sin\theta \sin\varphi + \hat{k} \cos\theta$$

$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ in terms of $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

$$\hat{r} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{i} \frac{\partial x}{\partial r} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial r} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= \hat{i} \sin\theta \cos\varphi + \hat{j} \sin\theta \sin\varphi + \hat{k} \cos\theta$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r} \left[\hat{i} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] = \hat{i} \cos\varphi \cos\theta + \hat{j} \cos\theta \sin\varphi - \hat{k} \sin\theta$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\hat{i} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{\sin\theta} \left[-\hat{i} \sin\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi \right]$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i} \sin\varphi + \hat{j} \cos\varphi$$

$$\begin{cases} h_r = h_r = 1 \\ h_\theta = h_\theta = r \\ h_\varphi = h_\varphi = r \sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{e}_r = \hat{r} \\ \hat{e}_\theta = \hat{\theta} \\ \hat{e}_\varphi = \hat{\phi} \end{cases}$$

$\nabla, \vec{r}, \vec{\nabla}_x, \nabla^r$

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \nabla_r + \hat{\theta} \nabla_\theta + \hat{\phi} \nabla_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \psi = \hat{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (S_1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^r \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^r V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + r \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right] \quad (S_1)$$

$$\begin{aligned} \text{For } \nabla^r \psi &= \frac{1}{r^r \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + r \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right] = \frac{1}{r^r \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^r \frac{\partial \psi}{\partial r}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \quad (S_2) \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r^r \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta V_\phi \end{vmatrix} = \hat{r} w_r + \hat{\theta} w_\theta + \hat{\phi} w_\phi \quad (S_3)$$

$$\nabla^r \vec{V} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})}_{\vec{W}} \quad : \nabla^r \vec{V} \text{ scalar}$$

Example 2.5.1

$$\psi = f(r) \Rightarrow \vec{\nabla} \psi \stackrel{(S_1)}{=} \vec{\nabla} f(r) = \hat{r} \frac{df(r)}{dr}$$

$$\vec{V} = \hat{r} f(r) \Rightarrow V_r = f(r), V_\theta = 0, V_\phi = 0$$

$$(S_1) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^r} \frac{d}{dr} (r^r f(r)) = \frac{r}{r} f(r) + \frac{df(r)}{dr}$$

$$\psi = f(r) \Rightarrow \nabla^r \psi = \nabla^r f(r) \stackrel{(S_2)}{=} \frac{1}{r^r} \frac{d}{dr} (r^r \frac{df}{dr}) =$$

Kian SHAD

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} \stackrel{(S_3)}{=} 0$$

$$\vec{V} = \hat{r} f(r) \Rightarrow V_r = f(r), V_\theta = V_\phi = 0 \quad \frac{r}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}$$

تکامل دستگاه روبرو را بررسی کنید.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (\text{غیر ضروری}) \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Example 2.5.2 Magnetic vector potential

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\hat{\varphi} A_{\varphi}(r, \theta))]$$

$$\vec{A} = \hat{\varphi} A_{\varphi}(r, \theta) \Rightarrow A_r = A_{\theta} = 0$$

$\hat{r}$	$r \hat{\theta}$	$r \sin \theta \hat{\varphi}$
$\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\frac{\partial}{\partial \varphi}$
A_r	$r A_{\theta}$	$r \sin \theta A_{\varphi}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \stackrel{(S_5)}{=} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_{\varphi}) - \hat{\theta} r \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_{\varphi}) \right] = \hat{r} B_r + \hat{\theta} B_{\theta}$$

$\hat{r}$	$r \hat{\theta}$	$r \sin \theta \hat{\varphi}$
$\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\frac{\partial}{\partial \varphi}$
B_r	$r B_{\theta}$	$r \sin \theta B_{\varphi}$

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[-\hat{\varphi} \left[\nabla^2 A_{\varphi}(r, \theta) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_{\varphi}(r, \theta) \right] \right]$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}$$

الکترون را در آن
B و A بسته به زمان نباشد

2.6 Separation of variables

جداسازی متغیرها

در آرنگن - ویرنیست

$$\nabla^2 \psi + K^2 \psi = 0$$

- Cartesian:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + K^2 \psi(x, y, z) = 0$$

فرض کنیم این تابع جواب است و

در معادله صدق می کند.

$$\Rightarrow \psi = \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + X Y \frac{d^2 Z}{dz^2} + K^2 X Y Z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + K^2 = 0$$

طرفین را بر XYZ تقسیم می کنیم

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{\text{تابع } x} = - \underbrace{\left(\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + K^2 \right)}_{\text{تابع } y, z} = -l^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -l^2$$

معادله حاکم بر $X(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{\text{تابعی از } y} = \underbrace{l^2 - K^2 - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{\text{تابعی از } z} = -m^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -n^2, \quad n^2 = K^2 - l^2 - m^2$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\ell^2 \Rightarrow X = X_\ell(x) \quad \ell^2 - \text{لروداً متغی نیست، می تواند هر عددی باشد.}$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 + \ell^2 - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -m^2$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2 \Rightarrow Y = Y_m(y)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -n^2, \quad n^2 = k^2 - \ell^2 - m^2, \quad Z = Z_n(z)$$

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = X_\ell(x) Y_m(y) Z_n(z)$$

$$\psi(x, y, z) = \sum_{\ell, m, n} a_{lmn} X_\ell(x) Y_m(y) Z_n(z)$$

تمام مقادیر ممکن برای ثوابت ℓ, m, n به حساب آمده اند.

Linear operator عملگر خطی

$$L(a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2) = a_1 L(\psi_1) + a_2 L(\psi_2)$$

$$\Rightarrow L = \text{Linear operator}$$

$$L = \nabla^2 + K^2$$

$$(\nabla^2 + K^2) \psi = (\nabla^2 + K^2) \left(\sum_{\ell, m, n} a_{lmn} X_\ell Y_m Z_n \right)$$

$$= \sum_{\ell, m, n} (\nabla^2 + K^2) (a_{lmn} X_\ell Y_m Z_n)$$

$$= \sum_{\ell, m, n} a_{lmn} (\nabla^2 + K^2) (\underbrace{X_\ell Y_m Z_n}_{\psi_{lmn}}) = 0$$

سرال استعانی نشان دهید معادله زیر به روش فوق جوابی پذیرا است :

$$[\nabla^2 + f(x) + g(y) + h(z) + k^2] \psi(x, y, z) = 0$$

- cylindrical coordinates

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\rho, \varphi, z) = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0$$

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z)$$

$$\phi z = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} P z \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + P \Phi \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 P \Phi z = 0$$

$$\phi z \Rightarrow \frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}_{\text{تابعی از } \rho \text{ و } \varphi} = \underbrace{-k^2 - \frac{1}{z} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{\text{تابعی از } z} = -n^2$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + (n^2 + k^2) Z = 0 \Rightarrow Z = Z_n(z)$$

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + n^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = +m^2$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \Phi_m(\varphi)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^r \rho^r - m^r) P = 0 \quad \left. \begin{array}{l} P = P_{mn}(\rho) \\ \text{Bessel's equation} \end{array} \right\}$$

$$\Psi_{mn}(\rho, \varphi, z) = P_{mn}(\rho) \cdot \Phi_m(\varphi) Z_n(z)$$

$$\nabla^r + K^r \text{ is linear} \Rightarrow \Psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{mn} a_{mn} P_{mn} \Phi_m Z_n$$

- spherical coordinates :

$$(\nabla^r + K^r) \Psi(r, \theta, \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] = -K^r \Psi \quad (5)$$

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (5')$$

(5) را در (5) قرار داده بر $R \Theta \Phi$ تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = r^2 \sin^2 \theta \left[-K^r - \frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] = -m^r$$

$$\underbrace{\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}_{\varphi \text{ تابع}} = \underbrace{r^2 \sin^2 \theta}_{\theta, r \text{ تابع}} \left[-K^r - \frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] = -m^r$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^r \Phi = 0 \Rightarrow \Phi_m(\varphi)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + K^r r^2 = - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \quad \text{تقسیم بر } \sin^2 \theta$$

Date:

Subject:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - Q) R = 0 \Rightarrow R_Q(r)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \left(\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - Q \right) \Theta = 0 \Rightarrow \Theta_{mQ}$$

$$\psi_{ma} = R_Q(r) \Theta_{mQ} \phi_m$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{Qm} a_{Qm} R_Q \Theta_{mQ} \phi_m$$

* نشان دهنده بردار فوق معادله زیر جداشی پذیراست :

$$\left[\nabla^2 + f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} h(\varphi) + h' \right] \psi(r, \theta, \varphi) = 0$$