

3. Tensor analysis (Arfken)

2.6 Arfken - weber

3.1 Definitions تعاریف

$$\vec{T} = \sigma \vec{E} \quad \vec{T} = \text{جگالی جریان}$$

میان L و L رسانش

$$T_i = \sigma E_i \quad \text{اگر عیله isotropic (همسانگرد) باشد:}$$

$$T_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j \quad \text{اگر عیله همسانگرد نباشد:}$$

این یک تانسور مرتبه دوم است

$$\vec{A} = B \vec{C}$$

اگر بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{C}$ موازی نباشند

$$\Rightarrow A_i = \sum_j B_{ij} C_j$$

$$\phi = \phi' \quad \text{تانسور مرتبه صفر}$$

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j \quad \text{تانسور مرتبه اول}$$

تانسور یک شیء ریاضی است که تحت تبدیلات مختصات (مثل چرخش مختصات، انتقال مبدأ و...) مولدهای آن طبق قانونهای خاص تبدیل شود.

قرارداد: اندیسهای مختصات الا باشند: i, j, k

- Contravariant Vector

$$A^i \xrightarrow[\text{تبدیل مختصات}]{\text{تست (یاد وردا)}} A'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j$$

- covariant vector

$$B_i \xrightarrow[\text{تبدیل مختصات}]{\text{(موردی)}} B'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} B_j$$

در حالت دکارتی $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$ بنابراین بردارهای هموردی و پادوردی یکسان هستند.

$$\begin{aligned} A^{ij} &\longrightarrow A'^{ij} = \sum_{m,n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} A^{mn} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rank} = 2 \\ \text{type} = (2,0) \end{array} \right. \\ B^i_j &\longrightarrow B'^i_j = \sum_{m,n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} B^m_n \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rank} = 2 \\ \text{type} = (1,1) \end{array} \right. \\ C_{ij} &\longrightarrow C'_{ij} = \sum_{m,n} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} C_{mn} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rank} = 2 \\ \text{type} = (0,2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} \longrightarrow A'^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial x'^{i_m}}{\partial x^{j_m}} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x'^{j_1}} \frac{\partial x^{k_2}}{\partial x'^{j_2}} \dots \frac{\partial x^{k_n}}{\partial x'^{j_n}} A^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n}$$

$$\text{rank} = m + n$$

$$\text{type} = (m, n)$$

$$k_1, k_2, \dots, k_n$$

1 rank = m + n
 2 $T^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n}$
 3 type (m, n) $\leftarrow$ اگر فقط تحت باشد همه این ها را
 4 می توان پایین نوشت.

$$T^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} = \sum_{k_1=1}^d \dots \sum_{k_m=1}^d \sum_{l_1=1}^d \dots \sum_{l_n=1}^d \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{l_n}}{\partial x^{j_n}} T^{k_1 \dots k_m}_{l_1 \dots l_n}$$

قاعده جمع انشتین

- جمع روی اندیس تکراری از ا تا بعد فقط (d)

- اندیس تکراری فقط یکبار تکراری شود.

- اندیس تکراری یکبار به صورت covariant (پایین) و یکبار به صورت contravariant

(بالا) نوشته می شود.

چرا از تانسورها استفاده می کنیم؟

- اگر معادله ای به فرم تانسور نوشته شود، فرم ریاضی آن در هر دستگاه مختصات برقرار است



$$(x', \dots, x^d): F^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} = G^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n}$$

$$(x'^1, \dots, x'^d): F'^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} = G'^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n}$$

Addition and subtraction of tensors

$A \pm B = C$ مرتبه $(m+n)$ و رتبه (m, n) هر دو تانسور یکسان است:

$$A^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} \pm B^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} = C^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n}$$

The δ^i_j is a tensor

proof:

$$\delta'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \delta^k_l$$

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \delta^k_l = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} + \dots + \frac{\partial x'^i}{\partial x^d} \frac{\partial x^d}{\partial x'^j}$$

$$\text{تانسور متقارن} = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \delta'^i_j$$

$$S^{mn} = S^{nm} \Rightarrow S = \text{symmetric}$$

متقارن

$$A^{mn} = -A^{nm} \Rightarrow A = \text{anti-symmetric}$$

پادمتقارن

Senobar



$$T^{mn} = \frac{1}{2} (T^{mn} + T^{nm}) + \frac{1}{2} (T^{mn} - T^{nm})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A^{mn}}$

3.2 contraction, Direct product

(ادغام، انقباض)

(ضرب مستقیم)

Contraction

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B^i \quad \text{اسکالر (مرتبه 0)}$$

$$A_i B^i = \text{a second rank tensor}$$

$$i = j \Rightarrow A_i B^i = \text{rank zero tensor, scalar}$$

$$T^{i_1 \dots i_m \dots i_p} \quad j_1 \dots j_n \dots j_q \quad \text{rank} = p + q, \quad \text{type } (p, q)$$

$$i_m = j_n \Rightarrow T^{i_1 \dots i_{m-1} i_m i_{m+1} \dots i_p} \quad j_1 \dots j_{n-1} j_m j_{n+1} \dots j_q$$

در عمل ادغام، یک اندیس از بالا باید اندیس از پایین مساوی قرار داده شود، روی اندیس تکراری

جمع بسته می شود و دو تانز رتبه کمتر کم می شود. (با ۲ تانز بالا و ۲ تانز پایین و ۲ تانز از رتبه کم می شود)

حتماً باید هم از بالا و هم از پایین انتخاب کنیم، نمی توانیم فقط از بالا یا فقط از



Senobar

پایین انتخاب کنیم.

$$B'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} B^k_l \xrightarrow{i=l} B'^i_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} B^k_l$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial x^k} B^k_l = \delta^k_l B^k_l = B^k_k = B^i_i \rightarrow \text{اسکالر است } B^i_i$$

تا شعور از مرتبه صفر

بردار شعور ۱ $A_i dx^i = A \quad (0, 1)$

بردار پاد شعور ۱ $B^i \frac{\partial}{\partial x^i} = B \quad (0, 1)$

بردار ۱

$(1, 1) C \Rightarrow C = C^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$

$(2, 0) \Rightarrow D = D^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$

$(0, 2) \Rightarrow E = E_{ij} dx^i \otimes dx^j$

$(m, n) : T = T^{i_1 \dots i_m} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_n}$

Direct product ضرب مستقیم

$A_{(p)} \otimes B_{(q)} = C_{(p+q)}$

← مرتبه q ← مرتبه p

1 مثال 1 $\left\{ \begin{array}{l} a^i = 1 \text{ مرتبة } 1, \text{ نوع } = (1, 0) \\ b_j = 1 \text{ مرتبة } 1, \text{ نوع } = (0, 1) \end{array} \right. \Rightarrow a^i b_j = 2 \text{ مرتبة } 2, \text{ نوع } = (1, 1) \quad \Gamma^i_j$

2 اثبات $\left\{ \begin{array}{l} a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a^k \\ b'_j = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} b_k \end{array} \right. \Rightarrow \Gamma'^i_j = a'^i b'_j =$

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a^k \right) \left(\frac{\partial x^l}{\partial x'^j} b_l \right)$$

$$= \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} a^k b_l = \Gamma^k_l = \Gamma^k_l$$

3 مثال 2 $\left\{ \begin{array}{l} (1, 1) A'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} A^m_n \\ (2, 0) B'^{kl} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^p} \frac{\partial x'^l}{\partial x^q} B^{pq} \end{array} \right.$

4 $A'^i_j B'^{kl} \equiv C'^i_j{}^{kl}, (2, 1)$

5 $\Rightarrow C'^i_j{}^{kl} = A'^i_j B'^{kl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^p} \frac{\partial x'^l}{\partial x^q}$

$$C^m_n{}^{pq}$$

6 $A^m_n B^{pq}$

$$(۰.۱) A = A_i dn^i \Rightarrow T^i_j{}^k$$

$$T = T^i_j{}^k \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$T = T'$$

در برخی مختصات، تانسور عوض نمی‌شود؛

ولی مولفه‌های آن عوض می‌شود مثل بردار.

$$T_{(m+n)} \rightarrow Q_{(r+s)}$$

$$T^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} Q^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}$$

نوع (m, n)

نوع (r, s)

مرتبه $(m+n)$

مرتبه $(r+s)$

نوع $(m+r, n+s)$

مرتبه $(m+r+n+s)$

Date:

Subject:

$$H_{(p,q)} = T_p Q_q$$

3.3 Quotation rule

قاعده خارج قسمت

2.8 A.w

3.8 از اینجا خود را محدود به تانسورهای دکارتی می‌کنیم در نتیجه انریس بالا و پایین باید ارزش هستند.

$$K_{i_1, \dots, i_p} A_{j_1, \dots, j_p} = B_{i_1, \dots, i_p} \delta_{j_1, \dots, j_p}$$

$A_{(q)}$ تانسور q مرتبه است

$$- K_{ij} A_j = B_i \Rightarrow K'_{ij} A'_j = B'_i$$

$$K'_{ij} A'_j = a_{ik} B_k \\ = a_{ik} K_{kl} A_l \quad (1)$$

$$A'_j = \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A_l = a_{jl} A_l \Rightarrow A_l = a_{jl} A'_j \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow K'_{ij} A'_j = a_{ik} K_{kl} a_{jl} A'_j$$

$$\Rightarrow (K'_{ij} - a_{ik} a_{jl} K_{kl}) A'_j = 0 \Rightarrow K'_{ij} = a_{ik} a_{jl} K_{kl}$$

↑ دلخواه

3.4 Pseudo tensors, Dual tensors

2.9 A.w

هیزاد، دوگان

این بردارها همان بردارهای عادی اند یعنی تحت چرخش و انتقال

Inversion : معکوسی

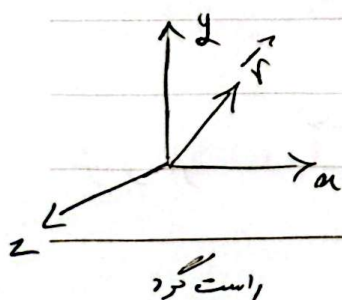
دستگاه مختصات تغییر نمی‌کند اما

در دستگاه جدید نیز همان $\vec{r}$ قبلی است و

بردار تغییر نکرده

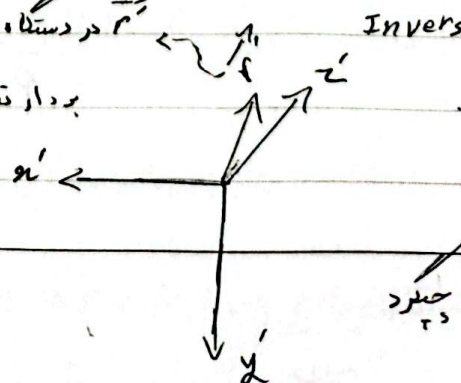
Inversion تحت

متناوبند



راست گرد

Kian SHAD



چپ گرد

$$\vec{r}' = (x', y', z') = (-x, -y, -z) \Rightarrow \vec{r} \rightarrow -\vec{r}'$$

بر برداری که تحت inversion مانند $\vec{r}$ تبدیلی شود، بردارهای polar (قطبی) می‌گویند

$$\vec{p} \xrightarrow{\text{inversion}} -\vec{p}'$$

- Pseudo vectors (axial vectors)

شبه بردارها

بردارهای محوری

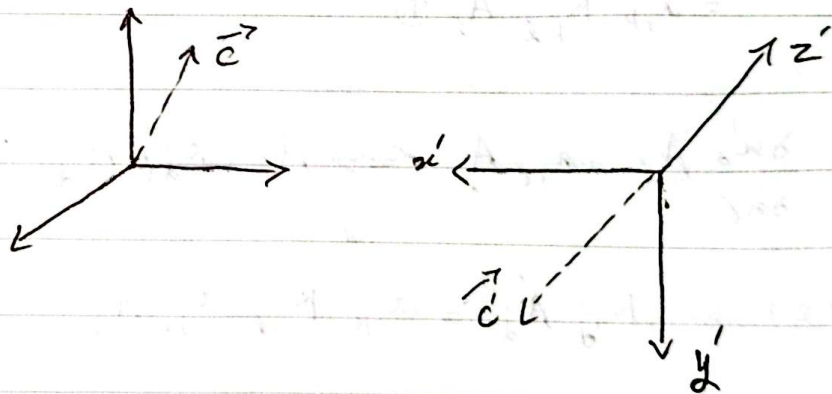
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

فرض کنید $\vec{A}, \vec{B}$ بردارهای قطبی باشند:

$$\vec{A} \rightarrow -\vec{A}'$$

$$\vec{B} \rightarrow -\vec{B}'$$

$$\vec{C} \rightarrow +\vec{C}'$$



Examples : $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{V}$ قطبی $\vec{\omega}$ قطبی $\vec{r}$ قطبی

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{قطبی} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{axial} \quad \text{شبه بردار}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

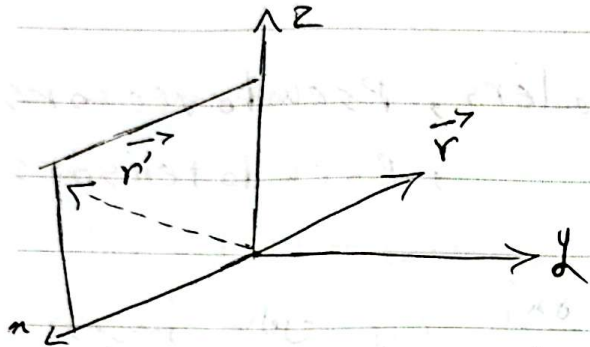
$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{قطبی}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \text{شبه بردار}$$

(Torque) $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ Force

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \text{قطبی} \Rightarrow \vec{N} = \text{شبه بردار}$$

- Reflection انکسار



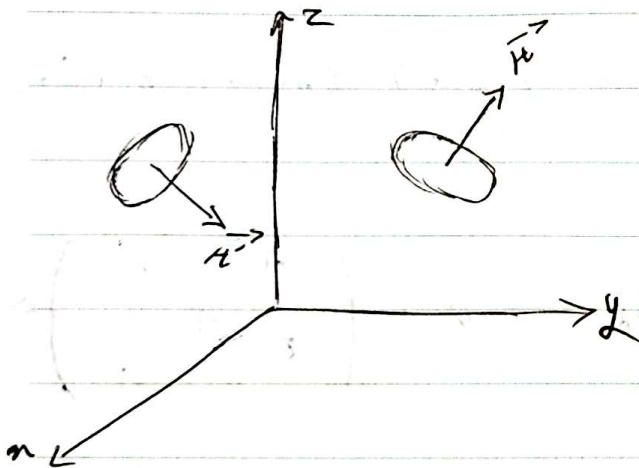
برای بردار عادی داریم:

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{r}' = (x, -y, z)$$

برای هر بردار قطبی $\vec{P}$ داریم: $\vec{P}' = (P_x, -P_y, P_z)$

برای شبه بردارها داریم:



برای بررسی رفتار شبه بردار تحت reflection: باید عناصر شبه بردار تجزیه شوند.

$$\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$$

$$\vec{H} = 1 \vec{A}$$

$$\vec{H}' = (-H_x, H_y, -H_z) \Rightarrow \text{عکس بردار}$$

عادی است.

در مقیاس میکروسکوپی مثل ذرات بنیادی، طبیعت دارای تقارن آئینه‌ای نیست. یعنی اینکه Parity (پاریته)

در طبیعت شکسته می‌شود. بنابراین باید برای توصیف این سیستم‌ها، از شبه بردارها استفاده شود.

Kbrian SHAD

جایی که تقارن نداریم باید از شبه بردارها استفاده کنیم.

آئینه‌ای

هر دو اسکالر قطبی و یا هر دو شبه اسکالر (اسکالرها) $\phi_i = \phi_r$

هر دو شبه بردار یا هر دو بردار قطبی $\vec{A} = \vec{B}$

هر دو تانسور قطبی یا هر دو شبه بردار $T_i = T_r$

- Definition of pseudoscalars, Pseudovectors, Pseudotensors

- در محض خالص $\frac{\delta n'_i}{\delta n_j} = a_{ij}$

$$|a| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 1$$

- برای Inversion (معکوس):

$$-n_i = n'_i$$

$$\Rightarrow a_{ij} = \frac{\delta n'_i}{\delta n_j} = - \frac{\delta n_i}{\delta n_j} = -\delta_{ij} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = -1$$

- برای reflection (انعکاس):

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = -1$$

$$\text{شبه اسکالر } S \rightarrow S' = |a| S$$

$$\text{شبه بردار } C'_i = |a| a_{ij} C_j$$

$$\text{شبه تانسور مرتبه 2 } A'_{ij} = |a| a_{ik} a_{jl} A_{kl}$$

در هر حقیقت خالص $|a| = 1$ ، فرقی بین اسکالر قطبی و بردارهای قطبی و تانسورهای قطبی با شبه اسکالر،

شبه بردار و شبه تانسور نیست. تفاوت ها در انعکاس و معکوس است که $|a| = -1$...

مثال برای شبه اسکالر،

$$V_{\text{حجم}} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

اگر $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ قطبی باشند.

با بر این حجم یک شبه اسکالر است. $V \xrightarrow{\text{معکوس}} -V$

تحت معکوس و انعکاس:

$$S' = -S$$

$$C'_i = -a_{ij} C_j$$

$$A'_{ij} = -a_{ik} a_{jl} A_{kl}$$

$$dV = dx dy dz \xrightarrow{\text{معکوس}} (-dx)(-dy)(-dz) = -dV'$$

- Levi-Civita symbol in $d=3$:

$$\epsilon_{ijk} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1 \\ \epsilon_{ijk} = 0 \text{ اگر دو اندیس تکراری باشند} \end{cases}$$

قضیه: ϵ_{ijk} یک تانسور آنتی متقارن است.
 $\epsilon'_{ijk} = |\det a| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \epsilon_{pqr}$ (اثبات حذف)

مثال بی دهم: $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

- Dual tensor

دوگان Hodge duality (Poincaré duality)
 دوگانی

مثال: از تانسور قطبی C_{ij} یک بردار C_i می سازیم:

$$C_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} C_{jk}, \quad C_{ij} = -C_{ji}$$

در دوگانی ادهام اندیس ها باید فقط از طریق ϵ باشد.

$$i=1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \epsilon_{1jk} C_{jk} = \frac{1}{2} [\epsilon_{123} C_{23} + \epsilon_{132} C_{32}]$$

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{23} \\ C_2 &= C_{31} \\ C_3 &= C_{12} \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} C_{23} &= \frac{1}{2} (C_{23} - C_{32}) = \frac{1}{2} [\epsilon_{123} C_{23} + \epsilon_{132} C_{23}] \end{aligned} \right.$$

Kian SHAD

Dual Tensors درگان نامبراد

$$d = 3 \quad \text{فضای سه بعدی تخت}$$

اگر ادا نام با تانسور ϵ انجام شود، تانسور ایجاد شده دوگان نامیده می شود.

$$A_k = \epsilon^{ijk} T_{ijk}$$

$$C_{ij} = -C_{ji}$$

$$C_1 = C_{23}$$

$$C_i = \frac{1}{2!} \epsilon_{ijk} C_{jk}$$

$$C_2 = C_{31}$$

$$C_3 = C_{12}$$

$$L = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} T_{ijk}$$

L and T_{ijk} are Hodge dual (Poincare dual) of each other.

ملاک قطبی بردن یا شبیه تانسور بردن، وجود در میان تبدیل، هنگام تبدیل مقادیر از $x \rightarrow x'$ است.

$$T'_{i_1 \dots i_n} = \sum a_{i_1, d_1} a_{i_2, d_2} \dots a_{i_n, d_n} T_{d_1 \dots d_n}$$

$$\phi \rightarrow \phi' = |\alpha| \phi$$

$$A_i \rightarrow A'_i = |\alpha| \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} A_j$$

اگر این باشد شبیه تانسور است.

اگر قطبی باشد در میان ندارد.

If C_{ij} is polar, then c_i is a pseudo vector.

Proof: $c'_i = \frac{1}{r} \epsilon'_{ijk} c'_{jk}$ در دستگاه جدید صرفاً برای می گیریم

$$= \frac{1}{r} \left(|a| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \epsilon_{pqr} \right) \left(a_{jm} a_{kn} c_{mn} \right)$$

$$= \frac{1}{r} |a| a_{ip} \epsilon_{pqr} c_{jkr} \overset{\delta_{qm}}{=} |a| a_{ip} \left(\frac{1}{r} \epsilon_{pqr} c_{jr} \right)$$

$$= |a| a_{ip} c_p \Rightarrow c_i \text{ شبه بردار است}$$

If C_{ij} is a pseudotensor $\Rightarrow c_i$ is a polar vector

proof: $c'_i = \frac{1}{r} \epsilon'_{ijk} c'_{jk} =$

$$\frac{1}{r} \left[|a| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \epsilon_{pqr} \right] \left[|a| a_{jm} a_{kn} c_{mn} \right]$$

$$= a_{ip} c_p \Rightarrow c_i = \text{polar vector}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} V_{ijk}$$

اگر $\vec{V}$ شبه اسکالر باشد $\vec{V}$ شبه اسکالر است

اگر $\vec{V}$ شبه اسکالر باشد $\vec{V}$ قطبی است

if V_{ijk} is polar tensor $\Rightarrow \tilde{V}$ is pseudoscalar

Proof: $\tilde{V}' = \frac{1}{\pi!} \epsilon'_{ijk} V'_{ijk} =$

$$\frac{1}{\pi!} [|a| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \epsilon_{pqr}] [a_{im} a_{jn} a_{kl} V_{mnl}]$$

$$\tilde{V}' = \left(\frac{1}{\pi!} \epsilon_{pqr} V_{pqr} \right) |a| = |a| \tilde{V} \Rightarrow \tilde{V} \text{ pseudo scalar}$$

$$\epsilon_{ijk} \Rightarrow \pi = 3 = 2V \quad \text{تعداد موله های } \epsilon$$

$$d = 4$$

فضای چهار بعدی

$$\epsilon_{ijkl} = \begin{cases} +1 & \text{جابجایی زوج از ۱۲۳۴} \\ -1 & \text{جابجایی فرد از ۱۲۳۴} \\ 0 & \text{دوباره یا تکراری} \end{cases}$$

$$\epsilon_{rrrl} = -\epsilon_{rrlr} = -\epsilon_{lrrr} = \epsilon_{llrr} = +1$$

- Hodge dual of H_{ijkl} ; totally anti symmetric
کاملاً پاد متقارن

$$H_{ijkl} \equiv \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i & D_i \\ A_j & B_j & C_j & D_j \\ A_k & B_k & C_k & D_k \\ A_l & B_l & C_l & D_l \end{vmatrix}$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{r!} \varepsilon_{ijk\ell} H_{ijk\ell}$$

$$P_{ijk} \left\{ \begin{array}{l} \text{تاسور رنگ ۳} \\ \text{با دقتان} \end{array} \right. \quad \text{می خواهیم دوگان ۲ را در فضای چهار بعدی بنویسیم}$$

$$\tilde{P}_i = \frac{1}{r!} \varepsilon_{ijk\ell} P_{ijk\ell}$$

$$L_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \text{رنگ دو و با دقتان} \\ \text{مقارن} \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_{ijk\ell} \Rightarrow r = 2 \times 2 \quad \text{موله دارد}$$

(هر کدام از این دو کوا و ل)

$$\tilde{L}_{ij} = \frac{1}{r!} \varepsilon_{ijk\ell} L_{k\ell}$$

چهار مقداری گیرند

$$A_i$$

$$\tilde{A}_{ijk} = \frac{1}{1!} \varepsilon_{ijk\ell} A_{\ell}$$

$$d = 5 \Rightarrow \varepsilon_{ijk\ell m} \quad \text{دوگان تاسورهای زیر را در پنج به بنویسیم}$$

$$a) A_i \quad b) B_{ij} \quad c) C_{ijk} \quad d) D_{ijk\ell} \quad e) E_{ijk\ell m}$$

در $d=5$ به دلخواه در فضای انضاد اربا مقارن

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_d} = \begin{cases} +1 & \text{اگر } i_1, \dots, i_d \text{ جایگشت زوج از } (1, 2, \dots, d) \text{ باشند} \\ -1 & \text{اگر } i_1, \dots, i_d \text{ جایگشت فرد از } (1, 2, \dots, d) \text{ باشند} \\ 0 & \text{اگر دو اندیس تکرار شود} \end{cases}$$

تعداد عناصر = $d!$

Hodge dual of $A_{j_1 j_2 \dots j_p}$
 کاملاً پاد متقارن

$$\tilde{A}_{i_1 \dots i_{d-p}} = \frac{1}{p!} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_{d-p}} A_{j_1 \dots j_p} \Rightarrow$$

$$\tilde{A}_{i_1 \dots i_{d-p}} = \frac{1}{p!} \varepsilon^{j_1 \dots j_p i_1 \dots i_{d-p}} A_{j_1 \dots j_p}$$

3.5 Dyadics

همراهییم بررسی که $\vec{A} \vec{B}$ نیز معنی دارد.

$$\vec{i} \vec{j}, \vec{i} \vec{k}, \vec{j} \vec{k} = \text{dyad}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{i} \vec{j}) = (\vec{A} \cdot \vec{i}) \vec{j} = A_x \vec{j}$$

$$(\vec{i} \vec{j}) \cdot \vec{A} = \vec{i} (\vec{j} \cdot \vec{A}) = A_y \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{i} \vec{j} \neq \vec{j} \vec{i}$$

$$T = \vec{A} \vec{B} = (\hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z) (\hat{i} B_x + \hat{j} B_y + \hat{k} B_z)$$

$$= (\hat{i} \hat{i} A_x B_x + \hat{i} \hat{j} A_x B_y + \hat{i} \hat{k} A_x B_z)$$

$$+ (\hat{j} \hat{i} A_y B_x + \hat{j} \hat{j} A_y B_y + \hat{j} \hat{k} A_y B_z)$$

$$+ (\hat{k} \hat{i} A_z B_x + \hat{k} \hat{j} A_z B_y + \hat{k} \hat{k} A_z B_z)$$

$$\vec{A} = \sum_i \hat{u}_i A_i, \quad \vec{B} = \sum_j \hat{u}_j B_j$$

$$T = \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i \sum_j (\hat{u}_i \hat{u}_j \underbrace{A_i B_j}_{T_{ij}})$$

$$= \sum_i \sum_j \hat{u}_i \hat{u}_j T_{ij}$$

$$\vec{C} \cdot T = \sum_i \sum_j \underbrace{\vec{C} \cdot \hat{u}_i}_{C_i} \hat{u}_j T_{ij} = \sum_{i,j} \hat{u}_j C_i T_{ij} \quad (1)$$

$$T \cdot \vec{C} = \sum_i \sum_j \hat{u}_i \hat{u}_j \cdot \underbrace{\vec{C}}_{C_j} T_{ij} = \sum_{i,j} \hat{u}_i \cdot C_j T_{ij}$$

$$\stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \sum_{i,j} \hat{u}_j C_i T_{ji} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \text{If } T_{ij} \neq T_{ji} \Rightarrow \vec{C} \cdot T \neq T \cdot \vec{C}$$

$$\text{If } \underbrace{T_{ij} = T_{ji}}_{\text{متقارن است}} \Rightarrow \vec{C} \cdot T = T \cdot \vec{C} \Rightarrow \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

$$\Rightarrow (\vec{C} \cdot \vec{A}) \vec{B} = \vec{A} (\vec{B} \cdot \vec{C}) \Rightarrow \vec{B} = \underbrace{\left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{\vec{C} \cdot \vec{A}} \right) \vec{A}}_{\vec{B} \parallel \vec{A}}$$

$$\text{If } \underbrace{T_{ij} = -T_{ji}}_{\text{باد متقارن است}} \Rightarrow \vec{C} \cdot T = -T \cdot \vec{C}$$

باد متقارن است

اگر متقارن T_{ij} را قطری کنیم

$$T = i i T_{xx} + j j T_{yy} + k k T_{zz}$$

$$a' = \frac{1}{T_{xx}}, \quad c' = \frac{1}{T_{zz}}, \quad b' = \frac{1}{T_{yy}}$$

$$\vec{r} \cdot T \cdot \vec{r} = x^r T_{xx} + y^r T_{yy} + z^r T_{zz}$$

$$\text{If } \vec{r} \cdot T \cdot \vec{r} = 1, \quad T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} > 0 \Rightarrow \frac{x^r}{a'} + \frac{y^r}{b'} + \frac{z^r}{c'} = 1$$

Determinant, Matrices and Group theory

4 Arfken, 3 Arfken - Weber

4.1 or 3.1 Determinants

A A-w

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_r & b_r & c_r & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_n & b_n & c_n & \dots \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k,\dots} \epsilon_{ijk\dots} a_i b_j c_k \dots$$

minor: وقتی دترمینان را بر حسب یک سطر یا یک ستون بیست می دهیم، دترمینان

کهاد

های $(n-1) \times (n-1)$ ظاهری شوند که به آنها ماینر گویند.

مضارب (co factor): اگر عنصری که در آنها ضرب می شود a_{ij} باشد:

$$(-1)^{i+j} \text{ minor} = \text{co factor}$$

$$(-1)^{i+j} M_{ij} = C_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_r & b_r \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^r \epsilon_{ij} a_i b_j = \sum_{i=1}^r (\epsilon_{i1} a_i b_1 + \epsilon_{ir} a_i b_r) \\ = \epsilon_{11} a_1 b_1 + \epsilon_{1r} a_1 b_r + \epsilon_{r1} a_r b_1 + \epsilon_{rr} a_r b_r$$

Kian SHAD

$$= a_1 b_r - a_r b_1$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_r & b_r & c_r \\ a_r & b_r & c_r \end{vmatrix} = \sum_{ijk} a_i b_j c_k$$

↳ Levi-chi-vita

$$= \sum_{ijk} a_i b_j c_k + \sum_{rjk} a_r b_j c_k + \sum_{rjk} a_r b_j c_k$$

Levi-chi-vita

$$= \left[\sum_{irk} a_i b_r c_k + \sum_{irk} a_i b_r c_k \right]$$

$$+ \left[\sum_{rjk} a_r b_j c_k + \sum_{rjk} a_r b_j c_k \right]$$

$$+ \left[\sum_{rik} a_r b_i c_k + \sum_{rik} a_r b_i c_k \right]$$

$$= \left[\sum_{irk} a_i b_r c_r + \sum_{irk} a_i b_r c_r \right] + \left[\sum_{rik} a_r b_i c_r + \sum_{rik} a_r b_i c_r \right]$$

$$+ \left[\sum_{rjk} a_r b_j c_r + \sum_{rjk} a_r b_j c_r \right]$$

$$= a_1 (b_r c_r - b_r c_r) - a_r (b_i c_r - b_r c_i)$$

$$+ a_r (b_i c_r - b_r c_i) \Rightarrow$$

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_r & c_r \\ b_r & c_r \end{vmatrix} - a_r \begin{vmatrix} b_i & c_i \\ b_r & c_r \end{vmatrix} + a_r \begin{vmatrix} b_i & c_i \\ b_r & c_r \end{vmatrix}$$

$$= a_1 M_{11} - a_r M_{r1}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk \dots} a_i b_j c_k \dots$$

$$b_i = a_i \Rightarrow D = \varepsilon_{ijk \dots} a_i a_j c_k \dots = 0$$

- اگر k برابر یک سطر با سطر دیگر (یا یک ستون با ستون دیگر) جمع شود، در میان عوض نمی شود.

$$D(k) = \begin{vmatrix} a_1 + k b_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 + k b_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n + k b_n & b_n & c_n & \dots \end{vmatrix}$$

تحت تعریف بالا، k یک متغیر است

$$= \varepsilon_{ijk \dots} (a_i + k b_i) b_j c_k \dots = \varepsilon_{ijk \dots} a_i b_j c_k \dots + k \underbrace{\varepsilon_{ijk \dots} b_i b_j c_k \dots}_{= D_0}$$

$\Leftarrow$ جمله دوم عبارت بالا صفر است.

تحت تعریف بالا، k یک متغیر است $\rightarrow 0$

- Solution of a set of homogeneous ^{همگن} equation :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

جواب $x=y=z=0$ بی‌بیه است

$$x \Delta = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

چون همگن است،

$d_1 = d_2 = d_3$ برابر می‌باشد.

$$\begin{cases} x \Delta = \Delta_x \\ y \Delta = \Delta_y \\ z \Delta = \Delta_z \end{cases}$$

جواب ساده همگن

به این سری است

برای معادله نا همگن ، d_1 و d_2 و d_3 ضرایب سمت راست

$$\begin{cases} x \Delta = \Delta_1 & (\alpha_1) \\ y \Delta = \Delta_2 & (\alpha_2) \\ z \Delta = \Delta_3 & (\alpha_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \Delta_1 / \Delta \\ y = \Delta_2 / \Delta & (\beta) \\ z = \Delta_3 / \Delta \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

از معادلات α_1 و α_2 و α_3 ،

$$\text{If } \Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$$

در این حالت دستگاه معادلات جواب ندارد.

$$\text{If } \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$$

در این حالت دستگاه معادلات جواب یکتا ندارد.

$$\text{If } \Delta \neq 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$$

دستگاه معادلات جواب یکتا بهر صورت (β) دارد.

Ar web

4.2 Matrices

3.2

Ar-web

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1r} & a_{1r} \\ a_{r1} & a_{rr} & a_{rr} \\ a_{r1} & a_{rr} & a_{rr} \end{pmatrix} = A$$

اینگونه اثبات می شود. $\rightarrow$ $I \vec{v} = A \vec{u} \Rightarrow v_i' = A_{ij}' u_j$

اگر $\vec{u}, \vec{v}$ طبق تعریف پیشرفته بردار، بردار باشند آنگاه A_{ij} تا سرریز ۲ است.

$$A_{ij}' = \frac{\partial n^k}{\partial n_i'} \frac{\partial n^l}{\partial n_j'} A_{kl}$$

تمایس (Representation)

به عناصر ماتریس در یک دستگاه گویند و با تغییر مختصات عناصر عوض می شوند.

بینی به نمایش دیگر می رویم.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

$$A + B = C \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}, \quad \alpha = \text{sc}, \quad A\alpha = \alpha A$$

$$AB = C \Rightarrow C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

$$AB \neq BA$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

- Direct product (kronecker product)

$$A_{m \times m}, B_{n \times n}$$

$$A \otimes B = C, \quad C_{mn \times mn}$$

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$A_{r \times r}, B_{r \times r}$$

$$A \otimes B = C =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1r} \\ b_{r1} & b_{rr} \end{pmatrix} & a_{1r} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1r} \\ b_{r1} & b_{rr} \end{pmatrix} \\ a_{r1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1r} \\ b_{r1} & b_{rr} \end{pmatrix} & a_{rr} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1r} \\ b_{r1} & b_{rr} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{1r} & a_{1r} b_{11} & a_{1r} b_{1r} \\ a_{11} b_{r1} & a_{11} b_{rr} & a_{1r} b_{r1} & a_{1r} b_{rr} \\ a_{r1} b_{11} & a_{r1} b_{1r} & a_{rr} b_{11} & a_{rr} b_{1r} \\ a_{r1} b_{r1} & a_{r1} b_{rr} & a_{rr} b_{r1} & a_{rr} b_{rr} \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B \neq B \otimes A, \quad A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$\begin{matrix} |n\rangle \\ \text{ket} \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_r \\ i \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{column vector} \\ \text{بردار ستونی} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 \times 2 \\ a_{11} & a_{1r} \\ a_{r1} & a_{rr} \end{matrix}$$

- Row vector بردار سطری

$$\langle n| = (a_1, a_r, \dots, a_n)$$

$\uparrow$ bra

$$A_{n \times n} \rightarrow A |n\rangle = |n'\rangle, \quad \langle n'| = \langle n| A$$

Diagonal matrix ماتریس قطری

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{rr} & \\ 0 & & a_{rr} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

اگر A و B قطری باشند: $AB = BA$

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$$

$$\text{Tr } (AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_k (A_{ik} B_{ki}) = \sum_k \sum_i B_{ki} A_{ik}$$

$$= \sum_k (BA)_{kk} = \text{Tr } (BA)$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$$

② Solution of a set of homogeneous Equations:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

همچنین طرف دوم این معادلات صفر است. هرگاه $\Delta \neq 0$ (homogeneous) گفته می شود.
- سؤال اینست: تحت چه شرایطی برای x, y, z جواب غیر صفر پیدا می شود.

حل: x را در ترفیع مرتب میزنیم

$$\Delta \equiv x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

مستوی در هم را درن، مستوی سوم را در z میزنیم، مستوی اول را میزنیم

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

DK: If $\Delta \neq 0 \Rightarrow x = 0$
If $\Delta = 0 \Rightarrow x$ can be non-zero

تبار این $x=0$ میگیریم

$$\text{If } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \text{ can be nonzero}$$

به ترتیب برای x, y, z :

$$y\Delta = 0, \quad z\Delta = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{If } \Delta \neq 0 \Rightarrow x=y=z=0 \\ \text{If } \Delta = 0 \Rightarrow \text{Some or all } x, y, z \end{array} \right.$$

● Solution of a Set of Inhomogeneous Equations: Can be nonZero

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\Delta} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv \Delta_x \quad (D.4)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \Rightarrow \boxed{x\Delta = \Delta_x} \quad (D.5)$$

به ترتیب برای y, z نیز $y\Delta = \Delta_y$ و $z\Delta = \Delta_z$

اگر در فرایض فراتر (مخرج) در (D.5) قرار دهیم، دستگیر می‌شویم که جواب ندارد، مگر این صورت
هم مؤید است. در این صورت حل‌پذیر است و وجود داشته باشد، اما یکتا نیستند، مگر نیز 4.1.3.4.1
بیست و

- عزت علی خان -

در اینجا حل مسائل با استفاده از طریق حذف متغیر را داریم.

• آنالیز گاز سر مربوط به عمیات خضار (جبر خضار) و سوز.

• ہمارے A کا رنگ دیکھو

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

اگر دو برابر آید و $\frac{1}{2}$ اِطریق ماکثر A به هم مربوط باشند

$$\vec{v} = A\vec{u} \Rightarrow v_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} u_j \quad i=1, 2, 3$$

جس کو ملنے پر ہمارے لئے، یہ ایک منفعت ہے

دایره بر عناصر ماتریس a_{ij} به رنگه ممقات گیر دار. DK : طایعات a_{ij} و a_{ji} مانور ایسا
 روتا مانور لایحه مربوط کند. $a'_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} a_{ij}$
 representation (نماینه) گیر دار
 عبارت گیر دار به
 غنام

DK: آيا representation يک تاکير يکيز نوتيس مولفہ لارز تاکير اريد، همداخت خاص؟

تفویض نامہ میں یہ قیود اسکاہ عمقہ؟

(۱) این صورت نمایانگر مختلف یک گروه نیز نوشته ماتریکس معین شده کرده است، گاه چند بار مختلف

③ Equality

$$A=B \iff a_{ij}=b_{ij} \quad \forall i,j$$

④ Addition

$$A+B=C \iff a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=B+A \\ (A+B)+C=A+(B+C) \end{cases}$$

⑤ Multiplication by a scalar:

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij} \quad \alpha = \text{scalar}$$

$$\alpha A = A\alpha$$

⑥ Matrix multiplication:

$$* AB=C \Rightarrow$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$* AB \neq BA \quad \text{ماتریس ضرب با هم سازگار نیست}$$

$$* (AB)C = A(BC)$$

$$* A(B+C) = AB+AC$$

• Direct product (Kronecker product):

$$A_{m \times n}, B_{n \times n} \rightarrow C_{mn \times mn}$$

$$A \otimes B = C \Rightarrow \begin{cases} C_{\alpha\beta} = A_{ij} B_{kl} \\ \alpha = n(i-1) + k \\ \beta = n(j-1) + l \end{cases}$$

به این فرم direct tensor product و Kronecker product هم گفته می شود.

— به عنوان مثال اگر A و B هر دو 2×2 باشند

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{12} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ a_{21} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{22} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

3, 4, 5, 6, 7

• Direct product is associative;

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

but not commutative:

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

- ماتریس 1 فقط در فضای 1 است و بقیه عناصر 0 هستند. ماتریس صفر هم هست.

• Special case:

$$\text{Column vector } |x\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{ket})$$

$$\text{Row vector } \langle x| = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{bra})$$

نیاز به این دو برای یکدیگر هستند

$$A|x\rangle, \langle x|A$$

- در مکانیک کوانتوم بردار $|x\rangle$ یک فضای حالت در بردار $\langle x|$ در فضای dual قرار دارد.
همچنین در $\langle x|x\rangle$ ضرب داخلی است، زیرا ضرب داخلی یک بردار با بردار دوگانه/توابع آن قرار

• Diagonal matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

If A and B are diagonal $\Rightarrow AB = BA$

• Trace:

مجموع عناصر قطر مربعی Trace کی تاثر گزینہ

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (A_{ik} B_{ki})$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (B_{ki} A_{ik})$$

$$= \sum_{k=1}^n (BA)_{kk}$$

$$= \text{Tr}(BA)$$

• Matrix Inversion:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

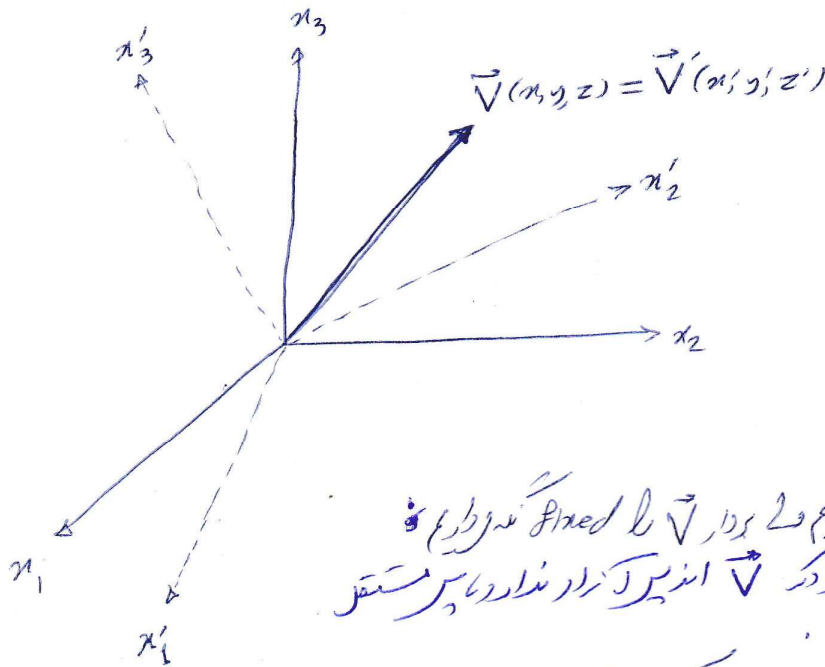
$$\text{Exercises 4.2.32} \Rightarrow a_{ij}^{-1} = \frac{C_{ji}}{|A|} = (A^{-1})_{ij}$$

صفحہ 148 لایو
مٹو کریم

C_{ji} = Cofactor of $|A|$

ہر منکوبہ ماتریس موثر و معکوس ہے $|A| \neq 0$ ہوتی ہے۔

4.3 Orthogonal Matrices:



• دستگاه مختصات را می‌توانیم در بردار $\vec{V}$ fixed نگه داریم و
 $\vec{V} = V_i \hat{e}_i$: DK در مختصات نوک $\vec{V}$ اندیز که در بردارهای مستقل
 از دستگاه مختصات است.
 بردار $\vec{V}$ را در نظر بگیریم. مؤلفه‌های آن تغییر نمی‌کند (x, y, z) :

$$\vec{V}(x, y, z) = \hat{i} V_x + \hat{j} V_y + \hat{k} V_z \quad (V.1)$$

$$= \vec{V}'(x', y', z') = \hat{i}' V_{x'} + \hat{j}' V_{y'} + \hat{k}' V_{z'}$$

- حال $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ را بر حسب $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ حساب کرده و معادله در هم قرار می‌دهیم و مؤلفه‌های $\vec{V}$ را بر حسب مؤلفه‌های

$$\hat{i}' = \hat{i} a_{11} + \hat{j} a_{12} + \hat{k} a_{13} \quad \vec{V}' = \hat{i}' V_{x'} + \hat{j}' V_{y'} + \hat{k}' V_{z'}$$

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i} a_{11} + \hat{j} a_{12} + \hat{k} a_{13} \\ \hat{j}' = \hat{i} a_{21} + \hat{j} a_{22} + \hat{k} a_{23} \\ \hat{k}' = \hat{i} a_{31} + \hat{j} a_{32} + \hat{k} a_{33} \end{cases} \quad (V.2)$$

$$a_{ij} = C_{ij}(x'_i, x_j) =$$

مؤلفه‌های ماتریس متعام

$$V_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} V'_j \quad (V.2)$$

مطابق این معادله است. (تأیید شود)
 حال V_i را به عنوان $\hat{i}$ می‌گیریم. (برای این منظور باید رابطه
 Orthogonality $\sum_j a_{ij} a_{jk} = \sum_j a_{ji} a_{kj} = \delta_{ik}$ استفاده کرده و برای $k=i$ خواهیم
 (دوباره درست کردیم - صفحه 150)

Since we have

$$a_{ij} = \cos(\pi'_i, \pi_j) = \hat{x}'_i \cdot \hat{x}_j$$

شبهه معادلات (V.2) $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ را به $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$

$$\begin{cases} \hat{i} = \hat{i}' a_{11} + \hat{j}' a_{21} + \hat{k}' a_{31} \\ \hat{j} = \hat{i}' a_{12} + \hat{j}' a_{22} + \hat{k}' a_{32} \\ \hat{k} = \hat{i}' a_{13} + \hat{j}' a_{23} + \hat{k}' a_{33} \end{cases}$$

(V.2) بردار $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ را

بر حسب $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ می‌نویسیم

(V.2') و بالعکس

$$\hat{i}' = \hat{i} \cos(\pi_1, \pi'_1) + \hat{j} \cos(\pi_1, \pi'_2) + \hat{k} \cos(\pi_1, \pi'_3)$$

حال در طرف اول (V.1) $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ را به رابطه قرار دهیم:

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} V_j$$

(V.2')

II DK: وقتی از دستگاه $\{V_j\}$ به دستگاه $\{V'_i\}$ داریم:

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$$

وقتی از دستگاه $\{V'_i\}$ به دستگاه $\{V_j\}$ داریم:

$$a'_{ij} = \frac{\partial (x'_i)'}{\partial x'_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = a_{ji}$$

برای $\hat{i}$ و $\hat{j}$ (V.2) یکبار دیگر می‌گیریم و دوباره به رابطه (V.2') می‌رسیم

$$(V.1) \& (V.2) \Rightarrow V'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} V_j \quad (V.3)$$

یعنی بردار است که در قاعده مختصات جدید تعریف می‌شود.

اگر $\vec{V} = \vec{r}$ را مضمون

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$$

• Orthogonality condition

$$\vec{r} = \vec{r}'$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = \vec{r}' \cdot \vec{r}'$$

$$\Rightarrow \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i'^2$$

$$= \sum_i (x'_i)(x'_i)$$

$$= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) \left(\sum_k a_{ik} x_k \right)$$

$$= \sum_j \sum_k \left[x_j x_k \left(\sum_i a_{ij} a_{ik} \right) \right] \quad (V.4)$$

برای این طرف دوم برابر طرف اول باشد:

$$\boxed{\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}}, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (V.5)$$

Orthogonality condition

ملاحظه می‌شود که شرط تعادل در این حالت نگه‌دارد.

orthogonality (۷.۵) طرولابت سترک (invariant) به این لایه
گفتار بود

- حال جاری غنا و کرم مائوس در دستگیر

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (V.6)$$

دو ماتریس $transpose$ را بصورت زیر تعریف کنید

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (V.7)$$

$$\sum_i (a_{ij} a_{ik}) = \delta_{jk}$$

$$\sum_i A_{ij} A_{ik} = \mathbb{1}_{jk} \Rightarrow \sum_i \tilde{A}_{ji} A_{ik} = \mathbb{1}_{jk} \Rightarrow (\tilde{A}A)_{jk} = \mathbb{1}_{jk}$$

(v.5) $\Rightarrow \boxed{\tilde{A}A = \mathbb{I}}$ $\leftarrow$ Another form of the orthogonality condition (v.8)

لاگزیٹس کو وضع : Orthogonality condition

Introduce $(V'.2)$ into $(V'''.2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} V'_i &= \sum_j a_{ij} V_j \\ &= \sum_j a_{ij} \left(\sum_k a_{kj} V'_k \right) \\ &= \sum_k \left[V'_k \left(\sum_j a_{ij} a_{kj} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_j (a_{ij} a_{kj}) = \delta_{ik}}$$

$$\Rightarrow a_{ij} \tilde{a}_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\Rightarrow \boxed{A \tilde{A} = \mathbb{I}}$$

If we introduce $(V'''.2)$ into $(V'.2)$ we obtain

$$\tilde{A} A = \mathbb{I}$$

• Inverse Matrix, A^{-1} :

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$|x\rangle$ یک بردار ستون است

ماتریس A این بردار را به بردار دیگری $|x'\rangle$ تبدیل می‌دهد:

$$|x'\rangle = A|x\rangle \quad (V.9)$$

ماتریس معکوس A^{-1} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x\rangle \equiv A^{-1}|x'\rangle \quad (V.10)$$

$$(V.9) \& (V.10) \Rightarrow |x\rangle = A^{-1}(A|x\rangle) \\ = (A^{-1}A)|x\rangle$$

چون $|x\rangle$ دلخواه است

$$\Rightarrow \boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}} \quad (V.11)$$

$$\begin{aligned} |x'\rangle &= A|x\rangle \\ &= A(A^{-1}|x'\rangle) \\ &= (AA^{-1})|x'\rangle \end{aligned}$$

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \Downarrow$$

$$\tilde{A} A = \mathbb{1}$$

orthogonal condition (ف. 12)

$$\tilde{A} A \tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{A} = A^{-1}} \leftarrow \text{مصفی وارثی متعکس}$$

(V.12)

$$\Rightarrow A \tilde{A} = A \tilde{A}^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow \boxed{A \tilde{A} = \tilde{A} A = \mathbb{1}}$$

(V.13)

$$A \tilde{A} = \mathbb{1} \Rightarrow (A \tilde{A})_{jk} = \delta_{jk}$$

$$\sum_i a_{ji} \tilde{a}_{ik} = \delta_{jk}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}} \rightarrow \text{Another form of the orthogonalizing condition. (V.14)}$$

• معادلات زیر را در نظر بگیرید: $\vec{r}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\phi}_0$ و $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ را در نظر بگیرید.
 و نکته:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{\theta}_0 \\ \vec{\phi}_0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Exercies 2.5.1 $\Rightarrow C = \begin{pmatrix} L \cos \varphi & L \sin \varphi & 0 \\ 0 \cos \varphi & 0 \sin \varphi & -L \\ -L \varphi & 0 \varphi & 0 \end{pmatrix}$ (V.15)

ماتریس C متعامد است

$$C\tilde{C} = \tilde{C}C = 1$$

or $C^{-1} = \tilde{C}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{\theta}_0 \\ \vec{\phi}_0 \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{\theta}_0 \\ \vec{\phi}_0 \end{pmatrix}$$

• Successive Rotations, Matrix Multiplication:

تعریف ماتریسهای خطی است در اینجا:
- ماتریس orthogonal به نظر می آید:

$$\begin{cases} |x'\rangle = A|x\rangle \\ |x''\rangle = B|x'\rangle \end{cases} \quad (V.15)$$

$$\Rightarrow |x''\rangle = (BA)|x\rangle \quad (V.16)$$

- به صورت مؤلفه:

$$x''_i = \sum_k (BA)_{ik} x_k \quad (V.17)$$

- از طرف دیگر (V.5) می توان نوشت:

$$x''_i = \sum_j b_{ij} x'_j$$

$$= \sum_{j'} b_{ij'} \left(\sum_k a_{j'k} x_k \right)$$

$$= \sum_k \left[\sum_{j'} (b_{ij'} a_{j'k}) \right] x_k \quad (V.18)$$

$$(V.17) \& (V.18) \Rightarrow (BA)_{ik} = \sum_j (b_{ij} a_{jk}) \quad (V.19)$$

تعریف ماتریس

● Euler Angles:

- ماتریس تبدیل A^V دارای ۹ ^{متغیر} عضو است. اما طبق شرط متعامد بودن:

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

شرط متعامد بودن ۳ معادله مستقل دارد که می‌توانیم بنویسیم:
 $(i, j, k) \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
 بنا بر این تعداد معادله مستقل فقط ۳ تا باشد.

توانیم این سه عضو مستقل را به سه محور ارتقا بدهیم: دو زاویه θ و ϕ محور دوران

به ϕ fixed کنیم. عضو باقیمانده در جهت ϕ محور را معین کنیم. θ و ϕ در 0 و 2π در میانه به این سه عضو زاری می‌آوریم گشته.



- سه چرخش بی‌تأثیر صورت می‌گیرد (که هر یک در جهت عقربه‌های ساعت) داریم:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \xrightarrow{\alpha \text{ around } \alpha_3} (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) \xrightarrow{\beta \text{ around } \alpha'_2} (\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3) \xrightarrow{\gamma \text{ around } \alpha''_3}$$

(V.20)

$$\longrightarrow (\alpha'''_1, \alpha'''_2, \alpha'''_3)$$

شکل 4.3 به معنی (صفحه بعد)

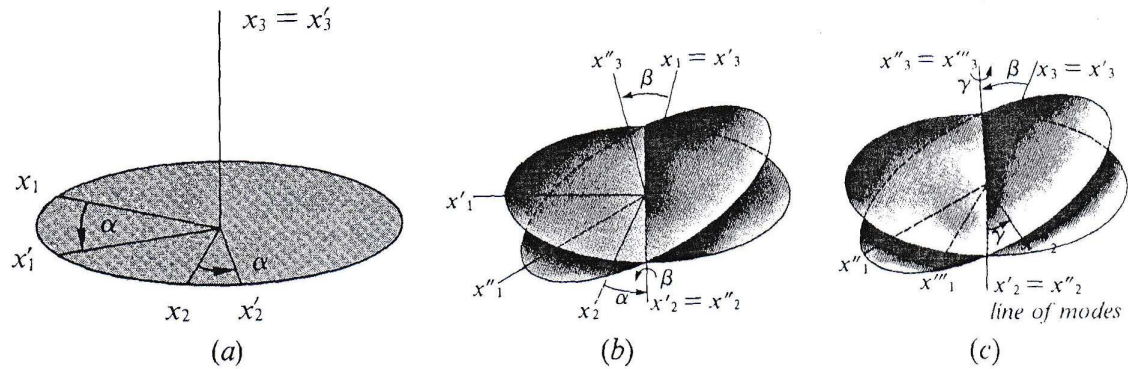


FIG. 4.3 (a) Rotation about x_3 through angle α ; (b) Rotation about x_2' through angle β ; (c) Rotation about x_3'' through angle γ .

three independent parameters rather than the redundant direction cosines. The usual choice of parameters is the Euler angles.³

The goal is to describe the orientation of a final rotated system (x_1''', x_2''', x_3''') relative to some initial coordinate system (x_1, x_2, x_3). The final system is developed in three steps—each step involving one rotation described by one Euler angle (Fig. 4.3):

1. The x_1' -, x_2' -, x_3' -axes are rotated about the x_3 -axis through an angle α counterclockwise relative to x_1, x_2, x_3 . (The x_3 - and x_3' -axes coincide.)
2. The x_1'' -, x_2'' -, x_3'' -axes are rotated about the x_2' -axis⁴ through an angle β counterclockwise relative to x_1', x_2', x_3' . (The x_2' - and the x_2'' -axes coincide.)
3. The third and final rotation is through an angle γ counterclockwise about the x_3'' -axis, yielding the x_1''', x_2''', x_3''' system. (The x_3'' - and x_3''' -axes coincide.)

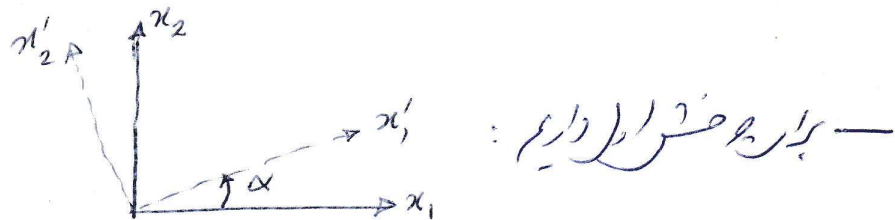
The three matrices describing these rotations are

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

exactly like Eq. 4.66,

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

and



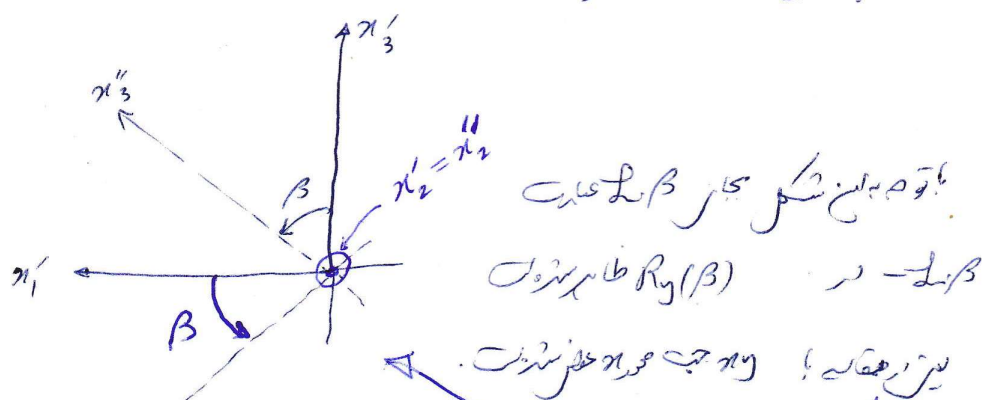
$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha \\ x_2' = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + 0 x_3 \\ x_2' = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + 0 x_3 \\ x_3' = 0 x_1 + 0 x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (V.21)$$

به ترتیب حول x_2' بگردانیم β :

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (V.22)$$

در $V.22$ $\sin \beta \rightarrow -\sin \beta$ و $\cos \beta \rightarrow \cos \beta$ را
چون x_2' محور میماند و x_1' و x_3' به اندازه β میگردانند

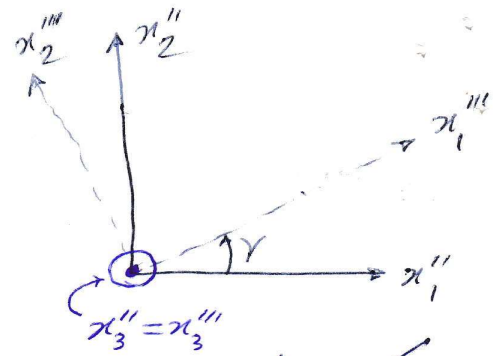


محور x_1'' زیر محور x_1' قرار گرفته است β —

و محور x_3'' —

محور x_3'' به سمت بالا قرار گرفته است β —

$$(V.23) \quad R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



— کچھ چیزیں: $A(\alpha, \beta, \gamma)$ سے C پر لکھ دیں:

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_z(\alpha) \quad (V.24)$$

نوٹ: اگر α, β, γ جو فائنل ایسز اور ان کے باہر ایسز $R_z(\alpha)$ کے سترہ سے ترتیب

$R_z(\gamma), R_y(\beta)$

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = (4.87) \text{ Page 200}$$

● Two Techniques :

— دو تکنیک S و T سکالر نیز هستند در نظر بگیرید :

$$(ST)(ST)^{-1} = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{S^{-1}(ST)(ST)^{-1}}_1 = S^{-1}$$

$$\underbrace{T^{-1}T}_{1}(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}}$$

(V.25)

— ماتریس S و T لزوماً متعامد نیستند :

$$U \equiv ST$$

$$u_{ik} = \sum_j s_{ij} t_{jk}$$

$$= \sum_j \tilde{s}_{ji} \tilde{t}_{kj} = \sum_j \tilde{t}_{kj} \tilde{s}_{ji} = (\tilde{T} \tilde{S})_{ki}$$

$$u_{ik} = \tilde{u}_{ki} = (\tilde{U})_{ki} = (\tilde{S} \tilde{T})_{ki}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\tilde{S} \tilde{T}) = \tilde{T} \tilde{S}}$$

(V.26)

● Symmetry properties:

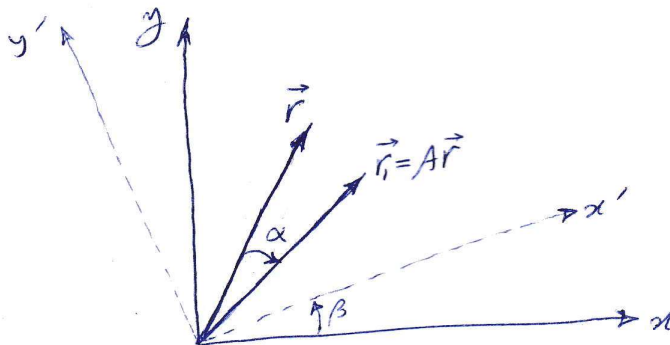
If $A = \tilde{A} \Rightarrow a_{ij} = \tilde{a}_{ij} = a_{ji} \Rightarrow A$ is symmetric,

If $A = -\tilde{A} \Rightarrow a_{ij} = -\tilde{a}_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow A$ is anti-symmetric.

- هر ماتریس مربع بصورت مجموع از ماتریس متقارن و پادمتقارن است :

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + \tilde{A})}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - \tilde{A})}_{\text{پادمتقارن}}$$

● Similarity Transformation:



ماتریس B
DK: ماتریس A با دوران دستگاه
 مختصات ارتباطی ندارد.

- ماتریس A برای $\vec{r}$ (جهت) تبدیل کننده $\vec{r}$ است. اما دستگاه مختصات نمی‌چرخد:

$$\vec{r}_i = A \vec{r} \quad \text{DK: لا یجوز أن یصلح أن یقلد}$$

(V.27)

- ماتریس B محور مختصات را می‌چرخاند. دستگاه $x'z'$ به xz می‌چرخد، اما برای $\vec{r}$ نمی‌چرخد.

$$(V.27) \Rightarrow B\vec{r}_1 = BA\vec{r}$$

$$= BA(B^{-1}B)\vec{r}$$

$$= (BAB^{-1})B\vec{r}$$

(V.28)

در B ، رنگ فقط $\vec{r}$ و $\vec{r}_1$ و بردار $\vec{r}$ و $\vec{r}_1$ را تغییر می‌دهد.

پایه جدید (A)

$$\begin{cases} \vec{r}' = B\vec{r} \\ \vec{r}_1' = B\vec{r}_1 \end{cases}$$

برای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}$ در یک خط هستند:

(V.29) $\underline{DK}$ و $\vec{r}' = B\vec{r}$ نسبت به $\vec{r}$ و $\vec{r}_1$ (در یک خط هستند) $B\vec{r} = \vec{r}'$ نسبت به $\vec{r}$ و $\vec{r}_1$ (در یک خط هستند).

$$(V.28) \& (V.29) \Rightarrow \vec{r}_1' = (BAB^{-1})\vec{r}'$$

(V.30)

در یک خط با (V.27) داریم:

$$\vec{r}_1' = A'\vec{r}'$$

(V.31)

$$A' = BAB^{-1}$$

پایه جدید (V.32)

تبدیل (V.32) نیز:

$$A \rightarrow A' = BAB^{-1}$$

(V.33)

Similarity transformation

در (V.33) ماتریس B لزوماً متعامد نیست.

$$(A) \vec{r}' = B\vec{r} \Rightarrow$$

$x'_i = B_{ij}x_j \Rightarrow B = \text{rotation matrix for rotating coordinates.}$

② Relation to Tensors:

If B is orthogonal; i.e. $B^{-1} = \tilde{B}$, then

$$A' = B A \tilde{B} \quad \text{"orthogonal similarity transformation"} \quad (V.34)$$

(O.S.T.)

$$\Rightarrow A'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} a_{kl} \tilde{b}_{lj}$$

$$= \sum_{k,l} b_{ik} a_{kl} b_{jl}$$

$$= \sum_{k,l} b_{ik} b_{jl} A_{kl} \quad (V.35)$$

شیر A_{ij} یک تانسور مرتبه 2 است با کینومتر k, j و i, j اینده A_{ij} تانسور است که اینها هم زینت میزند در $\vec{r} = A \vec{r}$ و A در این بردار هم مربوط میزند. در یک عدد DK است (O.S.T.) متقارن و باز متقارن بودن حفظ می شود.

⊙ مثلاً اگر A متقارن $\Rightarrow$ ~~مادامه~~ باز متقارن باشد:

$$A' = B A \tilde{B}$$

$$\Rightarrow \tilde{A}' = (\tilde{B}) \tilde{A} \tilde{B} = B \tilde{A} \tilde{B}$$

$$\text{If } A = \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A}' = B A \tilde{B} = A' \Rightarrow \tilde{A}' = A' \Rightarrow A' \text{ is symmetric}$$

$$\text{If } A = -\tilde{A} \Rightarrow \tilde{A}' = B \tilde{A} \tilde{B} = -B A \tilde{B} = -A' \Rightarrow \tilde{A}' = -A' \Rightarrow A' \text{ is anti-symmetric}$$

4.4 Oblique Coordinates:

• تاکنون تمام دستگاه مختصات استفاده کردیم، متعامد (orthogonal) و غیر متعامد

$$g_{ij} = 0, i \neq j, g_{ii} = h_i^2 \quad (0.1)$$

• اما گاهی در فیزیک شرایطی پیش می آید که مختصات non-orthogonal یا oblique استفاده می شود. مثلاً در توصیف کریستال، دستگاه مختصات انتخاب می شود که منطبق بر تقارن کریستال باشد.

• دستگاه مختصات بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ در نظر بگیریم.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are not orthogonal basis

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ are orthogonal basis

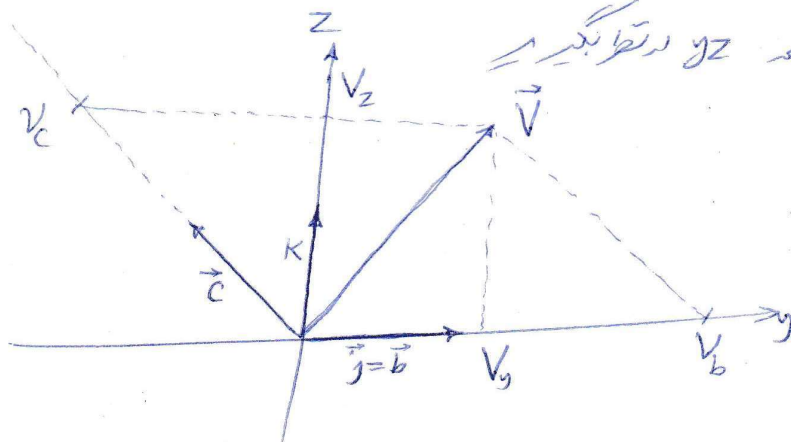
اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ را هم بردار بگیریم و هم $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ را هم بردار بگیریم. هر دو بردار طول و جهت دارند.

یک بردار دهانه بصورت زیر می بینیم: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ استفاده می کنیم.

$$\vec{V} = \hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z = \vec{a}V_a + \vec{b}V_b + \vec{c}V_c = \vec{V} \quad (0.2)$$

اساساً بردار در دستگاه $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ در $\vec{V}$ اگر $\vec{V}$ را می بینیم $\vec{V} = \vec{V}$

• مثلاً بردار در صفحه xy در نظر بگیریم.

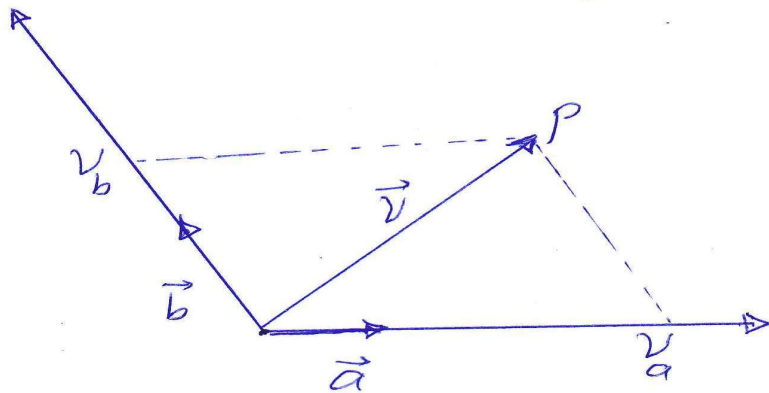


مقادیر V_a, V_b, V_c را اندازه می گیریم تا نقطه $\vec{V}$ را قطع کند. این مؤلفه V_a را می دهیم. مقادیر V_a, V_b, V_c را اندازه می گیریم تا نقطه $\vec{V}$ را قطع کند. این مؤلفه V_a را می دهیم.

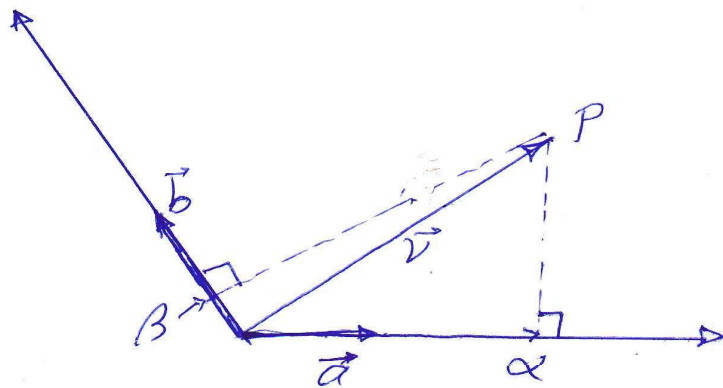
DK: A note on oblique coordinates

Consider 2-dimensional case.

For defining the coordinates of a point we can use each of the following definitions:



1) From "P" parallel to the axes.



2) From "P" perpendicular to axes.

Both methods gives unique coordinates to "P".

In the first method we have

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_b = \vec{a}v_a + \vec{b}v_b$$

but in the second we obtain.

$$\vec{v} \neq \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \leftarrow$$

[[162]]
[در اینجا به روش اول، یعنی از P موازی با محاوره ها، مختصات یکتا به دست می آید]

— اگر بردار مولفه V_n هم راست است و هم چپ است
در اینجا بردار V_n مولفه V_a ، V_b ، V_c باشد
بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ هم راست است و هم چپ است و V_c هم چپ است.

• بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ در دستگاه دکارتی به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z \\ \vec{b} = \hat{i}b_x + \hat{j}b_y + \hat{k}b_z \\ \vec{c} = \hat{i}c_x + \hat{j}c_y + \hat{k}c_z \end{cases} \quad (0.3)$$

حال این بردارها را در (0.2) جایگزین می‌کنیم،

$$\begin{cases} V_n = a_x V_a + b_x V_b + c_x V_c \\ V_y = a_y V_a + b_y V_b + c_y V_c \\ V_z = a_z V_a + b_z V_b + c_z V_c \end{cases} \quad (0.3)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_n \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}}_{\vec{P}} \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = P \vec{v}$$

(0.4)

تبدیل
- ماتریس P یک ماتریس متعامد است (بردارهای متعامد) بین $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

متعامد نیستند

$$P = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow \tilde{P}P = \begin{pmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & |\vec{b}|^2 & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & |\vec{c}|^2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{1}$$

با ملاحظه این است که متعامد نبودن
ماتریس P ناشی از متعامد نبودن بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ است
- حال اگر ما P^{-1} را حساب کنیم:

بسیار مهم

$$\vec{V} = P\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = P^{-1}\vec{V}$$

ماتریس Q را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\tilde{Q} = (\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') = \begin{pmatrix} a'_x & b'_x & c'_x \\ a'_y & b'_y & c'_y \\ a'_z & b'_z & c'_z \end{pmatrix} \quad (0.6)$$

Q را بدین شکل

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

$$\vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

$$\vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

- بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ یک یک عمود می‌شوند

بردارهای $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ یک یک متعامد (reciprocal)

با تعریف کردیم. با توجه به این بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ را می‌توانیم

به هم مربوط هستیم این را می‌توانیم مستقل هم بنویسیم یکدیگر

هستند. برآیند حجم: $\vec{a}'$ بر $\vec{b}, \vec{c}$ عمود است

$\vec{b}'$ بر $\vec{c}, \vec{a}$ عمود است

$\vec{c}'$ بر $\vec{a}, \vec{b}$ عمود است

- نتیجه می‌گیریم:

این بردارها در بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ رابطه زیر را برقرار می‌دهند:

$$\begin{cases} \vec{a}' \cdot \vec{b} = \vec{a}' \cdot \vec{c} = \vec{b}' \cdot \vec{a} = \vec{b}' \cdot \vec{c} = \vec{c}' \cdot \vec{a} = \vec{c}' \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a}' \cdot \vec{a} = \vec{b}' \cdot \vec{b} = \vec{c}' \cdot \vec{c} = 1 \\ \vec{a}' \cdot (\vec{b}' \times \vec{c}') = (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))^{-1} \\ \vec{a} = \frac{\vec{b}' \times \vec{c}'}{\vec{a}' \cdot (\vec{b}' \times \vec{c}')} \end{cases} \quad (0.7)$$

چون بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ هم‌بسته باشند، ما نیز Q هم متعامد نیست.
 متعامد نبودن Q مانع از این است که بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ هم‌بسته نباشند.
 $Q\tilde{Q} \neq 1$
 اگر رابطه بین بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ با بردار $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ است که به این ترتیب

$$PQ = QP = 1 \Rightarrow \begin{cases} Q = P^{-1} \\ P = Q^{-1} \end{cases} \quad (0.8)$$

$$\Rightarrow \vec{v} = Q\vec{V}$$

اگر $\vec{v}$ را ket, bra به کار ببریم داریم

$$\begin{cases} |\vec{V}\rangle = P|\vec{v}\rangle \\ |\vec{v}\rangle = Q|\vec{V}\rangle \end{cases} \quad (0.9)$$

اگر رابطه Transpose بگیریم:

$$\begin{cases} \langle \vec{V} | = \langle \vec{v} | \tilde{P} \\ \langle \vec{v} | = \langle \vec{V} | \tilde{Q} \end{cases} \quad (0.10)$$

توجه: $|\vec{v}\rangle$ و $|\vec{V}\rangle$ بردارهای ستون هستند و $\langle \vec{v} |$ و $\langle \vec{V} |$ بردارهای سطر هستند.

• $\vec{V}$ بر حسب $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ برآورد

برای یافتن $\vec{V}$ از معادله (4.102) استفاده می‌کنیم:

$$(4.102) \Rightarrow \vec{V} = \hat{i} V_x + \hat{j} V_y + \hat{k} V_z = \vec{a}' v'_x + \vec{b}' v'_y + \vec{c}' v'_z = \vec{v}'$$

$$\begin{cases} \vec{a}' = i a'_x + j a'_y + k a'_z \\ \vec{b}' = i b'_x + j b'_y + k b'_z \\ \vec{c}' = i c'_x + j c'_y + k c'_z \end{cases}$$

- از رابطه (4.104) می‌توانیم بنویسیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{V} = \tilde{Q} \vec{v}' \\ \vec{v}' = \tilde{Q}^{-1} \vec{V} \end{cases}$$

$$Q^{-1} = P \Rightarrow (\tilde{Q}^{-1}) = \tilde{P} \Rightarrow \tilde{Q}^{-1} = \tilde{P}$$

$$\Rightarrow \vec{v}' = \tilde{P} \vec{V}$$

- به زبان ket و bra داریم:

$$\begin{cases} |V\rangle = \tilde{Q} |v'\rangle \Rightarrow \langle V| = \langle v'| Q \\ |v'\rangle = \tilde{P} |V\rangle \Rightarrow \langle v'| = \langle V| P \end{cases} \quad (0.11)$$

حال اگر $\vec{V}$ را به صورت $\vec{V} = \vec{a}' v'_x + \vec{b}' v'_y + \vec{c}' v'_z$ بنویسیم:

$$|V\rangle = \tilde{Q} |v'\rangle \Rightarrow \langle V| = \langle v'| Q \quad (0.12)$$

— حاصل ضرب اسکالر بردار $|V\rangle$ ، $\langle V|$ به صورت بردار

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \tilde{U} V = (U_1, U_2, \dots) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (0.13)$$

به زبان ket, bra

$$\langle U|V\rangle \stackrel{0.12}{=} \langle u'|Q|V\rangle$$

$$\stackrel{0.9}{=} \langle u'|v\rangle \quad (0.14)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle V|V\rangle = \langle v'|v\rangle} \quad (0.15)$$

$\Rightarrow |\vec{V}|^2 \neq |\vec{v}|^2$

میزان $|\vec{V}|^2$ در دستگاه $\vec{u}$ بیانگر بردار $\vec{V}$ است
برای $|\vec{V}|^2$ نسبت به $\vec{v}$ به صورت $\vec{v} \cdot \vec{v}'$ است.

DK: (0.14) $\{ \}$

$$\langle U|V \rangle = \langle u|v \rangle$$

آء برآء $\langle u|v' \rangle$ ءء ءء ؟

$$\begin{aligned} \langle U|V \rangle &\stackrel{(0.10)}{=} \langle u|\tilde{P}\tilde{Q}|V \rangle \quad \stackrel{(0.11)}{=} \langle u|v' \rangle \\ &= \langle u|v' \rangle \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} &\stackrel{(0.11)}{=} \langle u|\tilde{P}\tilde{Q}|v' \rangle \\ &= \langle u|(\tilde{Q}\tilde{P})|v' \rangle \\ &\stackrel{(0.8)}{=} \langle u|\mathbb{I}|v' \rangle \\ &= \langle u|v' \rangle \end{aligned}$$

$$|U\rangle = P|u\rangle$$

نوع : 

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \langle U| = \langle u| \tilde{P} \\ |V\rangle = P|v\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\langle U|V\rangle = \langle u| \tilde{P} P |v\rangle$$

(10.16)

مال کٹر $\vec{U} = \vec{V} = d\vec{R} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$: نوع

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\Rightarrow ds^2 \equiv \langle dR | dR \rangle = \langle dr | \tilde{P} P | dr \rangle$$

نوع $d\vec{R}$ در دستگاه کلاسیک $\vec{dr}$ در دستگاه کوانتومی

$$ds^2 = \langle dR | dR \rangle = (dx, dy, dz) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

نوع در دستگاه کلاسیک

$$|dr\rangle = \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 = \langle dr | (\tilde{P} P) | dr \rangle =$$

$$= \sum_{i,j} (\tilde{P} P)_{ij} dq_i dq_j = \sum_{i,j} Q_{ij} dq_i dq_j$$

(10.17)

نوع $Q_{ij} = (\tilde{P} P)_{ij}$: نوع

(168)

*. 2 Hermitian matrices, unitary matrices

Definitions

1) complex conjugate (مزدوج متکمل)

$$A|_{i \rightarrow -i} = A^*, \quad i^r = -1$$

2) Adjoint A^+ (= A-dagger)

$$A^+ = \tilde{A}^* = (\tilde{A})^*$$

3) Hermitian matrix

$$A = A^+ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{در حالت حقیقی} \end{array} \right. \quad A^+ \rightarrow \tilde{A}$$

$$\Rightarrow A = \tilde{A} \Rightarrow A = \text{متقارن}$$

4) Unitary matrix

$$U^+ = U^{-1} \Rightarrow U^+ U = U U^+ = \mathbb{1}$$

$$U^+ \rightarrow \tilde{U} \quad \text{در حالت حقیقی}$$

$$\Rightarrow \tilde{U} = U^{-1} \Rightarrow \tilde{U} U = U \tilde{U} = \mathbb{1} \Rightarrow U = \text{متعامد}$$

در فضای حقیقی، A متناظر

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$r' = Ar, \quad \tilde{r}' = \tilde{r} \tilde{A} \Rightarrow \tilde{r}' r' = \tilde{r} \tilde{A} A r$$

$$\tilde{r}' r' = \tilde{r} r \Rightarrow \tilde{A} A = \mathbb{I}$$

یعنی ماتریس متناظر در فضای حقیقی
طول بردار را ثابت نگه می‌دارد.

- در فضای مختلط، U یکانی

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad V' = UV$$

$$V'^{\dagger} V' = V^{\dagger} \underbrace{U^{\dagger} U}_{\mathbb{I}} V \Rightarrow U^{\dagger} U = \mathbb{I} \Rightarrow V'^{\dagger} V' = V^{\dagger} V$$

یعنی تبدیل بردار با U طول بردار را در فضای مختلط ثابت نگه می‌دارد.

در فضای حقیقی - orthogonal transformation

$$\tilde{B} B = B \tilde{B} = \mathbb{I} \rightarrow B^{-1} = \tilde{B}$$

$$A \rightarrow A' = B A B^{-1} \quad (\text{similarity transformation})$$

$$\xrightarrow{\text{متناظر } B} A \rightarrow A' = B A \tilde{B} \quad (\text{orthogonal similarity transformation})$$

در فضای هیلبرت

Unitary transformation

تبدیل یکانی

$$U^\dagger = U^{-1}$$

$$A \longrightarrow A' = U A U^{-1} = U A U^\dagger$$

اگر U و V یکانی باشند آنگاه UV یکانی است.

اثبات:

$$(U, V)^\dagger = \left[\widetilde{(U, V)}^* \right] = \left[\widetilde{U^* V^*} \right] = \widetilde{V^*}^\dagger \widetilde{U^*}^\dagger = V^\dagger U^\dagger$$

$$\Rightarrow (U_1 U_2 \dots U_n)^\dagger = U_n^\dagger U_{n-1}^\dagger \dots U_2^\dagger U_1^\dagger$$

$$(U, V)^\dagger (U, V) = U^\dagger U \underbrace{V^\dagger V}_{\mathbb{I}} = U^\dagger U = \mathbb{I}$$

$$(U, V) (U, V)^\dagger = \mathbb{I} \longrightarrow U, V = \text{unitary}$$

pauli matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}, \quad \vec{\sigma} = \hat{i} \sigma_x + \hat{j} \sigma_y + \hat{k} \sigma_z$$

$$1) \{ \sigma_i, \sigma_j \} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{ij} \mathbb{I}_{2 \times 2}$$

$$2) \sigma_i \sigma_j = i \sigma_k \text{ (cyclic) , } \begin{matrix} \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_2 \rightarrow \sigma_3 \end{matrix}$$

$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$$

$$\sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1$$

$$\sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2$$

$$3) (\sigma_i)^2 = \mathbb{I}_{2 \times 2}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{I}_{2 \times 2} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$((\sigma_i \sigma_j) = \delta_{ij} \mathbb{I}_{2 \times 2} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k) \times A_i B_j \Rightarrow$$

دو طرف را در این عبارت ضرب می کنیم

$$(A_i \sigma_i) (B_j \sigma_j) = A_i B_j \delta_{ij} \mathbb{I}_{2 \times 2} + i (\epsilon_{ijk} A_i B_j) \sigma_k$$

مجموعه کلام $\epsilon_{kij} A_i B_j = (A \times B)_k$

$$(\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) (\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \mathbb{I}_{2 \times 2} + i (\vec{A} \times \vec{B})_k \sigma_k$$

$$\times (\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) (\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \mathbb{I}_{2 \times 2} + i (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma}$$

$$\vec{A} = \vec{B} = \vec{p} - i e \vec{a} \quad (m, y, z, t)$$

$\hookrightarrow -i \hbar \vec{\nabla}$

اگر در * این عبارت را
تکرار دهیم * همان معادله
از معادله دیراک استخراج می شود.

- مجموعه $\{ \mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \}$ یک مجموعه کامل است. یعنی هر ماتریس

2×2 را می توان بر حسب این مجموعه بسط داد.

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$M = c_0 \mathbb{I} + c_1 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_3 \sigma_z$$

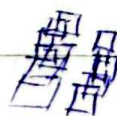
$$\Rightarrow \begin{cases} M_{11} = c_0 + c_3 \\ M_{12} = c_1 - ic_2 \\ M_{21} = c_1 + ic_2 \\ M_{22} = c_0 - c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \frac{1}{2} (M_{11} + M_{22}) \\ c_1 = \frac{1}{2} (M_{12} + M_{21}) \\ c_2 = \frac{i}{2} (M_{12} - M_{21}) \\ c_3 = \frac{1}{2} (M_{11} - M_{22}) \end{cases}$$

Hyper matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots \end{pmatrix} = (\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad \dots)$$

ما ترانس ماتریس را روی هم میگذاریم
و ابعاد را افزایش می دهیم.

$$M_{m_1 \times m_2 \times m_3 \times m_4 \times \dots \times m_d}$$



- Dirac matrices

$$\sigma_{i, \text{Dirac}} = A_{r,r} \otimes B_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} B & a_{12} B \\ a_{21} B & a_{22} B \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{i, \text{Dirac}} = \mathbb{I}_{r \times r} \otimes \sigma_{i, \text{Pauli}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \sigma_{1,p} & 0 \sigma_{1,p} \\ 0 \sigma_{1,p} & 1 \sigma_{1,p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_{1, \text{Dirac}} = \sigma_{1, \text{Dirac}}$$

به ازای هر سگای پاولی یک سگای دیراک برای کنیم.

$$\rho_{d, \text{Dirac}} = \sigma_{d, \text{Pauli}} \otimes \mathbb{I}_{r \times r}$$

$$\rho_{1,D} = \begin{bmatrix} 0 \times \mathbb{I}_{r \times r} & 1 \times \mathbb{I}_{r \times r} \\ 1 \times \mathbb{I}_{r \times r} & 0 \times \mathbb{I}_{r \times r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

خواص ماتریسهای دیراک

$$1) \{ \alpha_i^D, \alpha_j^D \} = \alpha_i^D \alpha_j^D + \alpha_j^D \alpha_i^D = 2 \delta_{ij} \mathbb{1}_{4 \times 4}$$

$$\rho_i^D \rho_j^D + \rho_j^D \rho_i^D = 2 \delta_{ij} \mathbb{1}_{4 \times 4}$$

$$2) \alpha_i^D \alpha_j^D = i \alpha_k^D \text{ (cyclic)}$$

$$\rho_i^D \rho_j^D = i \rho_k^D \text{ (cyclic)}$$

$$3) (\alpha_i^D)^2 = (\rho_i^D)^2 = \mathbb{1}_{4 \times 4}$$

$$4) \rho_i^D \alpha_j^D = \alpha_j^D \rho_i^D$$

- ماتریسهای دیراک در معادله دیراک به کار می روند.

$$\left(i \hbar \sum_{\mu=0}^{D-1} \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m \mathbb{1}_{n \times n} \right) \psi(x^0, x^1, \dots, x^{D-1}) = 0$$

این معادله برای توصیف فرمیون ها
(ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$) به کار می رود.

$$(\gamma^{\mu})_{n \times n}, \quad n = 2^{[D/2]}$$

$$D = 2 \Rightarrow n = 2$$

$$D = 4 \Rightarrow n = 4$$

$$D = 10 \Rightarrow n = 32$$

f. & Arfken - r. & Arfken - web

Diagonalization of matrices
 diagonalizatsiya matrits

$$\vec{L} = I \vec{W}$$

$$I_{nn} = \sum_i m_i (y_i^r + z_i^r) = \sum_i m_i (r_i^r - x_i^r)$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i (r_i^r - y_i^r)$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i (r_i^r - z_i^r)$$

$$I_{ny} = I_{yn} = \sum_i m_i x_i y_i$$

$$I_{nz} = I_{zn} = - \sum_i m_i x_i z_i$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \sum_i m_i y_i z_i$$

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \langle n | n \rangle = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

ماتریس I را با بردار $|n\rangle$ به

عدد تبدیلی کنیم:

$$\langle n | I | n \rangle = I_0, \quad \langle n | = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{n}{\sqrt{I_0}} \middle| n \middle| \frac{n}{\sqrt{I_0}} \right\rangle = 1, \quad \vec{p} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_0}}$$

$$\langle p | I | p \rangle = 1, \quad |p\rangle = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} p_1^2 + I_{yy} p_2^2 + I_{zz} p_3^2 + 2 I_{xy} p_1 p_2 +$$

$$2 I_{xz} p_1 p_3 + 2 I_{yz} p_2 p_3 = 1$$

$$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} > 0$$

— یک سطح بیضی گوی که محورهای مختصات p_1 و p_2 و p_3 در راستای

قطر اصلی بیضی گوی نیستند.

- Hermitian matrices

$$A^\dagger = A$$

$$A|r\rangle = \lambda|r\rangle$$

معادله مقدار ویژه

Eigenvalue eq.

 λ - eigen-value

مقدار ویژه

 $|r\rangle$ = eigen-vector eigen ket

بردار ویژه

$$A_{n \times n} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ |r_1\rangle, |r_2\rangle, \dots, |r_n\rangle \end{cases}$$

قضیه: اگر A هرمیتی باشد، ① مقادیر ویژه حقیقی هستند.

② بردارهای ویژه متعامد هستند.

③ بردارهای ویژه یک مجموعه کامل تشکیل می دهند.

$$\begin{cases} A|r_i\rangle = \lambda_i|r_i\rangle \\ A|r_j\rangle = \lambda_j|r_j\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle r_j|A|r_i\rangle = \lambda_i \langle r_j|r_i\rangle & \text{④} \\ \langle r_i|A|r_j\rangle = \lambda_j \langle r_i|r_j\rangle & \text{⑤} \end{cases}$$

طرفین ⑤ را dagger می زنیم:

$$(\langle r_j|)^{\dagger} = \langle r_j|$$

$$\Rightarrow \langle r_j|A^{\dagger}|r_i\rangle = \lambda_j^* \langle r_j|r_i\rangle$$

$$(\langle r_j|)^{\dagger} = \langle r_j|$$

Kian SHAD

$$\Rightarrow \langle r_j|A|r_i\rangle = \lambda_j^* \langle r_j|r_i\rangle \quad \text{⑥}$$

$$\textcircled{\alpha}, \textcircled{\delta} \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j^*) \langle r_j | r_i \rangle = 0$$

$$i = j \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_i^*) \underbrace{\langle r_i | r_i \rangle}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \lambda_i^* \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = \text{real}$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) \langle r_j | r_i \rangle = 0$$

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \langle r_j | r_i \rangle = 0 \Rightarrow \vec{r}_i \perp \vec{r}_j$$

- حالتی که دو یا چند مقدار ویژه مساوی هستند را حالت degenerate گویند.

- اگر $\lambda_i = \lambda_j$ باشد (حالت degenerate) در این صورت هر ترکیب خطی $|r_i\rangle$ و $|r_j\rangle$ ^{تبعی}

بردار ویژه است با همان مقدار ویژه $\lambda_i = \lambda_j$.

اثبات:

$$|\varphi\rangle = \alpha |r_i\rangle + \beta |r_j\rangle$$

$$A|\varphi\rangle = \alpha A|r_i\rangle + \beta A|r_j\rangle = \alpha \lambda_i |r_i\rangle + \beta \lambda_j |r_j\rangle$$

$$= \lambda_i (\alpha |r_i\rangle + \beta |r_j\rangle)$$

$$= \lambda_i |\varphi\rangle$$

Anti-Hermitian

پاد هرمتیتی

$$A^\dagger = -A$$

در این حالت مقادیر ویژه موهومی هستند و بردار ویژه برای مقادیر ویژه متضاد متعامند؛ اثبات:

$$\begin{cases} A|r_j\rangle = \lambda_j|r_j\rangle \\ A|r_i\rangle = \lambda_i|r_i\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle r_j|A|r_i\rangle = \lambda_i \langle r_j|r_i\rangle \quad (\omega) \\ \langle r_i|A|r_j\rangle = \lambda_j \langle r_i|r_j\rangle \quad (\varphi) \end{cases}$$

$$(\varphi) - \text{daggen} \Rightarrow \langle r_j|A^\dagger|r_i\rangle = \lambda_j^* \langle r_j|r_i\rangle$$

$$\Rightarrow -\langle r_j|A|r_i\rangle = \lambda_j^* \langle r_j|r_i\rangle \quad (\mu)$$

$$(\omega) + (\mu) \Rightarrow 0 = (\lambda_i + \lambda_j^*) \langle r_j|r_i\rangle = 0$$

$$i = j \Rightarrow (\lambda_i + \lambda_i^*) \underbrace{\langle r_i|r_i\rangle}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_i^* = -\lambda_i \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

موجودی =

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) \langle r_j|r_i\rangle = 0$$

مضاد

$$i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \langle r_j|r_i\rangle = 0 \Rightarrow \vec{r}_i \perp \vec{r}_j$$

- characteristic equation معادله مشخصه

$$|r\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A_{n \times n}$$

$$n = 2$$

$$A|r\rangle = \lambda|r\rangle$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A_{n \times n} - \lambda I_{n \times n}] |r\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A_{11} - \lambda)x_1 + A_{12}x_2 = 0 \\ A_{21}x_1 + (A_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

برای داشتن جواب غیر بیهی برای $x_1, x_2, \dots, x_n$ باید دترمینان ضرایب مساوی صفر باشد.

$$[A_{n \times n} - \lambda I_{n \times n}] = 0 \Rightarrow \text{معادله مشخصه}$$

$$n = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

معادله درجه دوم برای λ

$$\begin{matrix} | > |r_1\rangle & |r_2\rangle \\ & \lambda_1 & \lambda_2 \end{matrix}$$

مثال ۲) بر حسب ۱ درجه n است.

پس n مقدار ویژه برای کنیم و n تابدار ویژه مشاهده با آنها:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & , & \lambda_2 & , & \dots & , & \lambda_n \\ \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow \\ |r_1\rangle & , & |r_2\rangle & , & \dots & , & |r_n\rangle \end{array}$$

- به ازای $n=3$ مثال مشخصه را مثال secular گویند:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{secular}$$

Example 4.6.1 (Arfken)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\dagger = A$$

$$A|r\rangle = A|r\rangle \Rightarrow [A - \lambda \Pi_{r \times r}]|r\rangle = 0$$

$$\Rightarrow |A - \lambda \Pi_{r \times r}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, 0, 1$$

$\lambda_1 \quad \uparrow \quad \lambda_r \quad \uparrow \quad \lambda_w$

$$|r\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$[A - \lambda \mathbb{I}_{r \times r}] |r\rangle = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(7)

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow |r_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تقاضای کنیم $|r_1\rangle$ نرمالیزه و واحد باشد : $\langle r_1 | r_1 \rangle = 1$

$$\Rightarrow (x \quad -x \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|r_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark \quad |r'_1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_r = 0 \xrightarrow{(7)} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = \text{دلخواه} \end{cases} \Rightarrow |r_r\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix},$$

$$\langle r_r | r_r \rangle = 1 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1 \Rightarrow$$

$$|r_r\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark, \quad |r'_r\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_r = +1 \quad \textcircled{1} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow |r_r\rangle = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$, \langle r_r | r_r \rangle = 1 \Rightarrow r_r^T = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |r_r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark, \quad |r'_r\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{نتیجه: } \langle r_1 | r_r \rangle = \langle r_1 | r'_r \rangle = \langle r_r | r'_r \rangle = 0$$

$$\langle r'_1 | r_r \rangle = \langle r'_1 | r'_r \rangle = \langle r_r | r'_r \rangle = 0$$

$$\textcircled{+} \text{ نتیجه } |\psi\rangle = \alpha_1 |r_1\rangle + \alpha_r |r_r\rangle + \alpha_{r'} |r'_r\rangle$$

$$\langle r_1 | \psi \rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle r_1 | r_1 \rangle}_1 + \alpha_r \underbrace{\langle r_1 | r_r \rangle}_0 + \alpha_{r'} \underbrace{\langle r_1 | r'_r \rangle}_0$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \langle r_i | \psi \rangle$$

که ها به این صورت پیدا می شوند.

Example 4.6.2 Arfken = 3.5.2 Arfken-weber

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\dagger = A$$

$$A|r\rangle = \lambda|r\rangle \Rightarrow [A - \lambda \mathbb{I}_{r \times r}]|r\rangle = 0 \quad (*)$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, 1, 1$$

لکه حالت تکراری

$$(*) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow |r_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{واحد}]{\text{نورمالیزه}} |r_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = +1 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow |r_2\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

Kian SHAD

$$\xrightarrow[\text{واحد}]{\text{نورمالیزه}} |r_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

یک جواب برای $\lambda = 0$ و $\mu = 1$

$$|r_r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

انتخاب $|r_\mu\rangle$:

$$\vec{r}_\mu = \vec{r}_1 \times \vec{r}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Diagonalization of Hermitian matrices
تقریب سازی

$$A_{r \times r}$$

$$A|r\rangle = \lambda|r\rangle \Rightarrow \lambda_1, \lambda_r, \lambda_r$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ |r_1\rangle & |r_r\rangle & |r_r\rangle \end{matrix}$$

$$R \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_r & x_r \\ y_1 & y_r & y_r \\ z_1 & z_r & z_r \end{pmatrix} = (|r_1\rangle, |r_r\rangle, |r_r\rangle)$$

$$R^T = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_r & y_r & z_r \\ x_r & y_r & z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle r_1 | \\ \langle r_r | \\ \langle r_r | \end{pmatrix}$$

$$R^T R = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 x_r + y_1 y_r + z_1 z_r & x_1 x_r + y_1 y_r + z_1 z_r \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$R^\dagger R = \begin{bmatrix} \underbrace{\langle r_1 | r_1 \rangle}_1 & \langle r_1 | r_r \rangle & \langle r_1 | r_k \rangle \\ \langle r_r | r_1 \rangle & \underbrace{\langle r_r | r_r \rangle}_1 & \langle r_r | r_k \rangle \\ \langle r_k | r_1 \rangle & \langle r_k | r_r \rangle & \underbrace{\langle r_k | r_k \rangle}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I} \Rightarrow R = \text{unitary}$$

$$A' = R^\dagger A R = \begin{pmatrix} \langle r_1 | \\ \langle r_r | \\ \langle r_k | \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} |r_1\rangle & |r_r\rangle & |r_k\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle r_1 | \\ \langle r_r | \\ \langle r_k | \end{pmatrix} (A |r_1\rangle \quad A |r_r\rangle \quad A |r_k\rangle)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle r_1 | \\ \langle r_r | \\ \langle r_k | \end{pmatrix} (\lambda_1 |r_1\rangle \quad \lambda_r |r_r\rangle \quad \lambda_k |r_k\rangle)$$

$$A' = R^\dagger A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

* If $R = (|r_1\rangle \quad |r_r\rangle \quad |r_k\rangle) \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$

یعنی A تبدیل یکانی از A است.

$$R^T R = \mathbb{1} \Rightarrow U U^T = \mathbb{1} \Rightarrow U = \text{یکانی}$$

$A_{n \times n}$

$$A' = R^T A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_r & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(A') = \text{Tr}(\underbrace{R^T A R}_{\text{تربیی}}) = \text{Tr}(\underbrace{R R^T}_{\mathbb{1}} A) = \text{Tr} A$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Tr} A = \text{Tr}(A') = \sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

$$A' = R^T A R \Rightarrow \det A' = \det(\underbrace{R^T A R}_{\text{تربیی}})$$

$$= \det(\underbrace{R R^T}_{\mathbb{1}} A) = \det A$$

$$\Rightarrow \det A = \det A' = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه صفر باشد،
دترمینان صفر است و ماتریس معکوس پذیر نیست.

$$(R^T R)_{ij} = \langle r_i | r_j \rangle = \delta_{ij}$$

4.7 Eigen-values, Eigen-vectors

Normal matrices - 3.6 Arfken-weber

$$[A, A^\dagger] = 0 \Rightarrow AA^\dagger = A^\dagger A$$

ماتریس‌های هرمیتی ($A^\dagger = A$)، و پاد-هرمیتی ($A^\dagger = -A$) و ماتریسهای یکانی

($A^\dagger = A^{-1}$) نرمال هستند

- اگر A نرمال باشد $B = A - \lambda \mathbb{I}_{n \times n}$ نرمال است

$$[B, B^\dagger] = [A - \lambda \mathbb{I}, A^\dagger - \lambda^* \mathbb{I}] = [A, A^\dagger] = 0 \Rightarrow B = \text{Normal}$$

- برای ماتریس نرمال A ، مقادیر ویژه $A^\dagger$ برابر λ^* و بردار ویژه همان $|r\rangle$ هستند.

$$A|r\rangle = \lambda|r\rangle \Rightarrow A^\dagger|r\rangle = \lambda^*|r\rangle$$

اثبات

$$A|r\rangle = \lambda|r\rangle \Rightarrow \underbrace{(A - \lambda \mathbb{I})}_{B}|r\rangle = 0$$

$$\Rightarrow B|r\rangle = 0 \Rightarrow \langle r|B^\dagger B|r\rangle = 0$$

$$\langle r|B^\dagger = 0$$

$$\Rightarrow \langle r | B B^\dagger | r \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\underbrace{B^\dagger | r \rangle}_{|2\rangle})^\dagger}_{|2\rangle^\dagger} \underbrace{(B^\dagger | r \rangle)}_{|2\rangle} = 0 \quad (|2\rangle^\dagger |2\rangle = \langle 2 | 2 \rangle)$$

$$\Rightarrow \langle 2 | 2 \rangle = 0 \Rightarrow |2\rangle = 0 \Rightarrow B^\dagger | r \rangle = 0$$

$$(A^\dagger - \lambda^* \mathbb{I}) | r \rangle = 0$$

$$A^\dagger | r \rangle = \lambda^* | r \rangle$$

- برای ماتریس نرمال A ، وقتی مقادیر ویژه متناسبت باشند، بردارهای ویژه متناظر با آنها متعامدند.

$$A | r_i \rangle = \lambda_i | r_i \rangle \Rightarrow A^\dagger | r_i \rangle = \lambda_i^* | r_i \rangle \quad \text{اثبات:}$$

$$\xRightarrow{\text{dagger}} (\langle r_i | A = \lambda_i \langle r_i |) \leftarrow | r_j \rangle$$

$$\rightarrow \langle r_i | A | r_j \rangle = \lambda_i \langle r_i | r_j \rangle$$

$$\lambda_j \langle r_i | r_j \rangle = \lambda_i \langle r_i | r_j \rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) \langle r_i | r_j \rangle = 0$$

$$i \neq j \Rightarrow \langle r_i | r_j \rangle = 0 \Rightarrow \vec{r}_i \perp \vec{r}_j$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j$$

Group theory

(Byron and fuller)

1.8 Artken

4 Artken - weber

4.8 Introduction to group theory (Artken)

Definitions

مجموعه G به همراه عمل ریاضی $*$ می‌گردد تشکیل می‌دهد
هرگاه همه خاصیت زیر را برآورده کند:

1) closure بسته بودن

$$\forall a, b \in G, a * b \in G$$

2) Associativity شرکت پذیری

$$\forall a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$$

3) Unit element عنصر واحد

$$\exists e \in G, e * a = a * e = a, \forall a \in G$$

4) Inverse element (عکس‌گرفته)

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \quad \textcircled{+} \quad a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

← به طوری که

$$\forall a, b \in G, a * b = b * a$$

اگر داشته باشیم

گروه را Abelian (آبلی) یا commutative (جابجایی) گویند.

مثالها: $\{ \mathbb{R}, + \}$

$$1) \forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a + b \in \mathbb{R}$$

$$2) \forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$3) \exists \underset{\mathbb{R}}{0} \in \mathbb{R} \rightarrow a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{R}$$

بجای 0 باید 0 بزرگ و بررسی کنیم که این مقدار در نهایت برابر صفر است

$$4) \forall a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R} \text{ such that } a + (-a) = (-a) + a = 0$$

$\textcircled{+}$

نشان دهم مجموعه $\mathbb{R} - \{-1\}$ با عمل زیر یک گروه است:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad a * b = ab + a + b$$

مثال: $\{ \mathbb{R} - \{0\}, \times \}$

$$R = \{0\}, + \quad \{R = \{0\}, \times\}$$

Date:

Subject:

$$G = \{1, a, b, c\} \quad \text{مثال}$$

این ها عمل های گروه است
داده سوال است

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = c^2 = b \\ b^2 = ac = ca = 1 \\ ab = ba = c \\ bc = cb = a \\ 1a = a1 = a \end{array} \right.$$

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

① ✓

$$\checkmark \textcircled{2} a(bc) = aa = b$$

$$\checkmark \textcircled{3} e = 1$$

$$(ab)c = cc = b$$

$$\checkmark \textcircled{4} a^{-1} = c, \quad b^{-1} = b, \quad c^{-1} = c \quad \text{G گروه آبدی است}$$

نمایش اول:

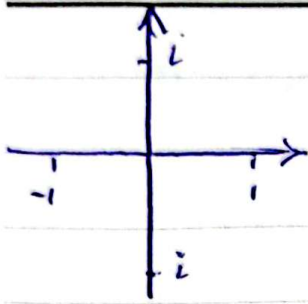
$$a = i, \quad b = -1, \quad c = -i$$

$$C_4 = \{1, i, -1, -i\}$$

$$C_4 = \{i^n \mid n = 0, 1, 2, 3\} = \{1, i, i^2 = -1, i^3 = -i\}$$

گروه cyclic است یعنی تمام چهار عنصر آن از به توان رساندن یکدیگر به دست می آید

گروه هایی که اعضای آن از به توان رساندن عنصر آن به دست می آید cyclic نام دارد.



ماتریس دوم: $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$ متناظر است با 1

$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ متناظر است با i

$R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$ متناظر است با -1

$R\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = C$ متناظر است با $-i$

$C'_4 = \{ \mathbb{I}, A, B, C \} = \{ A^n \mid n = 0, 1, 2, 3 \}$
 cyclic است

- Homomorphism, Isomorphism

همرئفتم

ئكرفئتم

- Homomorphism

اكر بن اعضائك گروه با گروه دكر (با بن ئد نائش از ئد گروه با نائش دكر از همان گروه)

ئناظر دو - به - ئك ، سه - به - ئك و يا ئنر - به - ئد بائد وجودل ضرب دو گروه ئكسان بائد

دو گروه (دو نائش) را همربخت كنند .

- Isomorphism

اكر ئناظر ئك - به - ئد بائد وجودل ضربها ئكسان بائد دو گروه (دو نائش) را ئكرفئتم

مثلا دو نائش C_p و C'_p ئكرفئتم هئند

Vierergruppe :

	I	V_1	V_2	V_3
I	I	V_1	V_2	V_3
V_1	V_1	I	V_3	V_2
V_2	V_2	V_3	I	V_1
V_3	V_3	V_2	V_1	I

ان گروه اكلئ است و cyclic ئئست :

$$V_1 V_2 = V_2 V_1 = V_3$$

$$V_1 V_3 = V_3 V_1 = V_2$$

$$V_2 V_3 = V_3 V_2 = V_1$$

بن *Viererguppe* و اعضا C_4 یا (C_4) هیچ ناظری وجود ندارد، محدود ضربها

هم متفاوت هستند، پس نه هم ریخت هستند و نه یک ریخت.

- Matrix representations, Reducible and IR Reducible

کاهش ناظر
کاهش پذیر
نمایش ماتریسی

- تبدیل یکانی (unitary) از ماتریس A :

$$A \rightarrow A' = U A U^{\dagger}, \quad U^{\dagger} = U^{-1}$$

اگر A یکانی باشد $(A^{\dagger} = A^{-1})$ ، A' هم یکانی است:

$$A'^{\dagger} = (U^{\dagger})^{\dagger} A^{\dagger} (U)^{\dagger} = U A^{\dagger} U^{\dagger} = U A^{-1} U^{-1}$$

$$= (U A U^{-1})^{-1} = (U A U^{\dagger})^{-1} = A'^{-1} \Rightarrow A'^{-1} = \text{unitary}$$

* احتمال رخ دادن یک پدیده از دید ناظرهای مختلف، به *unitarity* مرتبط است. اگر دید ^{از}

ناظر یک پدیده با احتمال 1 رخ می دهد، از دید ناظر دیگر نیز این احتمال باید 1 باشد و نه کمتر؛

با وجود اینکه ناظرها اعداد و ارقام متفاوتی را اندازه گیری کنند اما احتمال رخ دادن پدیده

باید برای همه آنها یکسان باشد.

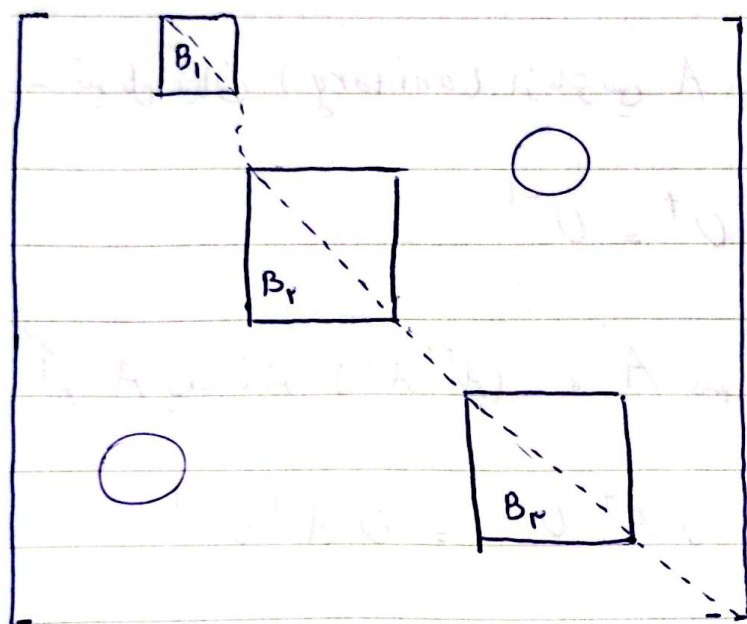
- Reducible

اگر تبدیلی یکسانی پیدا شود که ماتریسهای نمایش اولیه از گروه را قطری کند و یا قطری بلوکی

کند، به طوری که بلوکها به هم دیگر کوپل نشده باشند، نمایش اولیه را کاهش پذیر گویند.

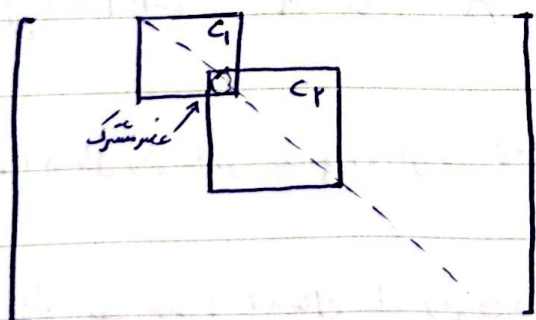
$$A' = UAU^+ = \text{قطری بلوکی و قطری}$$

به A کاهش پذیری گویند.



= قطری بلوکی

ماتریسهای اطراف قطری یعنی B ها عضو مشترک ندارند.



= C_1 و C_2 با هم کوپل شده اند
عضو مشترک دارند

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1r} & a_{1r} & a_{1f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{f1} & a_{fr} & a_{fr} & a_{ff} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R' = URU^+} R' = \begin{bmatrix} P_{r \times r} & O_{r \times r} \\ O_{r \times r} & Q_{r \times r} \end{bmatrix}$$

$$U^+ = U^{-1}$$

$$R = P \oplus Q$$

اگر $R_{n \times n}$ کاهش پذیر باشد:

$$R' = URU^T = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & P_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & P_k \end{bmatrix}$$

$U^T = U^{-1}$ P_i ها ماتریس هستند.

$$R = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k$$

- classes and characters

کلاس ها

مشخصه ها

$$G \rightarrow \{x, y, z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

اگر وجود داشته باشد $g \in G$

$$g x g^{-1} = y \Rightarrow y \sim x$$

این عضو گروه

است

حامل ضرب دو عضو گروه

محصوله گروه است

حامل ضرب دو عضو گروه

محصوله گروه است

$[y \text{ is conjugate to } x]$ هم ارز x

$[y \text{ is equivalent to } x]$ هم ارز

اگر $x \sim y$ نگاه $y \sim x$

اثبات:

$$y \sim x \Rightarrow y = g x g^{-1} \Rightarrow g^{-1} y g = x$$

$$y^{-1} \in G \Rightarrow y^{-1} = g^{-1} \Rightarrow g' y g'^{-1} = x \Rightarrow x \sim y$$

ابطال هم ارزی $y = g x g^{-1}$ در حقیقت "بد تبدیل" مشابه از x نسبت به g باشد.

- عضو همان با خودش هم ارزش است

$$g \cdot 1 \cdot g^{-1} = g \cdot g^{-1} \cdot 1 = 1 \Rightarrow$$

$$n \sim 1 \Rightarrow g \cdot n \cdot g^{-1} = 1 \Rightarrow g \cdot n = g \Rightarrow n = 1$$

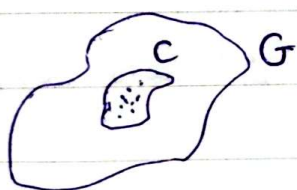
$$1 \sim 1$$

- class

یک زیر مجموعه از گروه است که هر دو عضو دلخواه آن با هم هم ارزش هستند:

$$\forall x, y \in \underbrace{C}_{\text{کلاس}}, \exists g \in G : y = g \cdot x \cdot g^{-1}$$

- معیول کلاس گروه نیست



کلاس $\{1\}$ تنها کلاسی است که گروه تشکیل می دهد.

- اگر گروه آبلی (جابه جایی) باشد، هر کلاس فقط یک عضو دارد.

$$\forall g_i, g_j \in G \Rightarrow g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$$

$$g \cdot n \cdot g^{-1} = n \cdot g \cdot g^{-1} = n \cdot 1 = n$$

↑
از فرض آبلی بودن

$$\Rightarrow g \cdot n \cdot g^{-1} = n \Rightarrow n \sim n$$

یعنی هر عضو

هم ارزش خودش می باشد، یعنی هر عضو یک کلاس است.

قضیه: هر عنصری از گروه متعلق به یک کلاس است.

اثبات: فرض کنید n در کلاسهای C_1 و C_r است.

$$n \in C_1 \Rightarrow n \sim \forall y_1 \in C_1, \exists g \in G : g y_1 g^{-1} = n \quad (1)$$

$$n \in C_r \Rightarrow n \sim \forall y_r \in C_r, \exists g' \in G : g' y_r g'^{-1} = n \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow g y_1 g^{-1} = g' y_r g'^{-1} \Rightarrow g^{-1} g y_1 g^{-1} g' = g'^{-1} y_r g' = y_r$$

$$g^{-1} g = g'' \Rightarrow g''^{-1} = g^{-1} g' \Rightarrow g'' y_1 g''^{-1} = y_r$$

$$\Rightarrow y_1 \sim y_r$$

چون y_1 هر عضو دلخواهی از C_1 است و

y_r هر عضو دلخواهی از C_r است $\Rightarrow C_1 = C_r$

- character

بر رد هر گروه character گویند. این رد تحت تبدیلات یکانی ناورد است.

$$n \rightarrow n' = g n g^{-1} = g n g^{\dagger} \Rightarrow \text{Tr } n' = \text{Tr} (g n g^{-1})$$

$$= \text{Tr} [n g^{-1} g] = \text{Tr } n$$

قضیه: تعداد اعضای یک کلاس فاکتوری از مرتبه گروه (تعداد عناصر گروه) می باشد.

$$N_G = k N_C, \quad k \in \mathbb{N}$$

قضیه می گوید چه تعداد از اعضا

اکبر می توان داشت.

Kbrian SHAD

تعداد عناصر گروه
(مرتبه گروه)

تعداد عناصر کلاس

$$C_f \rightarrow f = k N_C$$

می تواند باشد، لزوماً نیست ۴ و ۲ و ۱

تبدیل مکانی از یک گروه:

$$G = \{g_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$G' = \{g'_i \mid i = 1, 2, \dots, n, g'_i = h g_i h^{-1}, h \in G\}$$

$$\textcircled{1} \text{ تناظر یک به یک: } g_i \leftrightarrow g'_i$$

$$g_i g_j = g_k \Rightarrow g'_i g'_j = \underbrace{(h g_i h^{-1})(h g_j h^{-1})}_e$$

$$= h (g_i g_j) h^{-1} = h g_k h^{-1} = g'_k$$

بدول ضرب هاهم
یکسان هستن

$$\Rightarrow G, G' = \text{isomorph, یکرهفت}$$

- subgroup

اگر یک زیر مجموعه از G با همان عملگر (*) خود یک گروه تشکیل دهد.

$$\{R, +\} = \{G, *\}$$

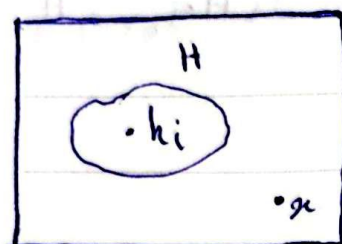
$$\textcircled{1} \forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$$

$$\{\mathbb{Z}, +\}$$

$$\textcircled{2} \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\textcircled{3} 0 \in \mathbb{Z}, a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$$

قضیه: اگر $H \subset G$ زیرگروه، $h_i \in H$ ، $x \in G$ ، $x \notin H$:



$$x h_i \notin H$$

$$h_i x \notin H$$

اثبات: فرض کنید $x h_i \in H \Rightarrow x h_i = h'_i$

$$\Rightarrow \underbrace{x h_i h_i^{-1}}_e = \underbrace{h'_i}_{\in H} \underbrace{h_i^{-1}}_{\in H} = x \Rightarrow x \in H \rightarrow \text{خلاف فرض}$$

$\Rightarrow h_i x \notin H$ به همین ترتیب اثبات می شود

در نتیجه $x H \cap H = \emptyset$ و $x H$ و H عضو مشترک ندارند.

$$H \subset G, x \in G, x \notin H$$

هم مجموعه ها:

$$C_{\text{right}}^x = \{x h_i \mid h_i \in H\} = x H$$

$$\Rightarrow N_H = N_{Hx} = N_{xH}$$

$$C_{\text{left}}^x = \{h_i x \mid h_i \in H\} = H x$$

x میانی است

قضیه: یک گروه G را می توان بر حسب یک زیرگروه از آن، تمام هم مجموعه های آن

و تمام هم مجموعه های آن زیرگروه (چپ یا راست) نوشت.

$$\left\{ \begin{array}{l} G = H + x_1 H + x_2 H + \dots + x_n H \\ G = H + H x_1 + H x_2 + \dots + H x_n \end{array} \right. \quad \text{Kobian SHAD} \quad H \cap H x_i \cap x_i H = \emptyset$$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in G, x_i \notin H$

$$n_1, n_2, \dots, n_N \in G, \notin H$$

H و Hn_i ها عضو مشترک ندارند؛ H و H ها نیز عضو مشترک ندارند.

$$G = H + Hn_1 + Hn_2 + \dots + Hn_n$$

$$N_G = \underbrace{(n+1)}_m N_H$$

چون H و Hn_i ها هیچ عضو مشترکی ندارند.

$$N_G = m N_H$$

$$m = \text{Index of } H$$

اگر N_G عدد اول باشد، N_H می تواند 1 یا 1 باشد.

$$(H=G) \quad (H=\{e\})$$

$$G = \{e, g_1, g_2, g_3, g_4\}$$

$$H = G, \quad H = \{e\} \quad \{e\}, G \text{ زیرگروه های بدیهی اند}$$

$$N_G = 4 = 1 \times 4 = 2 \times 2 = 4 \times 1$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $G \quad \quad \text{زیرگروه های} \quad \quad \{e\}$
 $\quad \quad \text{سه عضوی}$

Normal subgroup

Invariant subgroup

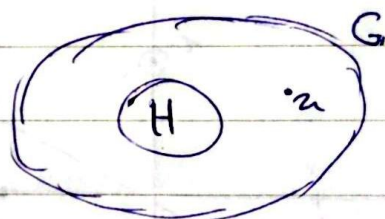
self-conjugate subgroup

$$H \subset G$$

$$\forall n \in G, \quad n H n^{-1} \subset G \quad \text{کترین 4.88 آرکین}$$

در بعضی از زیرگروه ها $n H n^{-1}$ به ازای $\forall n \in G$ برابر خود H می شود.

$$n H n^{-1} = H, \quad \forall n \in G$$



تجای n هایی که خارج از H

$$\text{هستند (یا داخل } G) \Rightarrow n H = H n$$

بایرشت میزنند.

- اگر گروه G آبله (جابجایی) باشد هر زیرگروه آن نرمال است.

اثبات:

$$n h_i n^{-1} = \underbrace{n n^{-1}}_e h_i = e h_i = h_i$$

$$\Rightarrow n H n^{-1} = H$$

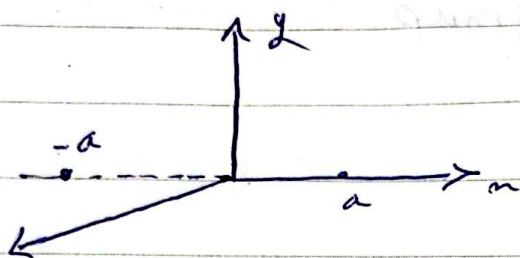
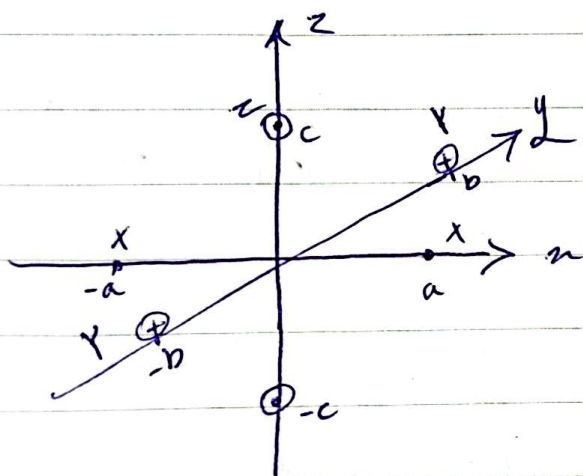
$$\{\mathbb{Z}, +\} \Rightarrow \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

4.9 Discrete Groups

آرنگ گروه های گسسته

Two-fold symmetry axis

محور تقارن دو جبهی

 H_r, N_r, C_{2v} سیستم مختصات به صفحه xy باشداگر سیستم (نه محور دستگاه مختصات) به اندازه π حول محور z چرخیده شود، سیستمموضعی نمی شود بنابراین z یک محور تقارن دو جبهی است.

اگر سیستم فیزیکی را حول هر یک از

محورها به اندازه π دوران دهیم

سیستم موضعی نمی شود بنابراین

هر محور یک محور تقارن دو جبهی است.

$$G = \{ \Pi, R_x(\pi), R_y(\pi), R_z(\pi) \}$$

$$R_x(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_y(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \{ I, V_1, V_r, V_r \}$$

	I	V_1	V_r	V_r
I	I	V_1	V_r	V_r
V_1	V_1	I	V_r	V_r
V_r	V_r	V_r	I	V_1
V_r	V_r	V_r	V_1	I

	$\mathbb{I}$	R_n	R_y	R_z
$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	R_n	R_y	R_z
R_n	R_n	$\mathbb{I}$	R_z	R_y
R_y	R_y	R_z	$\mathbb{I}$	R_z
R_z	R_z	R_y	R_n	$\mathbb{I}$

← $\mathbb{I}$

$\mathbb{I} \leftrightarrow I$ این دگروه یکریخت هستند زیرا جدول ضرب متناظرند.

$$V_1 \leftrightarrow R_n$$

$$G = \{ \mathbb{I}, R_n(\pi), R_y(\pi), R_z(\pi) \}$$

$$V_r \leftrightarrow R_y$$

$$V_r \leftrightarrow R_z$$

$$\text{Kobian SHAD } N_G = m N_H$$

$$\{ \mathbb{I} \} \quad K = K \times I = 2 \times 2 = 1 \times K \rightarrow G$$

زیرگروه های G :

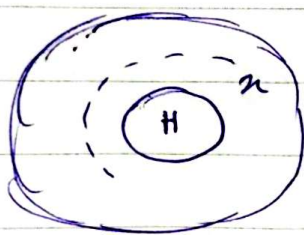
$$H_n = \{ I, R_n \}$$

$$H_y = \{ I, R_y \}$$

$$H_z = \{ I, R_z \}$$

زیرگروه های غیر برابری دو عنصری هستند.

4



تمام این زیرگروه ها نرمال هستند. (زیرا آبدی اند) :

$$nH = Hn$$

مثلا برای H_n بررسی کنیم :

$$n \rightarrow R_y, R_z$$

$$\begin{aligned} R_y H_n &= R_y \{ I, R_n \} = \{ R_y \cdot I, \underbrace{R_y R_n}_{R_z} \} \\ &= \{ R_y, R_z \} \end{aligned}$$

$$H_n R_y = \{ I, R_n \} R_y = \{ R_y, R_n R_y \} = \{ R_y, R_z \}$$

$$\Rightarrow R_y H_n = H_n R_y$$

$$R_z H_n = H_n R_z \Rightarrow H_n = \text{Normal} \dots$$

$$H_y = \text{Normal}$$

به همین ترتیب

$$H_z = \text{Normal}$$

Kian SHAD

* Three object - three fold symmetry axis: حذف

* 4.10 continuous Groups:

Infinite groups $\{\mathbb{R}, +\}$ پیوسته و نامتناهی

$\{\mathbb{Z}, +\}$ گسسته و نامتناهی

$C_4 = \{1, i, -1, -i\}$ گسسته و متناهی

$C_4' = \{I, A, B, C\}$ گسسته و متناهی

* گروه پیوسته: دارای یک عنصر عمومی است که این عنصر به یکدیگر چند پارامتر وابسته است

و این پارامترها در بازه‌هایی به صورت پیوسته متغیر هستند:

$$U(1) = \{e^{i\varphi} \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

Lie group

گروهی است که در آن عنصر حاصلضرب تابعی تحلیلی از پارامترهای ورودی و خروجی است.

(تحلیلی یعنی مشتق پذیر از هر مرتبه‌ای.)

$$U(1) : g_1 = e^{i\varphi}, g_2 = e^{i\varphi_2} \Rightarrow g_1 g_2 = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

عنصر $g_1 g_2$ نسبت به پارامترهای φ و φ_2 تحلیلی است.

* تعریف پیشرفته گروه Lie: اگر منیفلد G (که یک مجموعه پیوسته و بدون کینگی است)

دارای خواص گروه باشد (هر چهار خاصیت) یک گروه Lie است.

یک دایره یک Lie group است: $z = e^{iy} = \underbrace{\cos y}_x + i \underbrace{\sin y}_y \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

عملگر در این گروه ضرب معمولی است.

$$\{z = e^{iy} \mid 0 \leq y \leq 2\pi\}$$

مثال: $\{\mathbb{R}^n, +\} \Rightarrow \text{Lie group}$

- compact group

اگر پارامترهای عنصر عمومی گروه پیوسته در فاصله‌های بسته تغییر کنند، گروه را فشرده می‌نامیم.

مثلاً گروه $U(1)$ که $0 \leq y \leq 2\pi$ یک گروه فشرده است.

به لحاظ منیفلدی $U(1)$ یک دایره است یا دایره یک منیفلد فشرده است.

- The group $O(n)$ - (orthogonal) گروه ماتریس $n \times n$ متعام

$$O(n) = \left\{ A_{n \times n} \mid A \tilde{A} = \tilde{A} A = \mathbb{I}, \frac{n(n-1)}{2} \text{ parameters} \right\}$$

$$1) A_1, A_2 \in O(n) \Rightarrow (A_1, A_2) (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = A_1 A_2 \tilde{A}_2 \tilde{A}_1 = \mathbb{I}$$

$$(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) (A_1, A_2) = \mathbb{I}$$

$$A_1, A_2 \in O(n)$$

$$2) A_1, A_2, A_3 \in O(n) \Rightarrow A_1 (A_2 A_3) = (A_1 A_2) A_3$$

برای ماتریس ها این رابطه همواره برقرار است.

$$3) \mathbb{1} \tilde{\mathbb{1}} = \tilde{\mathbb{1}} \mathbb{1} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} \in O(n)$$

$$4) A \in O(n), A^{-1} (\tilde{A}^{-1}) = A^{-1} (\tilde{A})^{-1} = (A \tilde{A})^{-1} = \mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}$$

$$(\tilde{A}^{-1}) (A^{-1}) = \mathbb{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^{-1} \in O(n) \end{array} \right.$$

- شمارش عناصر مستقل A که در $O(n)$ می باشند:

$$A_{n \times n} \Rightarrow n^2 - \underbrace{(\text{تعداد شرط های مانع از})}_{\text{تعداد } A} = P_n$$

$$\underbrace{A \tilde{A}}_S = \mathbb{1} \Rightarrow S = A \tilde{A} \Rightarrow \tilde{S} = (\tilde{A} \tilde{\tilde{A}}) = \tilde{\tilde{A}} \tilde{\tilde{A}} = \tilde{\tilde{A}} A = S$$

یعنی S متناظر است. یعنی مثلث بالایی که با مثلث پایینی که یکی هستند.

$$S = \left[\begin{array}{c|c} \text{مثلث بالایی} & \\ \hline & \text{مثلث پایینی} \end{array} \right] \rightarrow \frac{n^2 - n}{2} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} \right] \quad n \text{ تا رابطه از قطر}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ رابطه هم از مثلث بالایی}$$

$$\text{تعداد در رابطه} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow P_n = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

ممکن است ماتریس های $A_{m \times m}$ وجود داشته باشند که متعامد باشند اما تعداد پارامتر

های غیرعمری $\frac{n(n-1)}{2}$ تا باشد. در این صورت گروه $O(m)$ نداریم بلکه

همان گروه $O(n)$ در نهایت $m \times m$ را داریم. و متنی ماتریس ها $n \times n$ باشند

و تعداد پارامترها هم $\frac{n(n-1)}{2}$ تا باشد، گروه در نهایت بنیادی می باشد.

Fundamental
representation

$$\frac{n(n-1)}{2} = 10 \rightarrow n = 8$$

$$\{ A_{20 \times 20} \mid \tilde{A}A = A\tilde{A} = \mathbb{I} \text{ و } 10 \text{ پارامتر تا} \} = O(5)$$

این بنیادی است

چون تعداد پارامترها $\frac{20 \times (20-1)}{2} = 190$ نیست. گروه $O(20)$ نداریم.
که غیر بنیادی

The group $SO(n) = O^+(n)$
 نمایش نوری

Special Orthogonal $n \times n$ matrices

$SO(n)$
 $\det A = +1$
 $A \tilde{A} = \tilde{A} A = \mathbb{1}, A_{n \times n}$

$$SO(n) = \left\{ A_{n \times n} \mid \underbrace{A \tilde{A} = \tilde{A} A = \mathbb{1}}_{\text{بایر برسی شود}}, \underbrace{\det A = +1}_{\text{بایر برسی شود}}, \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{\text{parameters}} \right\}$$

$A^{-1} = \tilde{A}$

↳ نشان دهنده $SO(n)$ یک گروه است. (هر چهار شرط باید برسی شود.)

$$A \tilde{A} = \mathbb{1} \Rightarrow \det(A \tilde{A}) = \det \mathbb{1}$$

$$\det A \underbrace{\det \tilde{A}}_{\det A} = 1$$

$\Rightarrow (\det A) = \pm 1 \rightarrow \det A = +1$ خود به خود از شرط
 تمام حاصل می شود و شرط بایر برسی نیست
 یعنی از تعداد پارامتر ها کم نمی کند

$$n = 3 \Rightarrow SO(3) = O^+(3):$$

$$\frac{3 \times (3-1)}{2} = 3 \text{ پارامتر}$$

$$A \in SO(3)$$

زاویه های ۱ و ۲ و ۳ پارامتر هستند:

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \text{Kian SHAD} \xrightarrow{R_z(\gamma)} R_y(\beta) R_x(\alpha)$$

$$\Rightarrow A(\alpha, \beta, \gamma) \tilde{A}(\alpha, \beta, \gamma) = \left\{ R_z(\gamma) R_y(\beta) R_z(\alpha) \right\} \left\{ \tilde{R}_z(\alpha) \tilde{R}_y(\beta) \tilde{R}_z(\gamma) \right\}^* \quad \star$$

$$= R_z(\gamma) R_y(\beta) R_y(\beta) \tilde{R}_z(\gamma) = \mathbb{I} \quad , \quad \tilde{A} A = \mathbb{I} \Rightarrow A(\alpha, \beta, \gamma) = \text{مستقل}$$

$$\det A(\alpha, \beta, \gamma) = \det R_z(\gamma) \det R_y(\beta) \det R_z(\alpha) = 1$$

$$\Rightarrow A(\alpha, \beta, \gamma) \in SO(3)$$

- The group $U(n)$

Unitary $n \times n$ matrices

$$U(n) = \left\{ U_{n \times n} \mid U U^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}, n^2 \text{ parameters} \right\}$$

$$1) U_1, U_2 \in U(n) \Rightarrow (U_1 U_2)(U_1 U_2)^\dagger = (U_1 U_2)(U_2^\dagger U_1^\dagger) = \mathbb{I}$$

$$= U_1 U_1^\dagger = \mathbb{I}$$

$$U_1 U_2 \in U(n)$$

$$(U_1 U_2)^\dagger (U_1 U_2) = \mathbb{I}$$

$$2) U_1, U_2, U_3 \in U(n) \Rightarrow U_1 (U_2 U_3) = (U_1 U_2) U_3$$

$$3) \mathbb{I}^\dagger \mathbb{I} = \mathbb{I} \mathbb{I}^\dagger = \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{I} \in U(n)$$

★

$$4) U \in U(n)$$

$$U^{-1} (U^{-1})^{\dagger} = U^{-1} (U^{\dagger})^{-1} = (U^{\dagger} U)^{-1} = \mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}$$

$$(U^{-1})^{\dagger} U^{-1} = \mathbb{1}$$

$$\downarrow \rightarrow U^{-1} \in U(n)$$

شمارش تعداد پارامترهای مستقل عنصر عمومی $U(n)$:

$$U_{ij} = a_{ij} + i b_{ij}$$

$$P_n = 2n^2 - (UU^{\dagger} = \mathbb{1} \text{ تعداد شرط های حاصل از})$$

$$\mathbb{1} = H = UU^{\dagger} \Rightarrow H^{\dagger} = H \Rightarrow H = \text{هرمیتی}$$

$$P_n = 2n^2 - \{n(n-1) + n\} = n^2$$



اگر ماتریسی هرمیتی باشد و روی قطر آن حقیقی است. مثال:

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H^{\dagger} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a = a^* \\ d = d^* \end{matrix}$$

$$H = \begin{matrix} \text{ماتریس} \\ \text{هرمیتی} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad n \text{ تا رابطه از قطر}$$

$$\rightarrow \frac{n^2 - n}{2} \times 2 = n(n-1) = \text{تعداد روابط حاصل از مثلث بالایی}$$

$$P_n = 2n^2 - [n(n-1) + n] = n^2$$

Unitary: $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$

- $S U(n) \rightarrow U_{n \times n}$

special: $\det U = +1$

$$S U(n) = \left\{ U_{n \times n} \mid UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}, \det U = +1 \right\}$$

, n^2 - parameter

- ثابت کینر $S U(n)$ یک گروه است و مقدار پارامترهای مستقل عنصر عمومی را بدست آورده $(n-1)^2$.

4.11 Generators مولدها

$$U = e^{iaH}, \quad a = \text{real}, \quad H \text{ مستقل از}$$

$$A \text{ ماتریس} \Rightarrow e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots$$

تفسیر: اگر U یکانی باشد، H هرمیتی است و برعکس

$$U^\dagger = e^{-iaH^\dagger}$$

اثبات:

$$U^{-1} = e^{-iaH}$$

* e به توان ماتریس، ماتریس است.

Date: _____

AB - BA

Subject: _____

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots}$$

$$[A, B] = 0 \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}, \quad A_i = i a H,$$

$$B = -i a H \Rightarrow [A, B] = 0$$

$$U^\dagger = U^{-1} \iff H^\dagger = H$$

$$U = e^{i a H}$$

$$\begin{cases} H = \text{generator (مولد)} \\ a = \text{parameter (پارامتر)} \end{cases}$$

$$\det e^A = e^{\text{tr} A}$$

$$\det U = e^{i a \text{tr} H}$$

قضیه:

$$H |r\rangle = \lambda |r\rangle \Rightarrow H^r |r\rangle = \lambda \underbrace{H |r\rangle}_{\lambda |r\rangle}$$

اثبات:

$$H^r |r\rangle = \lambda^r |r\rangle$$

$$\vdots$$
$$H^n |r\rangle = \lambda^n |r\rangle$$

$$U|r\rangle = e^{iaH}|r\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!} \underbrace{H^n|r\rangle}_{\lambda^n|r\rangle}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia\lambda)^n}{n!} |r\rangle = e^{ia\lambda} |r\rangle$$

$$\Rightarrow e^{ia\lambda_1}, e^{ia\lambda_2}, \dots, e^{ia\lambda_N}$$

مقادیر ویژه U

$$H' = R^T H R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Tr } H' = \text{Tr}(R^T H R) = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \text{Tr}(R R^T H)$$

$$= \text{Tr}(H)$$

$$\text{Tr}(H) = \sum_{i=1}^N \lambda_i$$

$$\det U = \prod_{i=1}^N e^{ia\lambda_i} = e^{ia \sum_{i=1}^N \lambda_i} = e^{ia \text{Tr}(H)}$$

$$\det U = e^{ia \text{Tr } H}$$

* این رابطه مهم است، هم خودش هم نحوه رسیدن به آن ①

$$U = e^{iaH} \Rightarrow \ln U = iaH \Rightarrow \text{Tr}(\ln U) = ia \text{Tr } H \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \ln \det U = ia \text{Tr } H \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \Rightarrow \ln \det U = \text{Tr} \ln U$$

$$f(n) f(y) = f(n+y) \Rightarrow e^x e^y = e^{x+y}$$

Date:

⊛ Subject: اگر f مدّ بالا زما کند، نای است

- Rotations and angular momentum

دوران، اندازه حرکت زاویه‌ای

دوران حول محور Z:

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi_1) R_z(\varphi_r) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_r & \sin \varphi_r & 0 \\ -\sin \varphi_r & \cos \varphi_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_r) & \sin(\varphi_1 + \varphi_r) & 0 \\ -\sin(\varphi_1 + \varphi_r) & \cos(\varphi_1 + \varphi_r) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⊛ $R_z(\varphi_1) R_z(\varphi_r) = R_z(\varphi_1 + \varphi_r)$ نای برای $R_z(\varphi)$ نای دارد

⊛ $|\delta \varphi| \ll 1$

$$R_z(\delta \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\delta \varphi) & \sin(\delta \varphi) & 0 \\ -\sin(\delta \varphi) & \cos(\delta \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⊛ $\approx \begin{bmatrix} 1 & \delta \varphi & 0 \\ -\delta \varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta \varphi \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\textcircled{*} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$$

Date:

Subject:

$$= \mathbb{1} + i \delta \varphi \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_z \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R_z(\delta \varphi) \approx \mathbb{1} + i \delta \varphi M_z$$

$\delta \varphi$ به سمت صفر برود، این تقریب، مساری می شود.

$$R_z(\delta \varphi_1 + \delta \varphi_2 + \dots + \delta \varphi_n) =$$

$$R_z(\delta \varphi_1) R_z(\delta \varphi_2) \dots R_z(\delta \varphi_n) =$$

$$[\mathbb{1} + i \delta \varphi_1 M_z] [\mathbb{1} + i \delta \varphi_2 M_z] \dots [\mathbb{1} + i \delta \varphi_n M_z]$$

$$\delta \varphi_1 = \delta \varphi_2 = \dots = \delta \varphi_n = \frac{\varphi}{n}$$

$$\Rightarrow R_z(\varphi) \approx \left[\mathbb{1} + i \frac{\varphi}{n} M_z \right]^n$$

$$R_z(\varphi) \stackrel{\textcircled{*}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\mathbb{1} + i \frac{\varphi}{n} M_z \right]^{\overset{n \rightarrow \infty}{n}} = e^{i \varphi M_z}$$

با $\delta \varphi$ به صفر میل کند

$$R_z(\varphi) = e^{i \varphi M_z}$$

φ پارامتر گروه دوران حول z

M_z مولد گروه

Date: $[A, B] = AB - BA$

Subject:

$$\begin{cases} \det R_z(\varphi) = +1 \\ \text{Tr } M_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \det R_z = e^{i\varphi \text{Tr } M_z} = e^0 = 1$$

از فرم ماتریسی $R_z(\varphi)$:

$$\begin{cases} R_z^\dagger R_z = \mathbb{I} \\ M_z^\dagger = M_z \end{cases} \Rightarrow R_z = \text{یکانی} \Leftrightarrow M_z = \text{هرمیتی}$$

از فرم M_z داریم:

$R_z(\varphi)$ دوران مختصات به اندازه زاویه φ حول محور z است.

M_z ماتریس اندازه حرکت زاویه‌ای حول محور z است.

مولدهای دوران حول محورها x و y :

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[M_x, M_y] = iM_z$$

$$[M_y, M_z] = iM_x$$

$$[M_z, M_x] = iM_y$$

$$[M_i, M_j] = i \epsilon_{ijk} M_k$$

جمع روی k از ۱ تا ۳

Kian SHAD

گروه $SO(3)$

~~scribbled text~~

[structure constant] $SO(3)$ = ثابت های ساختار جبرگروه ϵ_{ijk}

$$R_z(\varphi) = e^{i\varphi M_z}$$

$$\frac{1}{i} \frac{dR_z(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = M_z$$

عناصر جبر = مجموعه تمام مولهای گروه

$$SO(3) = \{M_x, M_y, M_z \mid [M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k\}$$

$$R_z(\varphi) = e^{i\varphi M_z}$$

- می‌توانیم از بسط $e^{i\varphi M_z}$ به $R_z(\varphi)$ برسیم:

$$e^{i\varphi M_z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} M_z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} M_z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} M_z^{2n+1}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{(2n)!} M_z^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} M_z^{2n+1}$$

$$M_z^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_z^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$
 $M_z^{2n+1} = M_z$

$$1 \rightarrow e^{i\varphi M_z} = \mathbb{I} + \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^n}{(n!)!} + i M_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{n+1}}{(n+1)!} \sin \varphi$$

$$e^{i\varphi M_z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\cos \varphi - 1) + i \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin \varphi$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\varphi)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}, \quad \hbar = 1$$

زاویه حرکت
زاویه ای

$$\Rightarrow \vec{M} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla}$$

ماتریس های زیر، خود اندازه حرکت نیستند بلکه مولد اندازه حرکت زاویه ای اند:

$$M_x = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad M_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$M_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Kbrian SHAD

$$[M_x, M_y] \psi(x, y, z) = i M_z \psi(x, y, z) \quad M_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$