

الکترومغناطیس ۲

قانون القای فارادی (ادامه)

Maxwell's Equations for Static Electromagnetic Fields

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = Q_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oiint_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

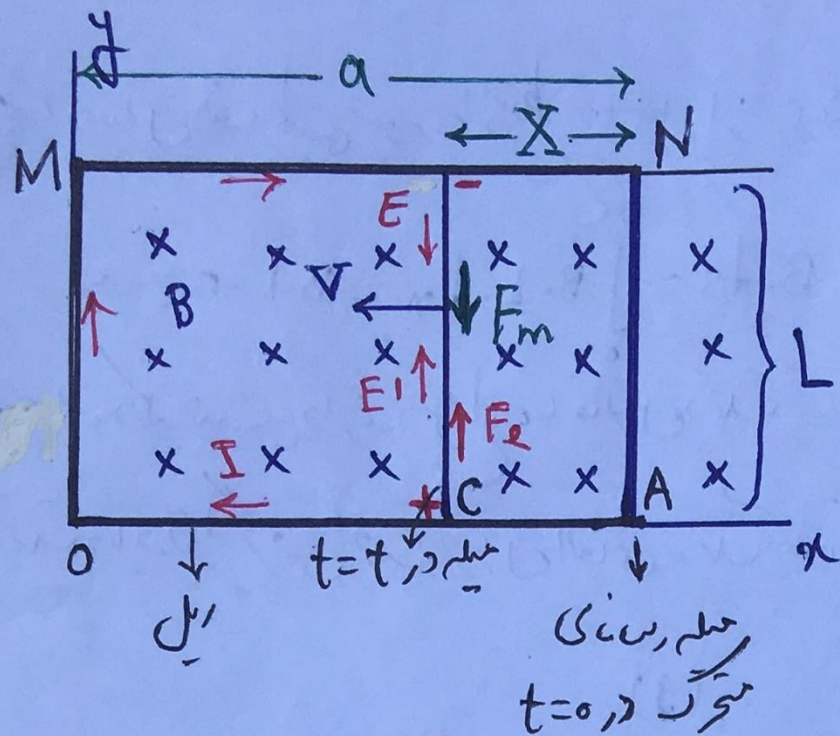
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$$

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f$$

قانون القای فارادی:



B میدان مغناطیسی یکنواخت است.

اگر میل رسانا نباشد در این صورت نیروی وارد بر بارهای مثبت آزاد درون میل رسانا برابر حرکت

در میدان مغناطیسی یکنواخت B برابر خواهد بود با:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

این نیروی کوشنده، بارهای مثبت آزاد درون میل رسانا را به سمت پایین میل برده و در نتیجه بارهای منفی به سمت بالای میل می روند. بنابراین یک نیروی الکتریکی F_e نیز سعی می کند بارهای مثبت را به سمت بالا ببرد، زیرا میدان الکتریکی ایجاد شده $\vec{E}$ به سمت بالا خواهد بود. در حالت تعادل این دو نیرو با یکدیگر برابرند. حالت تعادل در کسر کوچکی از زمانه (پس از به حرکت درآوردن میل رسانا) ایجاد می شود. در حالت تعادل در زمان t

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}' = 0 \Rightarrow \vec{E}' = -\vec{v} \times \vec{B}$$

خواهیم داشت: که میدان است که به علت قریح بار در حال تعادل، در سیم ایجاد می شود. یعنی سیم رسانای در حال حرکت (مانند می باشد) با تری عمل می کند. اگر فرض کنیم که ریل، رسانا باشد، آنگاه جریان القا می در مدار بسته به وجود می آید (جریان القا می I). ایجاد این جریان به معنای وجود میدان الکتریکی $\vec{E}$ درون رسانا (مجموعه ریل، رسانا و سیم رسانا) است.

$$\vec{E} = -\vec{E}' \Rightarrow \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

کار انجام شده برابر الکتریکی شیب در انتقال در سیم برابر است با:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \oint_C q\vec{E} \cdot d\vec{L} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{W}{q} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

می توان برای محاسبه محصل در آخر این مطلب مراجعه نمود).

می نیروی محرکه الکتریکی ایجاد شده است و از محاسبه انتگرال میر میدان الکتریکی $\vec{E}$ روی یک مسیر بسته به دست می آید

$$\text{یعنی داریم: (۱۱)} \quad \mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

$$\text{برای این مسئله داریم:} \quad \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{نابراین خواهیم داشت:} \quad \mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L}$$

$$\mathcal{E} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L} = \int_L [\vec{v}(-\hat{i}) \times B(-\hat{k})] \cdot \hat{j} \cdot dy = - \int_L v \cdot B \cdot dy = B \cdot v \cdot L \quad (2)$$

مثلاً میدان مغناطیسی عبوری از سطح حاصل از oc و L (در زمان t) را می‌توانیم بنویسیم.

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int B(-\vec{k}) \cdot d\vec{s}(-\vec{k}) = \int B \cdot d\vec{s} = \int_0^{oc} B \cdot L \cdot d\eta = B \cdot L \cdot oc \Rightarrow$$

نویسیم شود که جهت بردار عمود بر سطح، با قانون دیت راست و با جهت قرار گرفتن جهت جریان القا شده است.

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = -B \cdot L \cdot \frac{dx}{dt} = -B \cdot L \cdot v \quad (3)$$

$$(2) \text{ و } (3) \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4)$$

بنابراین همواره داریم: $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

داریم: $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B \cdot v \cdot L}{R}$ و جریانی القا شده در سیم باعث وارد شدن نیرو بر آن می‌شود.

$$d\vec{F} = I d\vec{L} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = I \cdot L B \vec{i}$$

نیروی $\vec{F}$ بر سیم وارد می‌شود و برای غلبه بر آن سیم باید کشیده شود.

$$\vec{F} = \frac{BLv}{R} \cdot L B \vec{i} \Rightarrow \vec{F} = \frac{B^2 L^2 v}{R} \vec{i} \quad (\text{نیروی وارد بر سیم})$$

نیروی که شش بر میله وارد می کند تا بتواند آن را از موقعیت A به C ببرد، برابر است با:

$$\vec{F}_1 = \frac{-B^2 L^2 v}{R} \hat{i}$$

$$W = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{L} \Rightarrow W = \int_a^{a-x} \frac{-B^2 L^2 v}{R} \hat{i} \cdot d\alpha \hat{i} = \frac{-B^2 L^2 v}{R} (-x) \Rightarrow W = \frac{B^2 L^2 v}{R} x$$

توان نیروی که شش با آن کار انجام می دهد، برابر است با:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2 L^2 v}{R} x \right) = \frac{B^2 L^2 v}{R} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow P = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

و این توان همان توان تلف شده در مقاومت R است. یعنی:

$$P = RI^2 = R \left(\frac{BLv}{R} \right)^2 = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

نوع متودی که می توان شار میدان مغناطیسی گذرنده از سطح حاصل از CA و L (در زمان t) را نیز بدست آورد که منجر به همان جواب می شود.

$$\Phi_B = \int_{a-x}^a \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{a-x}^a B(-\vec{k}) \cdot L \cdot d\alpha (\vec{k}) = \int_{a-x}^a -BL \cdot d\alpha = -B \cdot L \cdot x$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -B \cdot L \cdot v$$

که همان را هم (3) است. بقیه دقیقاً مانند قبل است.

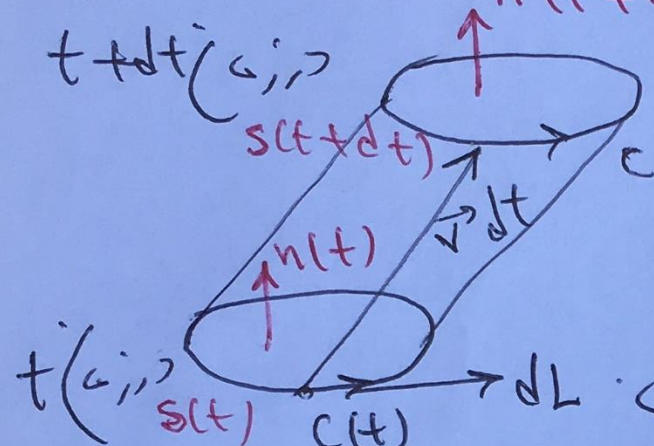
حالت کلی رابطه را بگیریم که از تقاطع ناظر ساکن هم یک حلقه (با شکل دلخواه) حرکت می کند و هم

بازمان تغییر می کند. حرکت حلقه نسبت به ناظر ساکن به معنای آن است که سطح موثر حلقه

تغییر می کند. در این صورت داریم:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_S \vec{B} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{S} \quad (1)$$

حلقه را در زمان t و در زمان $t+dt$ در تعریف بگیریم. در زمان $t+dt$ حلقه به اندازه $d\vec{L}$ جابه جاشده است. در حالی که حرکت و چرخش داشته باشد، سطح حلقه که از آن نشأت می گیرد تغییر می کند، تغییر می کند (علامت یکسان نشان داده شده روی معنی آن، نشان دهنده جهت اشتراک می باشد).



در این قسمت یک سطح بسته خواهیم داشت با قاعده کی بالا و پایین و سطح جانبی. بار بار عمود بر سطح جانبی که به صورت $d\vec{L} \times \vec{v} dt$ است. است.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_{S(t+dt)} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{سطح جانبی}} \vec{B} \cdot (d\vec{L} \times \vec{v}) dt = 0 \Rightarrow$$

چون $dt \rightarrow 0$ پس $\vec{L} \rightarrow \vec{L} + d\vec{L}$ و سطح جانبی به سمت همزیست می‌گردد. بنابراین استدلال روی سطح جانبی تبدیل به استدلال روی مسیر بسته $C(t)$ می‌شود.

$$\Rightarrow \int \vec{B} \cdot d(\vec{S} + d\vec{S}) - \int \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{C(t)} \vec{B} \cdot (d\vec{L} \times \vec{V}) dt = 0 \Rightarrow$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d(\vec{S}) + \oint_{C(t)} d\vec{L} \cdot (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot dt = 0 \Rightarrow$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d(\vec{S}) = -dt \oint_C (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L} \Rightarrow - \int_S \vec{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} d\vec{S} = \oint_C (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L} \quad (2)$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow \mathcal{E} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L}$$

یعنی نیروی محرکه الکتریکی می‌تواند در اثر تغییر میدان مغناطیسی نسبت به زمان و یا در اثر حرکت حلقه در میدان ایجاد شود. می‌توان دید که $\oint_C \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{L}$ را می‌توان حرکت نسبت به ناظر را کن در نظر گرفت و استدلال $\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ را اثر تغییر میدان مغناطیسی نسبت به زمان ایجاد می‌شود. برای مسیر حلقه مستطیل در حال حرکت می‌توان این استدلال را برای ناظر متوقف (همراه باسیم در حال حرکت) در نظر گرفت.

الکترومغناطیس ۲

مسائلی از قانون القای فارادی

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = Q_f$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varphi_B}{dt}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f$$

پس به طور خلاصه می توان گفت: نیروی مغناطیس وارد بر سیم در حال حرکت (در حال حرکت ~~از~~ از نظر ناظر ساکن)

جهت جریان القای در یک سیم بسته را مشخص می کند. قابل ذکر است که این سیم بسته را همواره می توان طوری در نظر گرفت که سیم در حال حرکت، بخشی از این سیم بسته باشد. در این صورت استدلال خلف روی این سیم بسته را در حسی مشابه می کنیم که جریان القای در آن برقرار است. به همین ترتیب می توان بردار عمود بر سطح ایجاد شده توسط این سیم بسته را نیز بدست آورد. یعنی داریم:

نیروی مغناطیس وارد بر سیم در حال حرکت $\Leftarrow$ جهت جریان القای (در یک سیم بسته که خودمان اختیار می کنیم) $\Leftarrow$ جهت سیم استندال گیری در استندال خلف $\Leftarrow$ جهت بردار عمود بر سطح (سطحی که توسط این مغنیت تعریف شده است) می توان قانون القای فارادی را از دید دونا فرا، یکی ناظر ساکن و دیگری ناظر در حال حرکت (به همراه سیم) بررسی کرد. ناظر ساکن:

میدان مغناطیس B مستقل از زمان است (طبق فرض میدان B را از دید ناظر ساکن مستقل از زمان فرض کرده ایم). سیم در حال حرکت با سرعت ثابت v است، بنابراین خطوط میدان مغناطیس را قطع می کند.

میدان الکتریکی $E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$ در سیم در حال حرکت ایجاد می شود. (این میدان الکتریکی می تواند در یک سیم بسته، که انتی-بسته است، جریان القای ایجاد کند که این جهت ^{جهت} همان است که از نیروی مغناطیس وارد

بر بارهای آزاد نسیم نسیم می شود.

۱- بادالتن $\vec{E}$ و توان نیروی محرکه الکتریکی را در نسیم (در حالت کلی هر تکه) به دست آورد.

$$\vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{E} \cdot \vec{v}$$

ناظر در حال حرکت با نسیم :

- میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در این مختل از زمان نیست ، بلکه می توان آن را با استفاده از میدان لورنتس به دست آورد. در این صورت می توان دید که $\vec{B}$ تابع از زمان خواهد بود.

- نسیم از لحاظ این ناظر (ناظر در حال حرکت با نسیم) یک نسیم ساکن است. یعنی از دید این ناظر، حرکت وجود ندارد، بنابراین خطوط میدان مغناطیسی قطع نمی شود. این ناظر، نیروی محرکه الکتریکی را از رابطه $\vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{v}$ به دست می آورد.

- این ناظر نیروی محرکه الکتریکی را با استفاده از این واقعیت به دست می آورد که نسیم ساکن است ولی $\vec{B}$ با زمان تغییر می کند یعنی بارها را

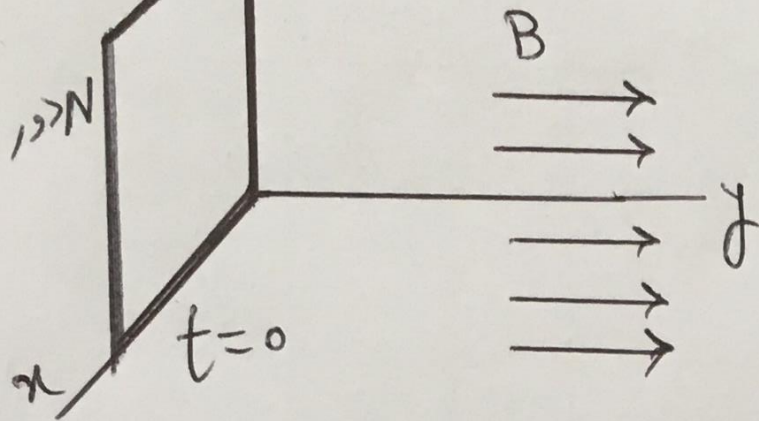
$$\vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

مسئله: سیم به مسطحی شکلی به ابعاد l_1 و l_2 دارای N دور سیم نازک است. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ مطابق شکل مغرض است. صفحه این سیم به ابتدا در صفحه xoz قرار داشته است، سپس با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z شروع به چرخش می‌کند. نیروی محرکه القایی ایجاد شده در سیم به چه مقدار است؟

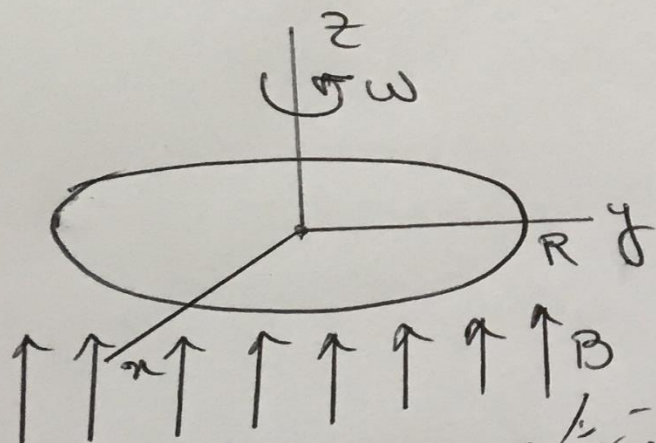
$$\vec{B} = B \hat{a}_y$$

الف: با استفاده از $\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

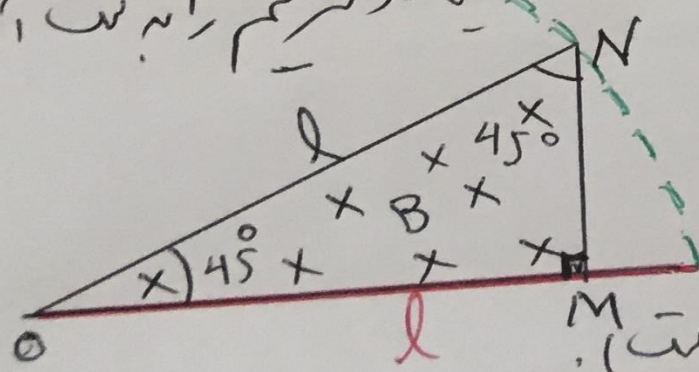
ب: با استفاده از $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$



مسئله ۲: دایره فلزی دایره‌ای شکل به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور عمودی آن می‌چرخد. اگر میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت B به موازات محور عمودی برقرار باشد، نیروی محرکه الکتریکی را محاسبه کنید.
این مسئله را به روش حل کنید.

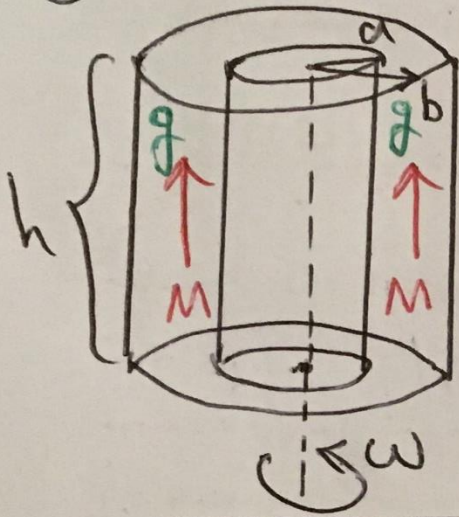


مسئله ۳: میدان مغناطیسی یکنواخت B در ناحیه OMN مطابق شکل و عمود بر صفحه مفروض است. سیم رسانایی به طول l ابتدا در موقعیت OM قرار داشته است. این سیم را با سرعت زاویه‌ای ثابت ω مطابق شکل حول نقطه O می‌چرخانیم. نیروی محرکه الکتریکی دو سر سیم را به ترتیب $\mathcal{E}_1$ (میدان مغناطیسی در بیرون این ناحیه ضوالت) و $\mathcal{E}_2$ (میدان مغناطیسی در ناحیه ضوالت) محاسبه کنید.



مسئله را به روش حل کنید.
ناحیه یک مثلث قائم الزاویه مستوی الی‌فین فرض کنید.
دایره در رسم شکل این فرض مستوی الی‌فین رعایت نشده است.

مسئله ۴: یک آهنربای استوانه‌ای توخالی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b حول محور استوانه و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. این آهنربا دارای مغناطیس شدن یکنواخت $\vec{M} = M\hat{a}$ است. اگر تراوانی نباشد آهنربا برابر با: $\vec{K}_m$ باشد، مقادیر $\vec{B}$ و $\vec{H}$ در $\vec{a}$ به دست آورید. رسانندگی برابر با γ در نظر بگیرید.



از دید ناظر ساکن، نیروی محرکه القایی می‌تواند یادربجه حرکت رسانا در میدان مغناطیسی ایجاد شود و یا در اثر تغییراتی در میدان مغناطیسی حاصل شود.

$$\mathcal{E} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

(Motional electromotive force)

$$\mathcal{E} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

(Transformer electromotive force)

نیروی محرکه القایی

الکترومغناطیس ۲

خودالقای مغناطیسی و القای متقابل مغناطیسی

خود القای متقابل طیس - القای متقابل منفی طیس

$$\vec{B} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \text{از طرفین طبق قانون}$$

طالع Φ بر حسب I خطی است، زیرا داریم:
بیو - سادار می توان نوشت (برای یک حلقه جری):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{L} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad \text{به ضرب خود القای متقابل طیس و گویید و دارای ولج آتری}$$

$$d\Phi \propto dI \Rightarrow d\Phi_B = L \cdot dI \Rightarrow$$

$$L = d\Phi_B / dI \quad \text{نسبت } \Phi_B \text{ به } I \text{ است.} \quad \text{نسبت } \Phi_B \text{ به } I \text{ است.}$$

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

نسبت Φ به I

$$L = \frac{d\Phi}{dI} \quad \text{اگر نسبت غیر خطی باشد داریم:}$$

$$\vec{B} = \mu(H) \cdot \vec{H} \quad \text{و} \quad \mu = \mu(H) \quad \text{داریم}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\mu = \mu(I) \quad \text{و می همواره می توان نوشت}$$

$$B = B(I) \Rightarrow B = B(I) \Rightarrow \phi = \phi(I).$$

از طرف دیگر داریم:

برای محاسبه تغییر خطی $d\phi/dI$ مقدار ϕ را ثابت. از این روش می توان $L = d\phi/dI$ را مستقل از I در نظر گرفت. در حالی که برای محاسبه خطی (دیاگنالیسی و یا رانجیسی) داریم: $L = \phi, I$ و می توان نوشت:

$$L = d\phi/dI = \phi/I$$

در حالت کلی داریم:

$$\xi = \frac{-d\phi}{dt} = - \frac{d\phi}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow \xi = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\xi = -L \frac{dI}{dt}$$

برای محاسبه خطی داریم:

در حالت کلی ممکن است چند حلقه داشته باشیم (دو حلقه یا بیشتر). در این صورت تغییر جریان الکتریکی در یک حلقه، باعث ایجاد نیروی محرکه الکتریکی در حلقه کنونی دیگر هم می شود (البته تغییر جریان الکتریکی باعث ایجاد نیروی محرکه الکتریکی در خود آن حلقه نیز می شود).

توجه کنید که همواره در مدارهای صلب و ساین، کمالات رسانندگی فقط از تغییرات جریان ناشی می شود. در این صورت برای محاسبه خطی $d\phi/dI$ مقدار ϕ را ثابت و مستقل از جریان

فرض کنید تعداد n حلقه جریان داشته باشیم و همه این جریانها با زمان تحریک شده
در این صورت شار میدان مغناطیسی گذرنده از سطح حلقه i ام برابر است با:

$$\Phi_i = \Phi_{i1} + \Phi_{i2} + \dots + \Phi_{in} = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}$$

بیردی محلی که اتفاق می افتد در حلقه i ام (به خاطر تغییر زمان جریان هر یک از حلقه ها و همین طور خودش)
عبثت است از:

$$\mathcal{E}_i = \frac{-d\Phi_i}{dt} = - \left(\frac{d\Phi_{i1}}{dt} + \dots + \frac{d\Phi_{in}}{dt} \right) = - \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dt}$$

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt}$$

برای مدارهای صلب و سلفی داریم:

M_{ij} ضریب القای متقابل مغناطیسی می گویند:

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \quad (i \neq j)$$

است
راص M_{ij} نیز همان L_{ij} است

برای $j=i$ به همان به هم رسان ضریب خود القای مغناطیسی می رسم:

$$M_{ii} = L_i = \frac{d\Phi_{ii}}{dI_i}$$

می توان گفت آن داده در حالت کلی داریم $M_{ij} = M_{ji}$ (هنگامی که جفت شده گی کامل باشد).

منتظر از جفت شده گی کامل این است که تمام شار میدان مغناطیسی حاصل از حلقه i ام از سطح
حلقه j ام بگذرد.

برای میانه ضریب خود القای مغناطیسی و ضریب القای متقابل مغناطیسی می توان از فرمول های نوین
استفاده نمود.

Franz Ernst Neumann
Carl Gottfried Neumann

(پیر)

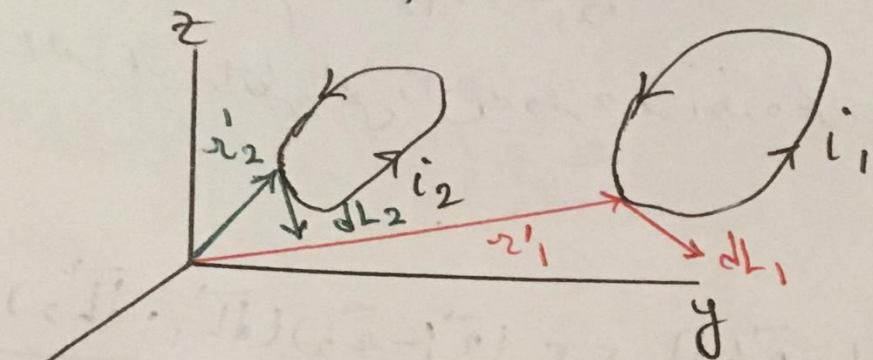
(پیر)

خود القای متقابل

ضرایب خود القای متقابل (از مدل کی نویان)

مفهوم ضرایب خود القای متقابل برای سیستمی متشکل از N مدار مجزایی حاصل جریان، معیه خواهد بود.
برای یک دگانه حاصل از دو مدار، L_{11} ، L_{22} ضرایب خود القای و L_{12} ، L_{21} ضرایب القای متقابل هستند.

تشریح فیزیکی از ریشه از حلقه 1 به خاطر وجود جریان در حلقه 2 برابر است با:



$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_{12} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} (\nabla_1 \times \vec{A}_{12}) \cdot d\vec{S}_1 \Rightarrow$$

$$\Phi_{12} = \oint_{C_1} \vec{A}_{12} \cdot d\vec{L}_1 = \oint_{C_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{I_2 \cdot d\vec{L}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \cdot d\vec{L}_1 \Rightarrow$$

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{L}_2 \cdot d\vec{L}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \Rightarrow L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{L}_2 \cdot d\vec{L}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{L}_1 \cdot d\vec{L}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

همیشه داریم:

همان طور که دیده می شود داریم: $L_{12} = L_{21} = M$ (ضرایب القای متقابل) ، یا:

فول کی نویمان

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot I_1 \cdot I_2} \iint \frac{\vec{J}_2 \cdot \vec{J}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \cdot d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2$$

$$L_{11} = L_1 = \frac{\mu_0}{4\pi I_1^2} \iint \frac{\vec{J}(\vec{r}_1) \cdot \vec{J}(\vec{r}_1')}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_1'|} \cdot d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_1'$$

انتفاذه از فول کی نویمان کا رسادہ ای نسبت
 این فول کی کوئی گروہ کہ ۱- پارامتر کی L و M نقطہ
 گنگی به شکل هندسی تسمه دارند و ۲- $L_{12} = L_{21} = M$
 یعنی $L_{12} = L_{21}$ که آن را با M نشان می دهیم.

در شکل بالا نیروی وارد بر مدار بسته حاصل جریان I_1 از طرف مدار بسته حاصل جریان I_2 را به دست می آوریم
 میدان مغناطیسی حاصل از مدار 2 در مکان $\vec{r}_1$ مربوط به حلقه جریان 1 برابر است با:

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_2 \frac{d\vec{L}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2')}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2'|^3}$$

نیروی وارد بر این جریان I_1 از طرف میدان مغناطیسی $\vec{B}_2$ برابر است با:

$$d\vec{F}_{12} = I_1 \cdot d\vec{L}_1 \times \vec{B}_2 \Rightarrow d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{L}_1 \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_2 \frac{d\vec{L}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2')}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2'|^3} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{L}_1 \times [d\vec{L}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2')]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2'|^3}$$

نیروی وارد بر مدار 2 از طرف مدار 1 نیز برابر است با:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_2 \cdot I_1}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{L}_2 \times [d\vec{L}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1')]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1'|^3}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \text{به دست آمده، پس می بینیم}$$

البته این رابطه را می توان به دفع متشابهه نمود. برای این منظور باید $\vec{F}_{12}$ را ساده نمود:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[\oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{L}_2 [\vec{L}_1 \cdot (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)]}{|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|^3} - \oint_1 \oint_2 \frac{(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)(\vec{L}_1 \cdot d\vec{L}_2)}{|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|^3} \right]$$

$$* = \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{L}_2 [\vec{L}_1 \cdot (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)]}{|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|^3} = \oint_2 d\vec{L}_2 \oint_1 \frac{d\vec{L}_1 \cdot (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|^3} =$$

$$= \oint_2 d\vec{L}_2 \oint_1 d\vec{L}_1 \cdot \vec{r}_1 \frac{-1}{|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|^3} \stackrel{\text{قضیه استرکس}}{=} \oint_2 d\vec{L}_2 \int_{S_1} (\vec{\nabla}_1 \times \vec{\nabla}_1 \frac{-1}{|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|^3}) \cdot d\vec{S}_1 = 0$$

صفر

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)(\vec{L}_1 \cdot d\vec{L}_2)}{|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2|^3}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

بر راحتی می توان دید که

نرم شود که فرمول فوق بیان برای القای متقابل در حلقه نیردکم و گشتا در نیردکی وارد از مدار به مدار دیگر اهمیت بسیاری دارد.

الکترومغناطیس ۲

انرژی مغناطیسی در القاگر و القای متقابل

محاسبه انرژی متغذایی :



یک حلقه جریان با جریان پایایی I را در نظر می گیریم.

کاری را که باید انجام دهیم تا جز حلقه ای جریان نداریم و اگر نه

رابطه می آوریم. کار لازم برای آوردن مدار جریان 2 در حضور

مدار جریان 1 برابر است با W_{12} . کار لازم برای آوردن مدار جریان 3 در حضور مدار جریان 1 برابر است با

W_{13} و به همین ترتیب. پس داریم :

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23} + W_{14} + W_{24} + W_{34} + \dots \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} (W_{12} + W_{13} + W_{23} + \dots + W_{21} + W_{31} + W_{32} + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W_{ij} \quad (i \neq j)$$

برای وقتی که الکترون ها خیلی کوچک باشند (پیزانسی) داریم :

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{L}_{ij}$$

که در آن $\vec{F}_{ij}$ نیروی وارد بر حلقه i است از طرف حلقه j و $d\vec{L}_{ij}$ یعنی

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_i I_j \oint \oint \frac{d\vec{L}_i \cdot d\vec{L}_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \int \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{L} = -\frac{\mu_0}{8\pi} I_i I_j \oint \oint \int_{\infty}^{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{d\vec{L}_i \cdot d\vec{L}_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\Rightarrow W = \frac{-\mu_0 I_i \cdot I_j}{8\pi} \oint \oint \int_{\infty}^{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{d\vec{L}_i \cdot d\vec{L}_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \hat{a}_{\vec{r}_i - \vec{r}_j}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \cdot d|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \hat{a}_{\vec{r}_i - \vec{r}_j}$$

$$\Rightarrow W = \frac{+\mu_0 I_i I_j}{8\pi} \oint \oint \frac{d\vec{L}_i \cdot d\vec{L}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \Big|_{\infty}^{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \Rightarrow W = \frac{\mu_0}{8\pi} I_i I_j \oint \oint \frac{d\vec{L}_i \cdot d\vec{L}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \iint \frac{\vec{J}_i \cdot \vec{J}_j \cdot dV_i \cdot dV_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$I d\vec{L} = \vec{J} \cdot dV$$

$$\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_j \cdot dV_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{J}_i \cdot \vec{A}_i \cdot dV_i \Rightarrow W = \frac{1}{2} \int \vec{J} \cdot \vec{A} \cdot dV$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \, dV$$

$$\text{داریم: } \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \Rightarrow$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\text{پس: } W = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \, dV - \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \, dV \Rightarrow$$

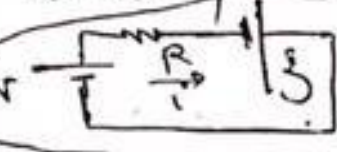
$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, dV - \frac{1}{2\mu_0} \oint_S (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{ds}$$

برای می گوییم انرژی مغناطیسی باید یک سطح درین { یا یک سطح میوه ای مغناطیسی } را در نظر بگیریم یعنی باید سطحی که S که ای به شعاع ∞ باشد پس: $A \propto \frac{1}{r}$, $B \propto \frac{1}{r^2}$, $ds \propto r^2$ پس برای یک سطح کره به شعاع ∞ انتگرال در صفر می شود یعنی داریم:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, dV = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} \, dV$$



$$V = RI + L \frac{di}{dt} \Rightarrow V \cdot i = Ri + L i \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = Li \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = (i - \frac{\phi}{L}) \Rightarrow$$



$$V - Ri + \mathcal{E} = 0 \Rightarrow V - Ri - L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E} \cdot I$$

از طرفی برای یک سلف داریم:

یعنی کار لازم برای حرکت با سرعت در یک مدار بسته در واحد زمان باید بر نیروی محرکه الکتریکی غلبه کند، بتواند در یک مدار بسته جریان الکتریکی را ایجاد کند.

$$\frac{dW}{dt} = -\dot{\Phi} \cdot I = -\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right) \cdot I = \frac{d\Phi_B}{dt} \cdot I \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(L \cdot I) \cdot I = L \cdot I \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$dW = L \cdot I \cdot dI \Rightarrow \int_0^W dW = L \int_0^I I \cdot dI \Rightarrow W = \frac{1}{2} L I^2$$

که البته $W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV$ معادل است.

$$M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

هنگامی که حثت شدگی بین دو مدار ۱۰۰٪ باشد داریم:

در غیر اینصورت داریم: $M = K \sqrt{L_1 \cdot L_2}$ به طوری که

$|K| \leq 1$ یعنی M هرگز از حثت با منفی باشد.

تغییر جهت جریان هر یک از مدارهای ۱ و ۲.

برای $K > 0$ داریم $M > 0$ یعنی حثت شدگی مثبت است یعنی شارهای ناشی از I_1 و I_2 در دو سیم هم جهت اند.

..... $M < 0$ $K < 0$ منفی نشسته.

بدیه ستود که برای حالتی که N در سیم (به جای یک) داریم، داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I}$$

$$L = \frac{N^2}{I}$$

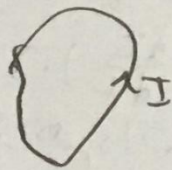
قبلاً نشان دادیم که برای یک سلف یا یک حلقه جریان تغییر انرژی ذخیره شده در واسه زمان به صورت زیر است:

$$\frac{dU}{dt} = -\mathcal{E} \cdot I$$

از طرفی دیگر بدست آوردیم: $U = \frac{1}{2} L I^2$. به علاوه از رابطه $\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt}$ نیز می توان نتیجه گرفت:

$$U = \frac{1}{2} \mathcal{E} \cdot I$$

برای یک مدار متزوی داریم:
(برای یک مدار صلب و ساکن)



$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \cdot \frac{dI}{dt}$$

توزیدی کنیم: $L = \frac{d\Phi}{dI}$

برای یک مدار صلب و ساکن همواره تغییر شار مغناطیسی با تغییر جریان متناسب است، پس $L = \frac{d\Phi}{dI}$.
به کمیت $L = \frac{d\Phi}{dI}$ ، القای خودی می گوئیم. به حال این کمیت را القای خود القایی می نامیم. رابطه $L = \frac{d\Phi}{dI}$ برای کلیه محیطی که مدار کی صلب و ساکن در سطح قرار دارند، برقرار است خواه این محیط از (میله ای مغناطیسی) حلقی باشد خواه غیر حلقی. حتی:
(برای محیطی که غیر حلقی و خطی)
 $L = \frac{d\Phi}{dI}$

برای محیطی که حلقی و عمود" ثابت L مستقل از جریان خواهد بود. زیرا طبق قانون بیوساوار، $\mathcal{B}$ مستقیماً به جریان وابسته است (برای محیطی که حلقی) بنابراین $\mathcal{B} \propto I$ و نیز مستقیماً به جریان وابسته است. بنابراین $\Phi \propto I$

بنابرین $L = \frac{d\Phi}{dI}$ مقدار ثابت (مستقل از جری) خواهد بود. به عبارت دیگر برای حلقه‌های تَرَاح نوشت:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\Phi}{I} \quad (\text{حلقه حلقه})$$

برای حلقه‌ای که از توابع خطی غیر خطی است نیز داریم: $\vec{B} = \mu(H) \vec{H}$

و چون طبق قانون آمپر $H \propto I$ پس $\mu = \mu(I)$. پس طبق قانون بیو-سوار داریم: $\vec{B} = \vec{B}(I)$ و لنگی B به I به صورت یک لنگی خطی نخواهد بود یا به عبارت دیگر B دیگر به I به صورت ساده ای که قبلاً دیدیم وابسته نیست. بنابرین $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{l}$ نیز لنگی خطی با جری نخواهد داشت. نوع

الزاماً مقدار ثابت (مستقل از جری) است. $\Phi = \Phi(I) \Rightarrow \frac{d\Phi}{dI}$

هر حلقه که همراه با حلقه حلقه خطی در حلقه غیر خطی داریم: $L = \frac{d\Phi}{dI}$ ولی برای حلقه‌های حلقه حلقه L ثابت (مستقل از I) است. در حالی که برای حلقه‌های غیر خطی حلقه حلقه، L مقدار مستقل از جری نیست.

و به جری وابسته است.

برای یک حلقه خطی، ضرایب $m_{ij} = \frac{d\Phi_i}{dI_j}$ (که $i \neq j$) نیز ثابت است که مستقل از جری خواهد بود. ولی برای حلقه‌های غیر خطی m_{ij} متغیر است و لنگی وابسته به جری است.

الکترومغناطیس ۲

انرژی مغناطیسی (ادامه) - جریان‌های کند تغییر

میان یک مدار، انرژی و الاستیک (مدار صلب، رسانا) و یک سلف خطی:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt} = \sum \mathcal{E} \cdot I \Rightarrow \frac{dU}{dt} = - \left(-L \frac{dI}{dt} \right) \cdot I \Rightarrow dU = L I dI \Rightarrow U = \frac{1}{2} L I^2$$

برای سلف 3 مدار که با یکدیگر به هم گسیخته دارند خواهیم داشت:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt} = I_1 (-\mathcal{E}_{11} - \mathcal{E}_{12} - \mathcal{E}_{13}) + I_2 (-\mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{22} - \mathcal{E}_{23}) + I_3 (-\mathcal{E}_{31} - \mathcal{E}_{32} - \mathcal{E}_{33})$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = I_1 \left(+L_1 \frac{dI_1}{dt} + M_{12} \frac{dI_2}{dt} + M_{13} \frac{dI_3}{dt} \right) + I_2 \left(M_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M_{23} \frac{dI_3}{dt} \right) + I_3 \left(M_{31} \frac{dI_1}{dt} + M_{32} \frac{dI_2}{dt} + L_3 \frac{dI_3}{dt} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} + L_2 I_2 \frac{dI_2}{dt} + L_3 I_3 \frac{dI_3}{dt} + M_{12} \left(I_1 \frac{dI_2}{dt} + I_2 \frac{dI_1}{dt} \right) + M_{23} \left(I_2 \frac{dI_3}{dt} + I_3 \frac{dI_2}{dt} \right) + M_{13} \left(I_1 \frac{dI_3}{dt} + I_3 \frac{dI_1}{dt} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_1 I_1^2) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_2 I_2^2) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_3 I_3^2) + M_{12} \frac{d}{dt} (I_1 I_2) +$$

$$+ M_{23} \frac{d}{dt} (I_2 I_3) + M_{13} \frac{d}{dt} (I_1 I_3) \xrightarrow[\text{تغیارات مستقل}]{\text{استقلال از متغیرها}} U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 +$$

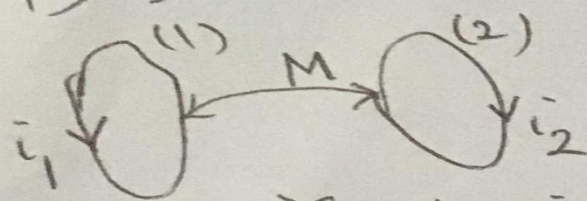
$$+ \frac{1}{2} L_3 I_3^2 + M_{12} I_1 I_2 + M_{23} I_2 I_3 + M_{13} I_1 I_3 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{ij} I_j \right) I_i \Rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \quad \leftarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{برای } n \text{ سلف} \end{matrix}$$

را طبق بین L_1 و L_2 و M برای دو مدار چاره!

فرض کنیم که دو مدار (۱) و (۲) حاصل جریان i_1 و i_2 باشند. انرژی مغناطیسی این سیستم برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$



انرژی یک دلفه باید می بینیم باشد زیرا سیستم یک مورد، برای

بایداری، خود را در حد اقل انرژی نگه می دارند. بنابراین برای U که تابعی از دو متغیر i_1 و i_2 است داریم (گوییم که i_1 و i_2 مستقل از یکدیگرند):

$$U(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

و i_1 نمی توانند به تنهایی برای این تابع تابع دو متغیره درم درم با یک بعضی رانتهای می دهند (نه سهمی و نه هذلولی). زیرا در حالت کلی تابع بالا به صورت معادله یک بعضی می شود:

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 = U$$

(معادله یک) که معادله است که مجانب ندارد. یعنی x و y (در اینجا i_1 و i_2) به بی نهایت نمی روند. شرط بعضی بودن را می نویسیم (یعنی شرط نه داشتن مجانب)

$$M^2 - 4\left(\frac{1}{2} L_1\right)\left(\frac{1}{2} L_2\right) < 0 \Rightarrow M^2 < L_1 L_2 \Rightarrow |M| < \sqrt{L_1 L_2}$$

$$-\sqrt{L_1 L_2} < M < \sqrt{L_1 L_2} \Rightarrow M = K \sqrt{L_1 L_2}$$

که در آن $-1 < K < 1$ است.

اگر $K > 0$ ، در این صورت $M > 0$ است. در این صورت جهت شدگی دو مدار مثبت است. یعنی شدگی ناشی از i_1 و i_2 در دو نیم هم جهت اند. اگر $K < 0$ باشد داریم $M < 0$ و جهت شدگی دو مدار منفی است. به عبارت دیگر شدگی حاصل از i_1 و i_2 در دو نیم هم جهت نشده.

نکته: تابع ضمنی درم درم $a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0$ معادله دو دایره، دایره و e و f ثابت اند. این معادله مخروطی می تواند بعضی، هذلولی و سهمی باشد. داریم:

سهمی $\Delta = 0$ و بعضی $\Delta < 0$ و هذلولی $\Delta > 0$ اگر $\Delta = b^2 - 4ac$

جریان‌های کُند تغییر (Slowly varying currents)

اگر جریان کُند رفته از مدار طوری باشد که مدار به میزان قابل توجهی تأثیر نکند، آنرا کُند تغییر می‌نامیم. یادآوری می‌شود که هنگامی که جریان یا زمان تغییر کند، در این صورت اکثر دایره‌های آزاد با سرعت متغیر

زمان حرکت می‌کنند، یعنی ثابت می‌مانند. می‌دانیم که با اکثر مدارها، تأثیر می‌کند. حال اگر تغییر زمانی کم باشد، میزان تأثیر کم است. تغییر زمانی کم به این معناست که معادله دیفرانسیلی که به صورت

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{است به صورت} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{مبدل می‌شود. به عبارت دیگر رابطه} \quad \omega_0^2 x = 0 \quad \text{را حذف می‌کنیم}$$

برقرار است. یعنی جریان‌های وارد شده به یک نقطه یا جریان‌های خارج شده از آن نقطه با هم برابرند.

به عبارت دیگر قانون جریان کُند (KCL) برقرار است. به همین ترتیب برای جریان‌های کُند تغییر

$$\text{داریم} \quad \nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{که منجر به رابطه} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{یا} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{می‌شود که همان قانون}$$

ولتاژ کُند (KVL) می‌شود. به عبارت دیگر برای جریان‌های (مستقل از زمان) و جریان

کُند تغییر (تغییر زمانی کم) قوانین KVL و KCL برقرار است. توجه کنید که در حالت جریان

پایه، تأثیر وجود دارد ~~در مدار~~ ولی در جریان‌های کُند تغییر، تأثیر وجود دارد ولی ضعیف‌تر است.

به طوری که می‌توان از قوانین مدار KVL و KCL استفاده نمود. اگر جریان کُند تغییر نباشد،

یعنی اگر جریان یا زمان به کندی تغییر نکند، در این صورت، میزان تأثیر ممکن است ~~کم~~

قابل توجه باشد. اگر تغییر زمانی در این صورت ناشی قابل توجه است و نمی توان
از روابط مدار KVL و KCL استفاده نمود زیرا در قوانین مدارها هیچگاه بحث ناشی
محیط نیست. قوانین مدار KVL و KCL مربوط به حلقه ها، گره ها، و شاخه ها (الکتریک آزاد)
در رسانا می شود و شارش انرژی در رسانا را در نظر می گیرند نه شارش انرژی در اثر ناشی.
زیرا برای وجود جریان در رسانا، یک محیط مادی لازم است و در حالی که هنگام ناشی
اکثر و منفی طیس، وجود محیط مادی لازم نیست و قوانین مدارها نمی تواند ناشی را توصیف کند.
بنابراین برای توصیف ناشی اکثر و منفی طیس صرفاً باید از معادلات میدان اکثر و منفی طیس استفاده
کرد. در حالی که برای توصیف جریان یا (مستقل از رسانا) و در آنجا که تغییر می توان از
قوانین مدار KVL و KCL استفاده نمود هر چند که برای این حالت ها نیز می توان تقوای
میدانها اکثر و منفی طیس را به کار برد. البته تقوای میدان اکثر و منفی طیس بسیار پیچیده تر از قوانین
مداری هستند.

بنابر این هنگامی که ~~صحت~~ از تغییر زمان کم یا زیاد می کنیم می خواهیم بینیم منظور چیست ؟
به عبارت دیگر چه وقت باید تا پیش آمد نظر بگیریم یا از آن صرف نظر کنیم . باز هم به بیان دیگر
عامل هستیم بینیم چه هنگام می توانیم از قوانین مدارای استفاده کنیم یا باید از معادلات میدان
اکثر رخنه طوسی استفاده کنیم .

در پاسخ باید گفت که اگر میزان تابش اکثر رخنه طوسی کم باشد ، استفاده از معادلات مدارای KCL و
KCL بلا مانع است و هنگامی که تابش قابل توجه باشد ، حتماً باید از معادلات میدان اکثر رخنه طوسی
استفاده نمود . البته تابش اکثر رخنه طوسی حاصل از یک سیم یا تقاربت یا هر ایمان دیگر را می توان
یا گرمای دفع شده از یک موجود زنده تشبیه کرد . اگر یک ایمان (عنصر) دارای ایجاد می کرد حلقه
از طول موج باشد ، تابش آن قابل صرف نظر است و می توان قوانین مدارای را به کار برد ~~بجای~~
در این حالت ، جریان که تغییر برقرار است . اگر ایجاد یک ایمان بزرگتر از طول موج باشد ،
تابش آن قابل ملاحظه است و باید معادلات میدان اکثر رخنه طوسی را به کار برد . در این جا ،
تغییر زمان را به صورت تکلف و لینیوس در نظر بگیریم . طوسی است که هر تغییر زمان را از آن به
صورت توابع لینیوس نوشت (برای فوریه و اندال فوریه) . اگر فوکانس مثلاً 50 هرتز باشد ،

طول موج برابر با $\frac{c}{f} = \lambda$ و مساوی با $m \times 10^6$ خواهد بود. قابل ذکر است که تمام اجزای این مدار همواره دارای اجزای فیزیکی کوچکتر از $m \times 10^6$ است. به عبارت دیگر $\lambda \ll l$.
(توجه کنید که $\lambda \ll l$ معادل با $\lambda \ll 0.1$ است). باز یاد در تئوری و کانس متدا باید بخش

AM (و کانس پائین رادیویی) داریم $f = 10^6$ Hz و داریم $\lambda = 300$ m. اگر اجزای مدار فیزیکی کمتر از 300 m باشد یعنی کمتر از 30 m باشد، تئوری قابل صرف نظر است. و در آن از قوانین مداری KVL ، KCL استفاده نمود. در غیر این صورت باید از معادلات میدان استفاده نمود. با بالا تر رفتن و کانس متدا برای و کانس های FM رادیو و امواج ملو و بلوئی داریم: $f = 10^8$ Hz و $\lambda = 3$ m. توجه شود که با بالا تر رفتن و کانس، طول موج λ کاهش می یابد و ممکن است λ ~~اجزای مدار~~ شرط $\lambda \ll l$ را کرده شود. در این صورت قوانین مداری معتبر نیست و باید از معادلات میدان الکتریکی و مغناطیسی استفاده نمود. برای و کانس مکرر و دو داریم $f = 10^{10}$ Hz و $\lambda = 0.03$ m. به عبارت دیگر شرط $\lambda \ll l$ یا $\lambda \ll 0.1$ برقرار نیست و باید از نظریه میدان الکتریکی و مغناطیسی استفاده نمود.

الکترومغناطیس ۲

روش متغیرهای مختلط (روش فازوری)

ردش متغیر کی فمکط (ردش فازوری)

در مطالعہ امواج اکثر وقت طری (انتشار امواج) آئیے مطلوب است، مطالعہ رفتہ ریاضیاتی
(Steady state) آن است نه مطالعہ رفتار گذرا (Transient) . برای مطالعہ رفتار

یاد آید یک ردش آن است که به طریق سنتی عمل کنیم . یعنی معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم را بنویسیم
و با در نظر گرفتن شرایط اولیه ، آن را حل کنیم . در این صورت جواب های گذرا و پایدار هر دو با هم
به دست می آید که با ~~در نظر گرفتن~~ ~~در نظر گرفتن~~ تحت زیاد و صرف زمان طولانی می توان به رفتار
پایدار رسید . این ردش حتی برای یک مدار ساده R-L-C و توانایی قلی وقت گیر باشد .

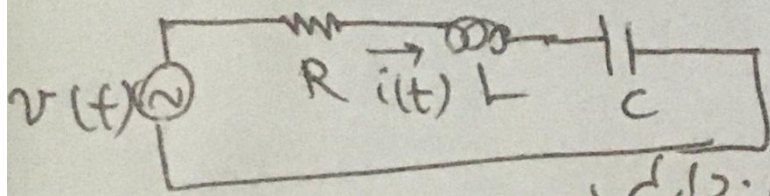
ضمیمه هدف فقط تحلیل رفتار پایدار سیستم باشد (که در مورد انتشار امواج اکثر وقت طری این طور است)
در این صورت می توان از ردش متغیر کی فمکط (فازوری) استفاده نمود . این ردش فقط برای

مطالعه رفتار پایدار یک سیستم خطی در پاسخ به ورودی سینوسی (یا گسسته) کاربرد دارد . قابل
ذکر است که این ردش هم برای تغییرات زمانی کم (و گاهی کم) و هم تغییرات زمانی زیاد (و گاهی
بالا) قابل اجرا است . برای تغییرات زمانی کم تا بدین حد باشد از تحلیل مدار به جای تحلیل
میدان استفاده نمود (در ~~تحلیل~~ تحلیل مدار از توانی مداری RCL ، RLC استفاده

می نمود) . در حالی که برای تغییرات زمانی زیاد فقط تحلیل میدانی باید به کار برده شود . البته هم
در تحلیل میدانی و هم در تحلیل مداری می توان از ردش متغیر کی فمکط (ردش فازوری)
استفاده نمود .

به عنوان مثال، روشن مستعری غنط را برای یک مدار R-L-C به کار می بریم

می خواهیم رفتار حالت پایایی یک مدار را بدست آوری



R-L-C با ورودی $v(t) = V_0 \cos \omega t$ به دست می آوریم. داریم:

$$v(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt \Rightarrow$$

$$R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{i(t)}{C} = \frac{dv(t)}{dt}$$

مشق می گیریم

می توان نوشت $v(t) = \text{Re}(V_0 e^{i\omega t})$. پس ورودی را به صورت $v_1(t) = V_1 e^{i\omega t}$ در نظر می گیریم.

دارد. بنابراین $i_1(t)$ نیز به صورت $i_1(t) = I_1 e^{i\omega t}$ خواهد بود که آن هم یک ترم حقیقی و یک ترم توهی دارد. از این رو اگر $v_1(t) = V_1 e^{i\omega t}$ در نظر بگیریم، در این صورت $i_1(t) = I_1 e^{i\omega t}$ به دست می آید. I_1 در آن یک مقدار ثابت است و البته ممکن است غنط باشد (V_1) نیز ممکن است غنط باشد. زیرا به عنوان مثال اگر $v(t) = V_0 \cos \omega t$ باشد، می توان نوشت:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

در این صورت داریم: $i(\omega t - \frac{\pi}{2})$
 $v_1(t) = V_0 \cdot e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$ خواهیم داشت:

$$v_1(t) = V_0 \cdot e^{-i\pi/2} \cdot e^{i\omega t}$$

و چون نتیجه می شود: $V_1 = V_0 \cdot e^{-i\pi/2}$ که در صورتی که V_1 غلط است.

البته در این مسئله داریم $v(t) = V_0 \cos \omega t$ و $v_1(t) = V_1 \cdot e^{i\omega t}$ با و،

دادن $i\omega t$ $i_1(t) = I_1 \cdot e^{i\omega t}$ که در آن I_1 کمیت ثابت است و همواره $v_1(t) = V_1 \cdot e^{i\omega t}$

در معادله دیفرانسیل بالا داریم:

$$R I_1 (i\omega) \cdot e^{i\omega t} + L \cdot I_1 (i\omega)^2 \cdot e^{i\omega t} + \frac{I_1}{C} e^{i\omega t} = V_1 (i\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

طرفین را بر $e^{i\omega t}$ تقسیم می کنیم، داریم:

$$R I_1 + i L \omega I_1 - \frac{i}{C \omega} I_1 = V_1 \Rightarrow V_1 = [R + i(L\omega - \frac{1}{C\omega})] I_1 \Rightarrow$$

$$V_1 = Z \cdot I_1$$

که در آن $Z = R + i(L\omega - \frac{1}{C\omega})$ امپدانس (مقاومت کلی هرکدام) نامیده می شود.

$\omega - \frac{1}{C}$ L راکتانس (reactance) نامیده می شود و همی ظاهر داریم:

$$X_L = L\omega \quad (\text{Inductive reactance})$$

$$X_C = -\frac{1}{C\omega} \quad (\text{Capacitive reactance})$$

دالسیم $V_1 = Z \cdot I_1$ بنابراین داریم: $I_1 = \frac{V_1}{Z}$. در نهایت برای می گوییم $i_1(t)$ باید

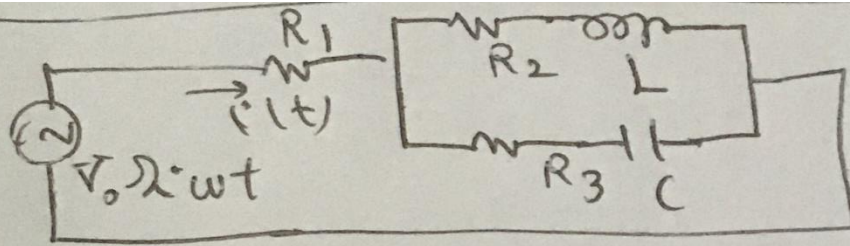
صفت حقیقی ~~است~~ $i_1(t)$ را به دست آوریم زیرا $i_1(t) = I_1 \cdot e^{i\omega t}$

و داریم: $i_1(t) = R \cdot [i_1(t)]$ بگویم شود که برای یک مدار متناوب سینوسی

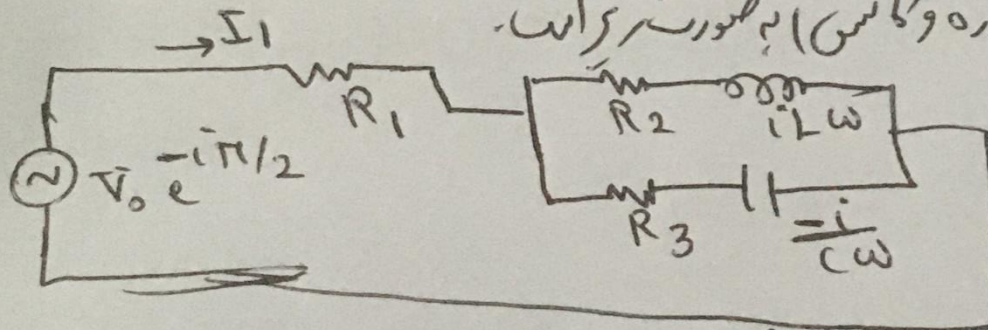
(ایکسپوننسیل) همراه و توان فرم مختلف آن را نوشتیم که در آن داریم $L \rightarrow L\omega$, $R \rightarrow R$

و $C \rightarrow -\frac{1}{C\omega}$, $V_1 e^{i\omega t} \rightarrow V_1 e^{i\omega t}$ یعنی مدار R-L-C را در حوزه فرکانس حل کرده ایم (روش حل با استفاده از تغییر مختلط).

مثال: در مدار زیر (i(t) را به دست آورید)



فرم مختصا مدار (فازوری) یا (حوزه وکاسنی) به صورت زیر است.



$$I_1 = \frac{V_0 e^{-i\pi/2}}{Z}$$

$$Z = R_1 + \frac{(R_2 + iL\omega)(R_3 - \frac{i}{C\omega})}{R_2 + iL\omega + R_3 - \frac{i}{C\omega}} \Rightarrow Z = \alpha + i\beta = |Z| e^{i\phi}$$

$$I_1 = \frac{V_0 e^{-i\pi/2}}{|Z| e^{i\phi}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{i(-\pi/2 - \phi)}$$

البته برای اجتناب از محاسبات کمیت α ، β مستقر رکنه هانه. محاسبه (i(t) به صورت زیر است

$$i(t) = \text{Re} [I_1 e^{i\omega t}] = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2} - \phi) = \frac{V_0}{|Z|} \sin(\omega t - \phi)$$

تبدیل ذکر است که در این روش توان مقادیر (R)، سلف (iL\omega)، خازن (-i/(C\omega)) را با هم به صورت سری و موازی در نظر گرفت و مانند یک مدار معمولی می گوییم.

الکتر ومغناطیس ۲

معادلات ماکسول - انرژی الکتر ومغناطیسی

معادلات ماکسول: تکنون دالستيم

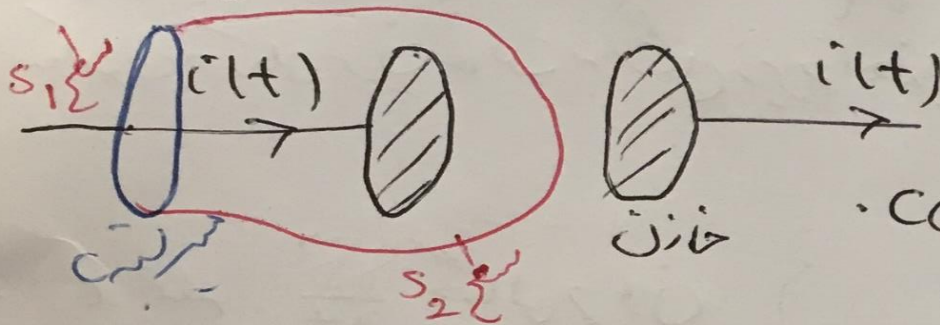
تعميم قانون گاوس $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$
 قانون گاوس درختايس $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
 قانون القای فارادی $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 (قانون فارادی - کروی)

قانون آمپر $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f$

باي کي ديورانتس از قانون آمپر داريم:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

ولی می دانيم که $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$. پس در حالت کلی این نتیجه با معادله پوتمکلی سازگار است.
 از طرفی دیگر از خازنی که جریان متغیر یا زمان می گذرد اما نه حالت ثابت (خازن) متغیر می توان به بنا قفس رسيد.



سطح s_1 سطحی است که روی منحنی c بنا شده است، مثلاً سطح منحنی c .
 سطح s_2 نیز سطح دیگری است که آن هم روی منحنی c بنا شده است. (توجه کنید که می توان به نهایت سطح را روی منحنی c بنا کرد).
 سطوح s_1 و s_2 سطوح باز هستند. در این صورت می توان نوشت:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I(t)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

این یک تناقض است. گویم کنید که جریان $I(t)$ از چپ به راست است، یعنی جریان الکتریکی حاصل از بارهای آزاد در رسانا. چون جریانی از فضای بین دو سطح خازن عبور نمی‌کند پس $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{L} = 0$ برای سطح S_2 به دست آمده است.

به هر حال، این تناقض به معنای آن است که قانون آمپر به صورت $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ نافق است و باید کامل شود. به یاد آورید که هنگام به دست آوردن قانون آمپر از قانون بیو-سوار، شرط $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ را در نظر گرفتیم. به عبارت دیگر قانون آمپر فقط برای جریان پایا (مستقل از زمان) معتبر است و اگر جریان با زمان تغییر کند، مانند

مطالعه شارژ یک خازن، در این صورت قانون آمپر یعنی $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ یا

$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ معجزه نخواهد بود. برای کامل کردن قانون آمپر، آن را با معادله بیرونگسی $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ و $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ سازگاری کنیم. برای این کار، عمل $\vec{\nabla} \cdot$ را به قانون آمپر اضافه می کنیم و آن را به سمت می آوریم به طوری که با معادله بیرونگسی سازگار باشد.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{F} \xrightarrow{\text{دو طرف را سن می گیریم}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}}_{\text{صفر}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\rho}{\epsilon_0} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\epsilon_0 \vec{D}}{\epsilon_0} \right) \Rightarrow \vec{F} = \frac{\epsilon_0 \vec{D}}{\epsilon_0}$$

بنابراین قانون آمپر به فرم $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\epsilon_0 \vec{D}}{\epsilon_0}$ تبدیل می شود. معادلات ماکسول در کلی ترین حالت به شکل زیر خواهند بود.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{نخستین قانون گاوس}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{قانون گاوس دوم}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{قانون القای فارادی}$$

$$(\text{قانون فارادی - کلاسیک})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{نخستین قانون آمپر}$$

$$(\text{قانون آمپر - ماکسول})$$

عمله $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ چگالی جریان

جابجایی الکتریکی می گویند آن را $\vec{J}_D$ نشان می دهیم

بنابراین می توان نوشت:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D$$

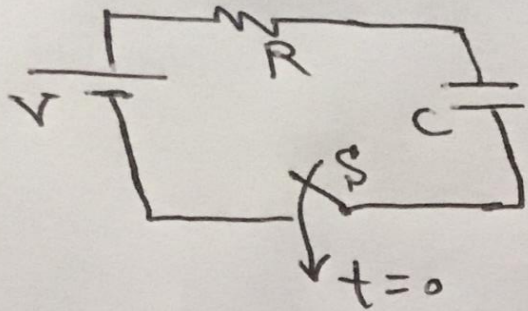
$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

جریان جابجایی الکتریکی به صورت

نیازی به محیط مادی ندارد. جریان رسانش که ناشی از حرکت بارهای آزاد (الکتردهی آزاد) در رسانا بود ~~باید در محیط رسانا (حاشیه سیم)~~ برقرار شود. ولی جریان جابجایی I_D نیازی به محیط مادی ندارد و می تواند ~~در خلأ نیز~~ برقرار شود. زیرا الکترون به تغییر زمانی میدان الکتریکی دارد. چون

$$\vec{J}_D = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

در مدار زیر کلید S در لحظه $t=0$ بسته می شود. جریان جابجایی را به دست آوریم.



عبداً به دست آوریم:

$$V_C(t) = V(1 - e^{-t/RC}) \quad (t \geq 0)$$

$$q(t) = C \cdot V(1 - e^{-t/RC}) \quad (t \geq 0)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} \cdot e^{-t/RC} \quad (\text{جریان رسانشی})$$

حال جریان جابجایی را به دست می آوریم:

جغالی سطحی با الکتریسیته روی صفحات خازن به صورت یکنواختی از زمان برابر است با:

$$\sigma = \frac{q(t)}{A} = \frac{C \cdot V}{A} (1 - e^{-t/RC})$$

میدان الکتریکی بین صفحات خازن را به دست می آوریم:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{C \cdot V}{A \cdot \epsilon} (1 - e^{-t/RC}) \Rightarrow D = \epsilon E = \frac{C \cdot V}{A} (1 - e^{-t/RC}) \quad (t > 0)$$

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{V}{R \cdot A} e^{-t/RC} \Rightarrow I_D = \int_{\text{سطح خازن}} \vec{J}_D \cdot \vec{n} da = \int J_D \cdot da = J_D \cdot A = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$$

از طرفی داریم: $i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$ پس داریم: $I_D(t) = i(t)$ یعنی جریان رسانشی و جریان جابجایی یکدیگر برابرند. داین نتیجه ای منطقی است.

انرژی الکترودینامیکی

برای انرژی الکتریک داریم: $U_E = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV$

مغناطیسی: $U_M = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV$

قانون القای فارادی: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 ضرب داخلی قانون آمپر-مکسول: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
 ضرب داخلی قانون فارادی: $\vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 ضرب داخلی قانون آمپر-مکسول: $\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (1)$$

برای همبستگی خطی، همگن و همسانگرد داریم: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}$ (2)

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (E^2) = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E})$$

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) = \mu \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (H^2) = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (3)$$

$$(1) \text{ و } (3) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} [\frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})] - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

عبارت $u = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$ را چگالی انرژی الکترودینامیکی میدان الکترودینامیکی در واحد حجم می‌نامند و $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ را بردار Poynting می‌نامند. داریم:

$$\boxed{\frac{-\partial u}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{J} \cdot \vec{E}}$$

(قانون بقای انرژی الکترودینامیکی) یا (قضیه Poynting)

به سادگی می‌توان دید که $\frac{\partial u}{\partial t}$ دارای واحد "توان بر حجم" است و بردار پوینتینگ نیز واحد "توان بر سطح" دارد. حال می‌خواهیم ببینیم که $\vec{E} \cdot \vec{J}$ به چه معناست.

الکتر و مغناطیس ۲

قضیه پوئینتینگ - معادله موج

قانون تفسی انرژی میدان الکترومغناطیس: $(\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H})$ ، (11) $\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}$

برای درک فیزیکی این قانون باید ببینیم $\vec{J} \cdot \vec{E}$ چه معنوی دارد: $\leftarrow$ یا قضیه پوینتینگ
فرض می کنیم مجرای ای از یارگی الکتریکی و حاصل کی جریان ایجاد $\vec{E}$ ، $\vec{B}$ می کنند در زمان t ، در لحظه بعد از t یعنی در
زمان $t + dt$ بار الکتریکی بهانه dq می جابه جایی شود. کار انجام شده dW توسط نیروی الکترومغناطیس روی
این بار که در فاصله زمان dt برابر است با:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{L} = dq (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = \vec{E} \cdot \vec{v} dq dt$$

$$\Rightarrow dW = \vec{E} \cdot \vec{v} dq dt \Rightarrow dW = \vec{J} \cdot \vec{E} dv dt \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{E} dv$$

یعنی $\vec{J} \cdot \vec{E}$ برابر است با کار انجام شده توسط نیروی الکترومغناطیس در واحد زمان در واحد حجم یا توان انتقالی از
میدان الکترومغناطیس در واحد حجم (به بار الکتریکی) به همین ترتیب $\vec{J} \cdot \vec{E}$ برابر است با توان انتقالی در واحد حجم از
بار الکتریکی به میدان الکترومغناطیس.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V u dv = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dv + \oint_S \vec{S} \cdot \vec{n} da$$

اگر $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ به نگاه طرف چپ یعنی $\frac{\partial u}{\partial t} =$ مثبت است. پس طرف چپ مثبت و بنابراین طرف راست مثبت
خواهد بود. مثبت بودن طرف راست می تواند در اثر این باشد که $\vec{J} \cdot \vec{E} > 0$ و $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} > 0$ باشد. به عبارت
دیگر کاهش انرژی میدان الکترومغناطیس نسبت به زمان (یعنی $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$) می تواند به علت توان داده شده به بار
الکتریکی (توان داده شده از میدان الکترومغناطیس به بار الکتریکی یعنی $\vec{J} \cdot \vec{E}$) و یا قی آن خروج از سطح بسته باشد
(یعنی $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} > 0$) ~~و یا خروج از سطح بسته~~

می توان را به (۱) راه صورت $(\vec{S}, -\vec{A}) + \vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{+58}{14}$ نوشت، که در آن مثبت بودن طرف چپ یعنی

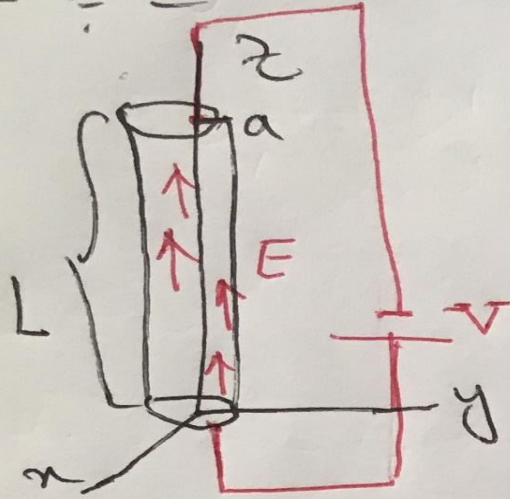
$\frac{58}{14} > 0$ به معنای این است که انرژی میدان الکترومغناطیس در واقع زمان و در واقع حجم افزایش می یابد. این افزایش انرژی میدان در واقع زمان (توان میدان الکترومغناطیس) در حجم V می تواند به خاطر $\langle \vec{E} \cdot \vec{S} \rangle_0$ و $\langle \vec{A} \cdot \vec{S} \rangle_0$ ایجاد شود. همان طور که گفته شد $\vec{E} \cdot \vec{S} = 0$ بیانگر آنست که انرژی داده شده از بار الکتریکی به میدان الکترومغناطیس است در حالی که $\langle \vec{A} \cdot \vec{S} \rangle_0 < 0$ یعنی $\vec{A} \cdot \vec{S}$ منفی می تواند وارد شده به داخل حجم V باشد. یعنی افزایش توان میدان الکترومغناطیس می تواند در اثر یک سیستم تابش کننده الکترومغناطیس باشد (نیروی مکانیکی باعث حرکت بار الکتریکی (حرکت متغیر با زمان) می شود و میدان الکترومغناطیس تابش می شود).

John Henry Poynting

James Clerk Maxwell

فرانک (انگلیسی)
(شماره ۱۰۰)

مسئله: جریان پایایی I از سیم طویل به طول L در شیخ α می گذرد. درستی قضیه پوینتینگ را بررسی کنید.



داریم: $\vec{E} = \frac{V}{L} \hat{a}_z$ (برای $0 < r < a$) و همین طور

داریم: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{a}_\phi \Rightarrow \vec{H} = \frac{I r}{2\pi a^2} \hat{a}_\phi$ ($0 < r < a$)

طبق قضیه پوینتینگ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{S}$$

با انتگرال گیری روی حجم سیم داریم:

$$\frac{d}{dt} \int_V u \cdot dv = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dv + \oint_S \vec{S} \cdot \vec{n} da \quad (1)$$

چون تغییراتی نداریم (جریان پایایی) پس انتگرال اول صفر است. می توان نوشت:

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dv = \int_V g E^2 \cdot dv = \int_V g \cdot \frac{V^2}{L^2} \cdot dv = \frac{g \cdot V^2}{L^2} \cdot A \cdot L \quad (A = \pi a^2)$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dv = \frac{g \cdot V^2 \cdot A}{L} = \frac{V^2}{\frac{L}{g \cdot A}} = \frac{V^2}{R} = V \cdot I \quad (R \text{ مقاومت الکتریکی سیم است})$$

$$\oint_S \vec{S} \cdot \vec{n} da = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left| \frac{V \cdot I \cdot r}{2\pi a^2 \cdot L} \right| (-\hat{a}_r) \cdot \hat{a}_r \cdot d\phi \cdot dz \Big|_{r=a} = -V \cdot I$$

و قضیه پوینتینگ (۱) برقرار است. رابطه (۱) از فرم انتگرالی قضیه پوینتینگ است.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \xrightarrow{\text{کریل}} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{D} \Rightarrow$$

معادله موج (۱۶) اینر تصدیق

$$\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H})}_{\text{صفر}} - \nabla^2 \vec{H} = g \vec{\nabla} \times \vec{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} \Rightarrow -\nabla^2 \vec{H} = g \left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \vec{H} = -\mu g \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \vec{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

معادله موج برای مولفه $\vec{H}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{-\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

برای مولفه $\vec{E}$ موج هم داریم:

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

برای فضای تهی از بار الکتریکی داریم $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ پس:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu g \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

معادله موج برای مولفه $\vec{E}$

معادلات موج، با اثر تضعیف که برای $\vec{E}$ و $\vec{H}$ برقرارند، مربوط به حالتی می‌تواند که در آن
 $\rho = 0$ یعنی چگایی خالص وجود ندارد. متداً در مورد انت راجع الکتریکیت در یک محیط باشد
 هوا یا بیکسک، در غیاب بار خالص چگایی صفر داریم $\rho = 0$ یعنی هیچ بار خارجی به محیط اضافه
 نگردانیم، فقط محیط دارای بارهای مثبت و منفی مساوی است زیرا محیط از نظر الکتریکی خنثی است و
 ρ (مربوط به الکتریک) با ρ^+ (مربوط به مثبت) برابر است. بنابراین در حالتی که هیچ بار خارجی (اضافه) به
 محیط اضافه نگردد، بگویم $\rho = 0$ و معادلات $\vec{E}$ و $\vec{H}$ به صورت زیر هستند:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (1) \quad , \quad \nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

این معادلات برای محیطی که خالی و همگن و بی‌بدن چگالی، با الکتریسیته (بدون چگالی بار خارجی)
 یعنی $\rho = 0$ برقرارند، باید توصیف شود که جوابها $\vec{E}$ و $\vec{H}$ حاصل از معادلات فوق، لازم است
 در معادلات ماکسول هم صدق داده شوند. زیرا ممکن است $\vec{E}$ و $\vec{H}$ بدست آمده از این
 معادلات، در معادلات ماکسول صدق نکنند، یعنی ممکن است جوابهای حاصل از معادلات بالا،

جوابهای خارجی باشند. زیرا برای به دست آوردن این معادلات، از معادلات ماکسول کرن
گرفته‌ایم و عمل کرن گرفتن و توان $\nabla \cdot$ (گرادیان یک میدان اسکالر) را می‌توانند
معادلات $\vec{E}$ و $\vec{H}$ به فرم بالابرای بحث داشتیم. از این آنگاه در یک محیط می‌تواند کامل
معده باشد.

در اینجا ما می‌خواهیم یک جواب معادله بالارائه به شکل کینوسی است. راه به دست آوردیم، از آنجا که هر
میدان متناوب را می‌توان به صورت یک سری فوریه نوشت و همینطور می‌توان یک میدان غیر متناوب را
به شکل انتگرال فوریه نوشت، پس تحلیل یک جرم کینوسی (کینوسی) یک بحث کامل خواهد بود.
برای یک جرم الکترودینامیکی کینوسی (کنفیم - تک و گانس) می‌توان در این تحلیل متحرک را مثل یک کار کرد.

تکلی زمانی را به صورت $e^{-i\omega t}$ در نظر می‌گیریم. (3) $-i\omega t$
که در آن $\vec{E}(\vec{r})$ یک کمیت مختلط است. کمیت فیزیکی مورد نظر $\vec{E}(\vec{r}, t)$ را می‌توان به صورت
 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$ نوشت.

الکترومغناطیس ۲

انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} [\vec{E}(\vec{r}, t)]$$

فیزیکی

زیر به دست می آید:

$$(3) \text{ into (1)} \Rightarrow \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} - \mu\epsilon(-i\omega)^2 \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} - \mu g(-i\omega) \vec{E}(\vec{r}) \times e^{-i\omega t} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + (\omega^2 \mu\epsilon + i\omega \mu g) \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (4)$$

این معادله تئوریات مکان (فقدان) میدان الکتریکی را به دست می دهد.

استبداد معادله (4) را برای محیط خالص می کنیم. (5) $(g=0)$ $\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0$ که در آن

$$k = \omega/c \quad ; \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

می خواهیم بد جواب (5) را به دست آوریم. جوابی که متداثر صغری π واقع باشد نمی

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\pi, z) \quad (6)$$

ما به هم جوابی را به دست آوریم که $\vec{E}$ فقط مولفه π داشته باشد، نمی:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, z) = E_x(x, z) \cdot \hat{a}_x \quad (7)$$

قرار دادن (7) در رابطه $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x, z) = 0$ می دهد:

$$\vec{\nabla} \cdot (E_x(x, z) \hat{a}_x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x(x, z)}{\partial x} = 0 \Rightarrow E_x(x, z) \text{ مستقل از } x \text{ باشد. بنابراین:}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(z) \hat{a}_x \quad (8)$$

$$(8) \text{ into } (5) \Rightarrow \frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + k^2 \cdot E_x(z) = 0 \Rightarrow E_x(z) = E_0 \cdot e^{\pm iKz} \quad (9)$$

$$(9) \text{ into } (3) \Rightarrow \vec{E}(z, t) = E_x(z) \cdot e^{-i\omega t} \hat{a}_x = E_0 \cdot e^{-i(\omega t \mp Kz)} \hat{a}_x$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z, t)|_{\text{physical}} = E_0 \cdot \cos(\omega t \mp Kz) \cdot \hat{a}_x = E_0 \cdot \cos\left(\omega t \mp \frac{z}{c}\right) \hat{a}_x$$

$$E_x(z, t)|_{\text{physical}} = E_0 \cdot \cos(\omega t \mp Kz) = E_0 \cdot \cos\left(\omega t \mp \frac{z}{c}\right)$$

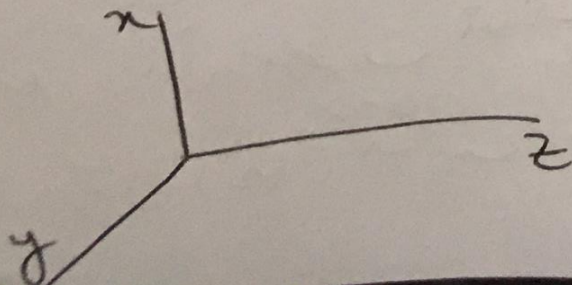
علامت - نشان دهنده حرکت موج از چپ به راست است (+z)

(-z) نشان دهنده حرکت موج از راست به چپ است

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$K = \omega/c = \frac{2\pi f}{f \cdot \lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

عدد موج



$$E_n = \Delta(\omega t - Kz) \text{ در جهت } + \text{ نشر می شود زیرا!}$$

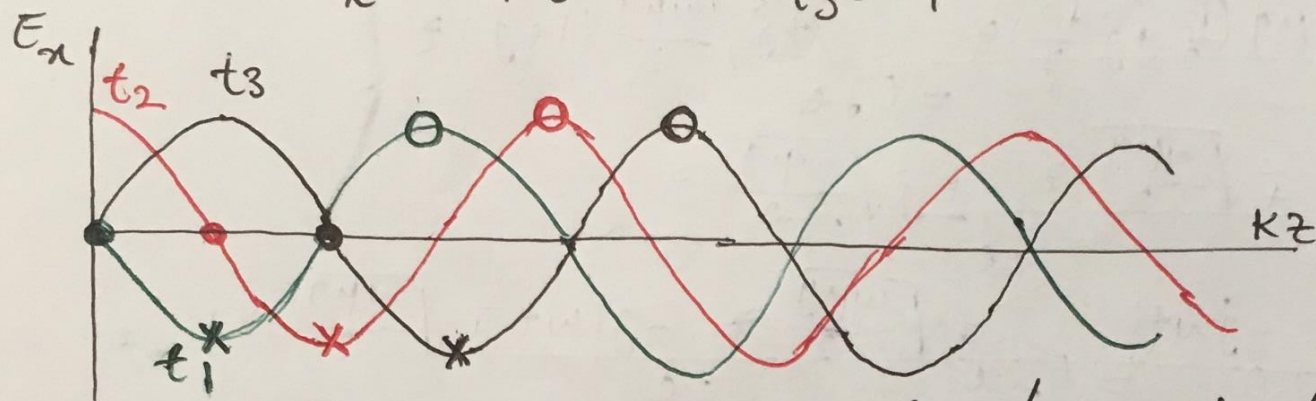
موج

$$\omega t = 0 \Rightarrow E_n = -\Delta \cdot Kz \Rightarrow t_1 = 0$$

$$t_1 < t_2 < t_3$$

$$\omega t = \pi/2 \Rightarrow E_n = \Delta \cdot Kz : t_2 = \pi/2\omega$$

$$\omega t = \pi \Rightarrow E_n = \Delta \cdot Kz \quad t_3 = \pi/\omega$$



$$t_1 < t_2 < t_3$$

نقطه صفر برای زمانهای t_1 ، t_2 ، t_3 در شکل نشان داده شده است. مشاهده می شود که این نقطه در جهت $+z$ حرکت کرده است.

متداً برای نقطه می بینیم نیز همین طور: یعنی نقطه $\times$ در طول زمان t_1 ، t_2 ، t_3 نشان می دهد که این نقطه یعنی نقطه می بینیم نیز در جهت $+z$ حرکت کرده است.

به همین ترتیب می توان دید که موج

$$E_n = \Delta(\omega t + Kz) \text{ نیز در جهت } - \text{ نشر می شود.}$$

نقطه ماکزیمم $\circ$ نیز در جهت $+z$ جابجا شده است.

دیدیم که یکی از جوابهای معادله موج در عمق خلا به صورت زیر به دست آمد:

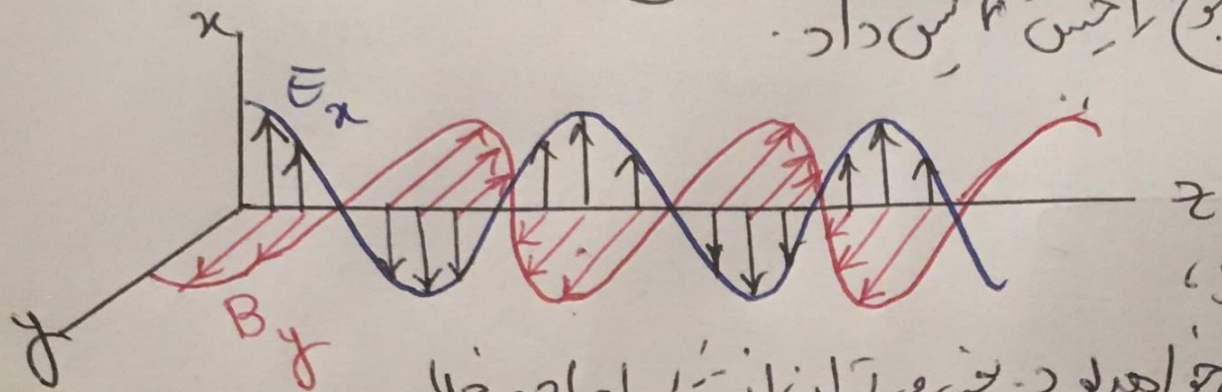
$$E_x(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (k = \omega/c)$$

با داشتن $\vec{E}$ می توان به سادگی $\vec{B}$ را نیز تعیین نمود. داریم:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B}(z, t) = \frac{E_0 k}{\omega} \cos(\omega t - kz) \hat{a}_y \Rightarrow$$

$$B_y(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz)$$

نبا بر این یکی از جوابهای معادله موج ماکسول در عمق خلا، یک موج الکترومغناطیس منتشر شونده در جهت z است. می توان این موج را چنین نشان داد.



به عبارت دیگر، یک موج الکترومغناطیس منتشر شونده در خلا.

یک جواب معادلات ماکسول خواهد بود. یعنی می توان انتشار امواج در خلا را با کمک معادلات ماکسول (معادله موج) توصیف نمود. به طوری که دیده می شود، انتشار موج (محور z) بر راستای ارتعاش (محور x برای E و محور y برای B) عمود است.

(به خاطر داریم که قبلاً این جرم را به عنوان یک جرم فرض می‌کنیم).

برای مطالعه پیرامون امواج الکتریکی در محیط واکuum، اگر آنها را به صورت متغیرهای مختلف (فازور) بنویسیم. بر این اساس داریم:

اگر فرض کنیم که کمیت فیزیکی برابر با قسمت حقیقی کمیت مختلف است.

$$E_x(z,t) = E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

مختلف

همواره برای انجام عملیات امواج الکتریکی در محیط واکuum می‌توانیم از فرم مختلف استفاده می‌کنیم.

$$B_y(z,t) = \frac{E_0}{c} e^{-i(\omega t - kz)}$$

مختلف

$$H_y(z,t) = \frac{B_y(z,t)}{\mu_0} = \frac{E_0}{\mu_0 c} e^{-i(\omega t - kz)} = \frac{E_0}{\eta} e^{-i(\omega t - kz)}$$

مختلف

(امید است خلاصه)

$$\eta = \mu_0 c = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{10^{-9}/36\pi}} = 120\pi = 377 \Omega$$

توجه کنید که واحد η برابر با Ω است. زیرا با سادگی می‌توان دید که داریم:

۱) امپدانس خلا می گویند. البته آن را با ح نر نشان می دهند

$$\eta = \frac{E_x(z,t)}{H_y(z,t)}$$

متعلق متعلق

همین طور به η (یا Z) امپدانس مشخصه خلا نیز گفته می شود (Intrinsic impedance)

توجه کنید که مفهوم امپدانس مشخصه خلا به این صورت است که ~~بلافاصله~~ موج اکثر دینطیس هنگامی که در خلا تا به نهایت می رود، مقادیر $\eta = 120\pi = 377 \Omega$ را به راه خود می بیند. البته از نظر قوانین ترمودینامیک برای این موضوع کامل "موج" است. چون برای این که موج در خلا تا به نهایت برود لازم است دائماً به آن انرژی داده شود. این انرژی از طرف مولد موج تأمین می شود. می توان دریافت که بردار پویسینگ نیز در جهت $\hat{a}$ است

به عبارت دیگر توان موج منتشر شده در جهت $\hat{a}$ است (در جهت انتشار موج) به خاطر آنکه بردار پویسینگ $\vec{S}$ برابر بود با توان در واحد سطح. اگر یک صفحه با ابعاد a و b را عمود بر محور z قرار دهیم توان ~~جذب شده~~ برابر خواهد بود با:

۱) گفته می شود که این حرف هنگامی درست است که این صفحه چاقب باشد (توان جذب کننده)

$$P = \int \vec{S} \cdot \vec{n} da$$

صفحه

الکترومغناطیس ۲

انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط (ادامه)

در حالت کلی محیطی که هم خاصیت رسانندگی و هم خاصیت نارسائی دارند، چنانچه محیط غیر متناهی هم باشند، داریم:

$$\mu = \mu_0, \quad \epsilon = \epsilon_0 K, \quad \sigma \neq 0$$

از این رو باید در حالت کلی معادله زیر را حل کنیم:

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 K + i \omega \mu_0 \sigma) E_x(z) = 0 \quad (1)$$

حالتی که ممکن است جابجایی را بررسی می کنیم. برای محیط با خاصیت نارسائی بالا داریم:

$$\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 K \gg \omega \mu_0 \sigma \Rightarrow \omega K \gg \sigma \Rightarrow \sigma \ll \omega \epsilon$$

محیط با رسانندگی کم

بنابراین محیطی که شرط بالا را دارند، محیطی که خاصیت عایقی بالا محسوب می شوند، داریم:

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 K E_x(z) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + K'^2 E_x(z) = 0$$

$$K' = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 K} = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 K}} = \frac{c}{\sqrt{K}} = \frac{c}{n}$$

که در آن n ضریب شکست محیط نامیده می شود. نو می نتواند که برای یک محیط با رسانندگی کم (خاصیت نارسائی زیاد) عملاً تحلیل مانده است. رجوع در خلا است، باین تفاوت که $\epsilon = \epsilon_0$ منظور شده است.

برای محیط با خاصیت رسانندگی بالا در محادله (۱) داریم: $\omega \mu_0 g \gg K \omega \mu_0 \epsilon_0$ محیط با رسانندگی زیاد
 به عبارت دیگر برای محیط آبی با رسانندگی زیاد (رسانای خوب) باید محادله زیر حل شود:

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + i\omega \mu_0 g E_x(z) = 0 \Rightarrow E_x(z) = E_0 e^{\pm i\sqrt{i\omega \mu_0 g} \cdot z}$$

$$E_x(z, t) = E_x(z) \cdot e^{-i\omega t} = E_0 e^{\pm i e^{i\pi/4} \sqrt{\omega \mu_0 g} \cdot z} e^{-i\omega t}$$

توجه کنید که از رابطه $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$ استفاده شده است. داریم:

$$\Rightarrow E_x(z, t) = E_0 e^{\pm \sqrt{\omega \mu_0 g/2} \cdot z} e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow E_x(z, t) = E_0 e^{-\sqrt{\omega \mu_0 g/2} \cdot z} e^{-i(\omega t - \sqrt{\omega \mu_0 g/2} \cdot z)}$$

توجه کنید که فقط جرمی رو به در جهت z را در نظر گرفته ایم.

$$E_x(z, t) = \text{Re}[E_x(z, t)] \Rightarrow$$

$$E_x(z, t) = E_0 e^{-\sqrt{\omega \mu_0 g/2} \cdot z} \cos(\omega t - \sqrt{\omega \mu_0 g/2} \cdot z)$$

می توان میدان الکتریکی در یک رسانای خوب را به صورت زیر نوشت:

$$E_x(z, t) = E_0 \cdot e^{-\sqrt{\omega \mu_0 g / 2} \cdot z} \cdot \cos(\omega t - \sqrt{\omega \mu_0 g / 2} \cdot z) \Rightarrow$$

$$E_x(z, t) = E_0 \cdot e^{-K \cdot z} \cdot \cos(\omega t - Kz)$$

فاز (پیشروی) $\Rightarrow \frac{dE_x(z, t)}{dz} \wedge \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$

$$\vec{x} \in (\vec{z}, t) = \frac{-\partial \vec{B}(z, t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{dE_x(z, t)}{dz} \wedge \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

ω/√ (فاز) $\Rightarrow \vec{B} = \frac{K}{\omega} \cdot E_0 \cdot e^{-Kz} \cdot [\sin(\omega t - Kz) + \cos(\omega t - Kz)] \hat{a}_y \Rightarrow$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{v} e^{-Kz} \cdot [\sin(\omega t - Kz) + \sin(\frac{\pi}{2} - (\omega t - Kz))] \hat{a}_y \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{v} e^{-Kz} \cdot \times 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos(\omega t - Kz - \frac{\pi}{4}) \hat{a}_y = \frac{E_0 \sqrt{2}}{v} e^{-Kz} \cdot \cos(\omega t - Kz - \frac{\pi}{4}) \hat{a}_y$$

بنابراین هنگامی که انت روج الکتریکی و مغناطیسی در یک رسانایی بالا، میدان مغناطیسی به اندازه $\frac{\pi}{4}$ از میدان الکتریکی عقب می افتد. از این به بعد، داریم:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 \sqrt{2}}{\mu_0 v} e^{-Kz} \cdot \cos(\omega t - Kz - \frac{\pi}{4}) \hat{a}_y$$

نسبت $\eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\mu_0 v}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} \Rightarrow \eta = \frac{\mu_0 \omega}{K \sqrt{2}} e^{-i\pi/4} = \frac{\mu_0 \omega}{\sqrt{\omega \mu_0 g / 2} \cdot \sqrt{2}} e^{-i\pi/4}$

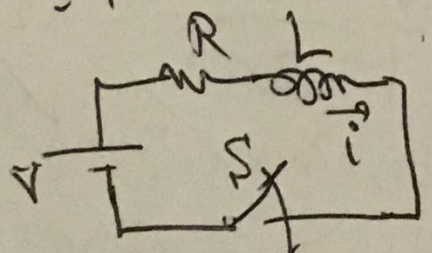
$$\Rightarrow \eta = \sqrt{\omega \mu_0 / g} \cdot e^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{g}} (1 - i)$$

توجه شود که برای E_n و H_n (فیلد) از روابط استفاده شده است:

$$E_n = E_0 e^{-Kz} e^{-i(\omega t - Kz - \pi/4)}$$

$$H_n = \frac{E_0 \sqrt{2}}{\mu_0 c} e^{-Kz} e^{-i(\omega t - Kz - \pi/4)}$$

همانطور که دیده می شود، از E و H (یا B) می توان دید که H به اندازه 45° از E عقب تر است. بنابراین انتشار موج الکتریکی در یک محیط با رسانندگی بالا می تواند به صورت یک مدار $R-L$ در نظر گرفته (منظور از آن این است که یک محیط است با رسانندگی بالا می توان به یک مدار $R-L$ مدل سازی کرد).



نیز ابتدا در مدار رو برو، پس از وصل کلید در $t=0$ ، ابتدا که در $t=0$ از سلف قبل از بستن کلید برابر با صفر بوده است، همچنان صفر باقی می ماند ولی ولتاژ دو سر سلف ها V خواهد بود (بسته در $t=0$ است). به عبارت دیگر، در $t=0$ عقب تر از ولتاژ است. و با گذشت زمان از بستن کلید، در $t=0$ از سلف عبور ولتاژ بسیار این V عقب تر از ولتاژ است، البته ولتاژ در حالت کلی برابر با ولتاژ متغییر $V_m \sin(\omega t)$ نیز به همین شکل است. از آنجا که طبق معادلات ماکسول داریم:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

پس ولتاژ با $\vec{E}$ و $\vec{H}$ با $\vec{H}$ مستطابق است، بنابراین عقب ماندگی H نسبت به E در محیط رسانا را می توان از عقب ماندگی $\vec{H}$ نسبت به ولتاژ در مدار $R-L$ نسبت داد. (از این رو)

$$\nabla^2 \vec{E}(z) + (\omega^2 \mu \epsilon + i\omega \mu g) \vec{E}(z) = 0$$

ی تان برای رسته ضیق عمل نمود

$$\omega \mu g \gg \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow g \gg \omega \epsilon \Rightarrow \nabla^2 \vec{E}(z) + i\omega \mu g \vec{E}(z) = 0$$

$$\omega^2 \mu g \ll \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow g \ll \omega \epsilon \Rightarrow \nabla^2 \vec{E}(z) + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E}(z) = 0$$

فوق ذکر است که برای معادله باربندی ضعیف داریم
 بنابراین برای معادله باربندی کم، مانند یک معادله باربندی (عمل کرد)

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + i\omega \mu g E_x(z) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + K'^2 E_x(z) = 0 \quad (K' = i\omega \mu g)$$

$$\Rightarrow E_x(z) = E_0 \cdot e^{\pm iK'z}$$

باید توجه شود که در حالت کلی $E_0 = E_1 \cdot e^{i\phi}$ کسری مختلف است ولی در این حالت $\phi = 0$ در نظر گرفت. داریم

$$E_x(z) = E_0 \cdot e^{\pm i\sqrt{i\omega \mu g} \cdot z} = E_0 \cdot e^{\pm i\sqrt{\omega \mu g} z \cdot i\pi/4} = E_0 \cdot e^{\pm \sqrt{\omega \mu g} z \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow E_x(z) = E_0 \cdot e^{\pm i\sqrt{\omega \mu g/2} \cdot z} \cdot (1+i) = E_0 \cdot e^{\mp \sqrt{\omega \mu g/2} \cdot z} \cdot e^{\pm i\sqrt{\omega \mu g/2} \cdot z}$$

$$|E_x(z,t)| = E_x(z) \cdot e^{-i\omega t} = E_0 \cdot e^{\mp \sqrt{\omega \mu g/2} \cdot z} \cdot e^{-i(\omega t \mp \sqrt{\omega \mu g/2} \cdot z)}$$

$$\Rightarrow E_x(z,t)_{\text{physical}} = \text{Re}[\] = E_0 \cdot e^{\mp \sqrt{\omega \mu g/2} \cdot z} \cdot \cos(\omega t \mp \sqrt{\omega \mu g/2} \cdot z)$$

برای مثال برای انتشار در جهت z داریم:

$$E_x(z,t) = E_0 \cdot e^{-\sqrt{\omega \mu g / 2} \cdot z} \cos(\omega t - \sqrt{\omega \mu g / 2} \cdot z)$$

فرکانس

$$k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow \sqrt{\frac{\omega \mu g}{2}} = \frac{\omega}{v} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu g}}$$

مثلاً برای انتشار امواج رادیویی با فرکانس 3 MHz در زمین داریم:

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 2\pi \times 3 \times 10^6}{4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} \Rightarrow v = 720 \text{ m/s}$$

و $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{720}{3 \times 10^6} = 0.24 \text{ mm}$

گویم کنید که در حالتی که این موج در خلا با سرعت نور حرکت کند و طول موج آن 100 متر است، این موج هنگامی که دارد رسانایی مانند مس می شود، طول موج آن به 0.24 mm و سرعت آن به 720 m/s کاهش پیدا می کند. عمق نفوذ (Skin depth) برابر است با:

$$\left| \sqrt{\frac{\omega \mu g}{2}} \cdot \delta \right| = 1 \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu g}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu g}}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \times 3 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} \Rightarrow \delta = 38 \mu\text{m}$$

بنابراین در مثال بالا داریم:

برای فرکانس 10^6 Hz عمق نفوذ کمتر از $1 \mu\text{m}$ می شود. بنابراین برای فرکانس که میگردود و عملاً می توان پیدا کرد، باید فرکانس را به 10^6 Hz افزایش داد تا به $1 \mu\text{m}$ برسد. در این حالت، E و B هر دو با هم نوسان می کنند و مقدار اولیه خود را نگه می دارند. به عبارت دیگر، توان $(S = E \times H)$ امواج به میزان e^{-2} مقدار اولیه خود را از دست می دهد (یعنی 13.5% به e^{-2}).

الکترومغناطیس ۲

شرایط مرزی در الکترومغناطیس

می توان انتی یک موج اکثر رخنه طیفی در محیط رسانای خوب را با یک مدار R-L مدل سازی کرد و از آنجا که در
~~محیط رسانای خوب~~ R-L محیط رسانای خوب را از آنجا که انتی یک موج رسانای خوب را با یک مدار R-L مدل سازی کرد و از آنجا که
 گرفت. برای این منظور، ابتدا باید توجه کنیم که ما اگر در یک مدار بدون دوش مختلف در نظر بگیریم
 (طایقی با قرار دادن متدا کتاب Cheng)

صفحه 6-16

$$\vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{مختلط}} = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{+i\omega t}$$

$$L \rightarrow iL\omega, \quad C \rightarrow \frac{-i}{C\omega}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{مختلط}} = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$L \rightarrow -iL\omega, \quad C \rightarrow \frac{i}{C\omega}$$

قرار داد ما

آنگاه برای خانج C و سلف L به دست می آید:
 البته طبق قرارداد کتاب رتین، میلغور دما در نظر گرفتیم
 که در آنج بلا خانج C و سلف L خواهیم داشت:
 مطابق این قرارداد مدار η چنین به دست می آید:

$$\eta = \sqrt{\pi f \mu_0 / g} \cdot (1 - i)$$

این نتیجه، نشان می دهد که امپدانس مستقیم η برای یک محیط انتی رسانا به بالا به فرم یک مدار R-L خواهد بود. اگر قرارداد $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{+i\omega t}$ را استفاده و کردیم در این صورت رابطه η به صورت
 $\eta = \sqrt{\pi f \mu_0 / g} (1 + i)$ به دست می آید که باز هم η یا یک مدار R-L بود.

انجام می دهیم که یک محیط انتی رسانا به بالا را می توان با یک مدار R-L مدل سازی کرد.
 از طرف دیگر، میدان اکثر رگس و رخنه طیفی که از یک عمق به دست می آید در رسانا وارد می شود ولی این میدان اکثر رگس
 در رسانا، جریان اکثر رگس را می گذارد که در رسانا به بالا این جریان یک موج سطحی خواهد بود. البته

برقرار بودن. بنابراین با وجودی که $\vec{E}$ و $\vec{H}$ و $\vec{B}$ و $\vec{J}$ همگی در این مسئله (انت) راجع الکترومغناطیس
~~در یک محیط~~ (توانی از) (توانی) هستند ولی (توانی) از معادلات ماکسول مربوط به یک
 میدان الکترومغناطیس استفاده نمود. یعنی انت را برای الکترودینامیک از یک محیط انت را برای بارها و بارها
 این توان یک مسئله الکترومغناطیس (Quasi-magnetostatic) در تئوری است. معادلات
 ماکسول برای یک مسئله الکترومغناطیس به صورت زیر هستند:

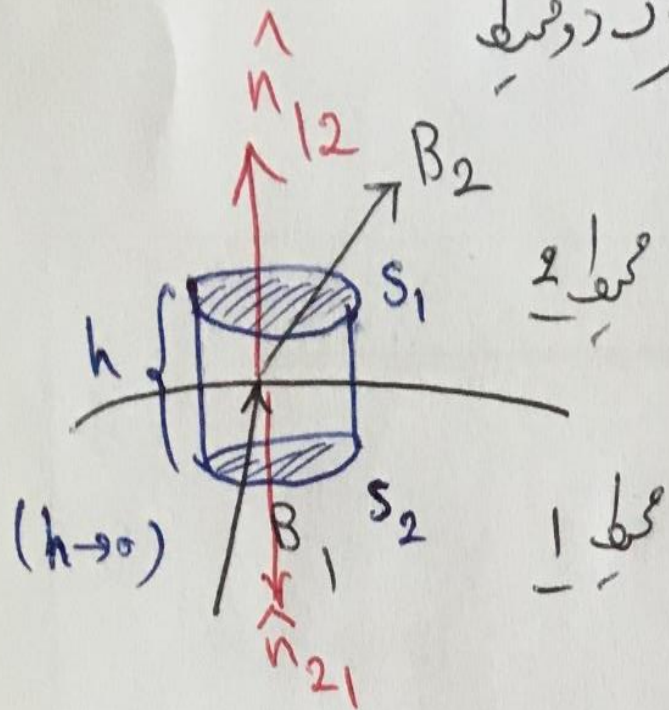
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f$$

شرایط مرزی در الکترومغناطیس

شرایط برزی برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در فرض مشترک دو محیط

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{\text{سطح جانبی}} = 0$$

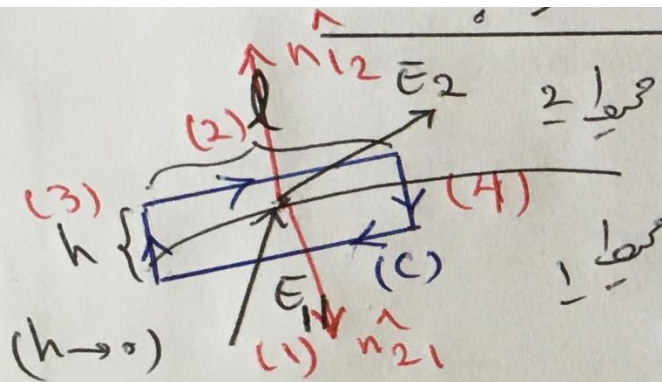


چون $h \rightarrow 0$ پس انتگرال روی سطح جانبی صفر است و داریم:

$$\vec{B}_2 \cdot \hat{n}_{12} \cdot \Delta A + \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_{21} \cdot \Delta A = 0 \Rightarrow (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_{12} = 0$$

یا به عبارت دیگر $\boxed{B_{1n} = B_{2n}}$ (ایران هفتک) (اردی نوز)

یعنی همواره مولفه عمودی بردار میدان مغناطیسی B در هر دو محیط یکسان است.



$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

سطح S (سطح باز) سطحی است که به وسیله منحنی بسته C

محصور شده است. انتقال مسیر ردی (3) و (4) ضوابط

زیرا $h \rightarrow 0$. بنابراین داریم:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{L} + \int_{(1)} \vec{E} \cdot d\vec{L} =$$

$$= (\vec{E}_2 \times \hat{n}_{12} \cdot l + \vec{E}_1 \times \hat{n}_{21} \cdot l) \cdot l = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n}_{12} \cdot l$$

از این رو خواهیم داشت:

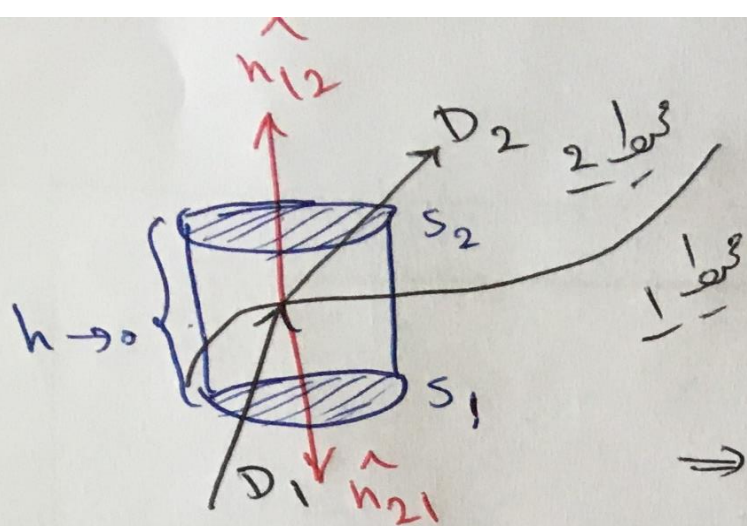
$$-(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n}_{12} \cdot l = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{a}_S \cdot h \cdot l$$

اگر فرض کنیم که برای هر نقطه روی فصل مشترک دو محیط $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \infty$ در این صورت چون $h \rightarrow 0$ پس طرف راست رابطه صفر می شود (توجه کنید که این مسیر بسته C ضعیف کوچک است به طوری که برای یک نقطه روی فصل مشترک داریم بحث می کنیم). بنابراین می توان نوشت:

$$-(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n}_{12} = 0$$

$$\boxed{\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}}$$

یعنی همسایه حلقه هادی میدان الکتریکی در هر دو محیط یکسان بوده است. توجه کنید که همواره در مسائل کار بردی و عملی $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \infty$ است.



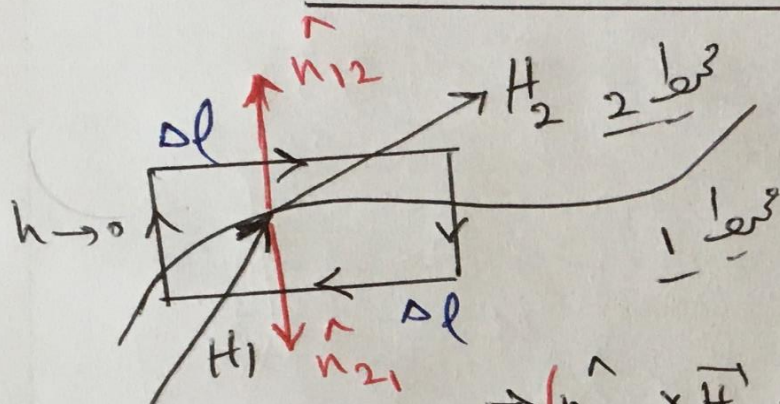
شرط مرزی برای $\vec{D}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{12} \cdot \Delta A = \rho_f \cdot \Delta A \cdot l$$

$$\Rightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{12} = \rho_f l \Rightarrow$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{12} = \sigma_f \quad \underline{\underline{L}} : \boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f}$$



شرط مرزی برای $\vec{H}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow (\hat{n}_{12} \times \vec{H}_2 + \hat{n}_{21} \times \vec{H}_1) \cdot \hat{a}_s \cdot h \cdot \Delta l = \vec{J}_f \cdot \hat{a}_s \cdot h \cdot \Delta l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{a}_s \cdot h \cdot \Delta l$$

$$\Rightarrow \hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \left(\vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{a}_s \cdot h$$

ضایقه $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ در مرز به نیت نباشد (که در مسائل واقعی همین طور است) پس، در تقارر فن

$\vec{h} \rightarrow \vec{h} = \vec{h} \cdot \hat{a}_s \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ و می توان نوشت: $\hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_f \cdot \hat{a}_s \cdot \vec{h}$

صفر
 به سمت

ما در توگرفتن $\vec{J}_f \cdot \hat{a}_s \cdot \vec{h} = \vec{K}$ داریم:

که در آن $\vec{K}$ چگالی سطحی جریان است (بر حسب $\frac{A}{m}$)

یعنی $\vec{K}$ چگالی سطحی است که از فصل مشترک دو محیط عبور می کند. برای آن که چگالی سطحی را با $\vec{J}$ (از کوئید) نشان می دهیم پس داریم:

$\hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$ یا $\boxed{H_{2t} - H_{1t} = K}$

که K نه از ه (برای) چگالی سطحی جریان است. توجه کنید که فقط در دو صورت غیر صفر است: ۱- هنگامی که یکی از دو محیط ابر رسانا باشد.

۲- هنگامی که و کانن خلی بالا باشد. در غیر این موارد $\vec{K} = 0$ و داریم:

$\hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$ یا $\boxed{H_{2t} = H_{1t}}$

الکترومغناطیس ۲

پتانسیل‌های تاخیر یافته - شرط لورنتز

Maxwell's Equations in Electrodynamics

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = Q_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varphi_B}{dt}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f + \varepsilon \frac{d\varphi_E}{dt}$$

پتانسیل‌های تاخیر یافته

روش پتانسیل برای حل مسائل الکتروستاتیک است!
این روش عمدتاً برای حل مسائل پتانسیل الکتروستاتیک به کار می‌رود.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

معادلات ماکسول:

$$(2) \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5)$$

$$(5) \text{ into } (3) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (6)$$

توجه کنید که، با داشتن $\vec{A}$ و Φ می‌توان طبق روابط (5) و (6) میدان‌های $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را بی‌محدود

$$(4) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu \vec{J} +$$

$$+ \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{\nabla} \Phi) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = \mu \vec{J} \quad (7)$$

توجه کنید که وارد کردن دو محمول در حل مسائل یک روش با کارایی بالایی است زیرا همواره می توان بین این کمیت های تحول یک ارتباط دلخواه را درست گرفت به طوری که حل مسئله ساده گشته. بر این اساس: $\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ افت می کنیم. بنابر شرط لورنتز (بیان لورنتز) می نامند (مشهور $Ludvig Lorenz$ دانای ریاضیات که محاسبات با کسول بوده است). به هیچ عنوان $Hendrik Lorentz$ هلندی که محاسبات با اینشتین بوده است الکترون نشود. در قرن می گوئیم تبدیلات لورنتس و تئوری لورنتس مشهور لورنتس هلندی بوده است. بسیاری از کتابها این دو نام را با یکدیگر اشتباه می کنند به خصوص که در زبان آلمانی هر دو یک جور تلفظ می شوند پس بیان لورنتز به صورت زیر است.

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

(Lorentz gauge)

(Lorentz Condition)

$$(7) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}} \quad (8)$$

بنابراین $\vec{A}$ در معادله موج نااهلن صدق می کند.
به همین ترتیب برای Φ نیز چنین عمل می کنیم:

$$(11) \Rightarrow \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (9)$$

$$(6) \text{ into } (9) \Rightarrow \epsilon \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \rho \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\rho / \epsilon \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (11)$$

از ترکیب لورنتز داریم

$$(11) \text{ into } (10) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \Phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon} \quad (12)$$

یعنی پتانسیل Φ نیز در معادله موج نااهلن صدق می کند. (توجه کنید که برای میدانهای مستقل از زمان، معادلات پواسن ~~در فرستیم~~ را داریم)

بنابراین می توان با جمل معادلات موج نااهلن به صورت (8) و (12) پتانسیل برداری $\vec{A}$ و پتانسیل اسکالر Φ را به دست آورد. توجه کنید که بهانه لورنتز حقیقت دو معادله ایجاد می کند که یکی فقط بر حسب $\vec{A}$ و دیگری فقط بر حسب Φ است. یعنی توابع $\vec{A}$ و Φ را از یکدیگر

جای می کند. می خواهیم معادله جریح نامگذاری صورت

$$\nabla^2 \Phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0$$

را حل کنیم. عملاً اختلاط را اگر فرض کنیم. زیرا عموماً از این معادلات برای مسائل فیزیکی اکثر وقتاً محسوس الکفاده می شود. تا نشان هم معمولاً در هراست که ضریب ثابت با اختلا

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0 \quad (13)$$

نویسه بکنند که برای میدانهای ساکن به معادلات مستقل از زمان می رسیم که برای $\vec{A}$ و Φ به

$$\nabla^2 \Phi = -\rho / \epsilon_0, \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

و شرط پلور پوتنسیال $\vec{A} \cdot \nabla = 0$ یعنی شرط کولن (یا نه کولن) باید می شود.

$$\text{برای حل (13) ابتدا معادله ای به فرم زیر را حل می کنیم}$$

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0 \quad (14)$$

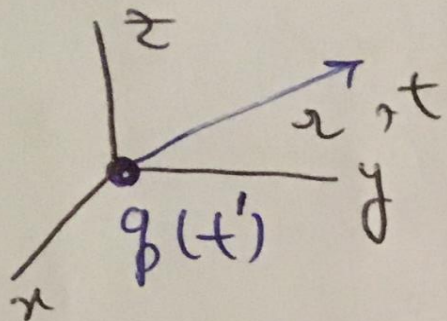
نویسه شود که Φ و $\vec{A}$ تابعی از مکان و زمان هستند. $\Phi(\vec{r}, t) = \Phi(x, y, z, t)$

حل معادله موج ناهمگن

حل معادله موج ناهمگن:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

ابتدا این معادله را برای یک نقطه ای ρ که در مبدأ مختصات قرار دارد حل می کنیم. در تئوری لایم که بار q نسبت به زمان تغییر می کند داریم: $\vec{r} = 0$



زمان مربوط به نقطه ای ρ را برابر با t' در تئوری لایم می باشد. برای آن در نقطه $\vec{r}$ و در زمان t می توان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را بدست آورد. معادله (1) به صورت زیر در می آید:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

فضا $\vec{r} \neq 0$ بدست می آوریم و در آنجا شار بار الکتریکی وجود ندارد و نسبت است معادله (1) برابر با صفر می شود. ضمناً تقارن کروی داریم. یعنی جابجی پتانسیل $\Phi(\vec{r}, t)$ نسبت به زاویه ای θ در مختصات کروی ندارد.

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

تغییر تابع $\Phi(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}$ می ده:

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4) \quad (\text{معادله موج همگن})$$

برای حل (4) تغییر متغیر $V = r - ct$, $W = r + ct$ می دهیم (حل دالانبرج)
خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial V^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial W^2} + \frac{2 \partial^2 u}{\partial V \cdot \partial W} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial V^2} + c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial W^2} - 2c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial V \cdot \partial W} \quad (6)$$

$$(5) \& (6) \text{ into } (4) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial V \cdot \partial W} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial u}{\partial W} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial W} = g_1(W) \Rightarrow u(r, t) = g(W) + f(V) \Rightarrow$$

خواهیم دید که $g(r+ct)$ تغییر فرکانس ندارد و $f(r-ct)$ که از آن می شود.

الکترومغناطیس ۲

پتانسیل‌های تاخیر یافته (ادامه) – حل یک مسئله

$$\Rightarrow u(r, t) = f(r - c \cdot t) \quad (7)$$

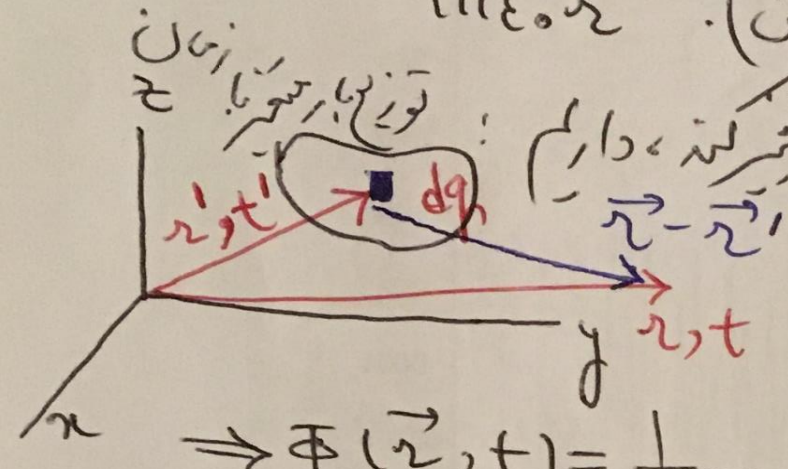
$$\Phi(r, t) = \frac{u(r, t)}{r} = \frac{f(r - c \cdot t)}{r} = \frac{f[-c(t - \frac{r}{c})]}{r} = \frac{F(t - r/c)}{r}$$

برای یک بار نقطه ای در زمان t داریم $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. اگر بار نقطه ای بازماند غیر کند، در این صورت پتانسیل ایجاد شده در نقطه r در زمان t برابر است با:

$$\Phi(r, t) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8)$$

(توجه کنید که این رابطه، با در نظر گرفتن (7) نوشته شده است).

حال اگر یک توزیع بار الکتریکی داشته باشیم که بازماند غیر کند، داریم:



توزیع بار الکتریکی بازماند غیر کند

$$d\Phi(\vec{r}, t) = \frac{dq(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \cdot dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t') \cdot dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

بنابراین جواب معادله موج نا همگن برای $\vec{A}(\vec{r}, t)$ به دست آمده به $\vec{A}(\vec{r}, t)$ بیابان
 اسکالر تاخیر یافته گفته می شود و زمان t' نیز زمان تاخیر یافته نامیده می شود. به همین
 ترتیب با جایگذاری $\frac{1}{\mu_0} \rightarrow \epsilon_0$ و $\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t')$ می توان جواب معادله موج
 نا همگن برای $\vec{A}(\vec{r}, t)$ نیز به دست می آید.

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) \Rightarrow$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

به $\vec{A}(\vec{r}, t)$ نیز بیابان برداری تاخیر یافته گفته می شود.
 توجه شود که t' مربوط به صیغه هستند در حالی که t برای نقطه ناظر در نظر گرفته می شود.
 می خواهیم بدانیم که چرا می گوئیم بیابان تاخیر یافته؟

فرض کنید که یک اتفاق در خورشید می افتد (مثلاً طوفان خورشیدی یا...) . ناظر روی کره زمین
 این اتفاق را 500 ثانیه بعد دریافت می کند. مثلاً اگر این اتفاق در خورشید در ساعت

12:00 ظهر بقیه

($t' = 12$) بناظر دی زمین این اتفاق را در زمان 12:08:20

می بیند (ساعت 12 و 8 دقیقه و 20 ثانیه). یعنی زمان ناظر عقب تر از زمان حسیه

(خورشید) است. همسۀ داریم $t' > t$ و زمان t به اندازه $\frac{v^2 - c^2}{c^2}$ عقب تر از

زمان t' است. آنچه ما می توانیم اندازه گیری کنیم در زمان بدون برآیم است

(یعنی زمان ناظر t) کاری به زمان t' نداریم. از این رو، به زمان t که

فاصله زمان $\frac{v^2 - c^2}{c^2}$ می تواند تغییر کند (یا هر چیز دیگر) را دریافت کند، زمان تاخیر یافته گفته می شود.

$$t' = t - \frac{v^2 - c^2}{c^2}$$

زمان تاخیر یافته

(retarded time)

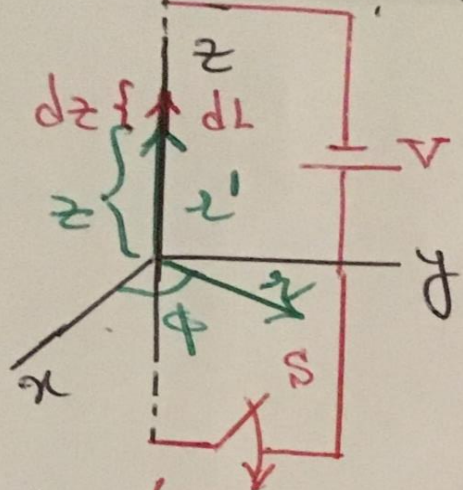
$$t' = t + \frac{v^2 - c^2}{c^2}$$

جواب جلو افتاده (advanced)

نامیده می شود. به دفع می توان دید که این جواب، یک جواب صرفاً ریاضی است و جواب فیزیکی نیست.

حل یک مسئله از پتانسیل‌های تاخیر یافته

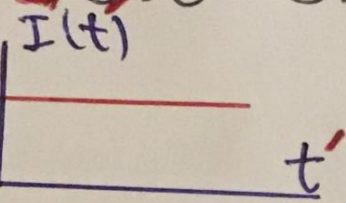
سیم طولی مطابق شکل مفروض است. کلید S ابتدا باز بوده است. سپس آن را در لحظه $t=0$ می‌بندیم. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی ایجاد شده در این سیم طولی را به دست آوریم.



میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را در نقطه‌ای به فاصله r از سیم به دست می‌آوریم. محور x را از سیم طول عبوری دهیم و صفحه xy را از نقطه مورد نظر می‌گذرانیم.

جریان گذرنده از سیم طول ابتدا صفر بوده است (برای $t < 0$)

و برای $t > 0$ برابر با I_0 می‌شود. بنابراین جریان را می‌توانیم به صورت زیر در نظر گرفت:



توجه کنید که جریان گذرنده از سیم طول برای $t > 0$ یک جریان نامی از زمان $t=0$ است.

(چون در $t=0$ نامی نول است) و در $t < 0$ برابر صفر برای $t > 0$ برابر I_0 است. به سبب

از این رو، تا پیش از آنکه لرزه برداری تاخیر یافته را به دست می‌آوریم. زمان در دو طرف نقطه مشاهده برابر با t است.

(توجه کنید که برای $t < 0$ جریان صفر بوده است و برای $t > 0$ برابر I_0 است. به سبب

از این رو، تا پیش از آنکه لرزه برداری تاخیر یافته را به دست می‌آوریم. زمان در دو طرف نقطه مشاهده برابر با t است.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(\vec{r}', t') \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1)$$

$$\vec{r} = r \cos \phi \hat{a}_x + r \sin \phi \hat{a}_y, \quad \vec{r}' = z \cdot \hat{a}_z, \quad d\vec{L}' = dz \hat{a}_z$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = r \cos \phi \hat{a}_x + r \sin \phi \hat{a}_y - z \hat{a}_z \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \Rightarrow t' = t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{c} \Rightarrow t' = t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{c}$$

برای $t' > 0$ ؟ این باید I_0 از هم طول عبور می کند. بنابراین برای $t' > 0$ داریم:

$$I(t) = I_0$$

$$t' > 0 \Rightarrow t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{c} > 0 \Rightarrow z^2 < c^2 t^2 - r^2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{c^2 t^2 - r^2} < z < \sqrt{c^2 t^2 - r^2}$$

بنابراین رابطه (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int \frac{dz \hat{a}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Rightarrow \vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_{-\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}^{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \frac{dz \hat{a}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{a}_z \cdot \int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{a}_z \ln(\sqrt{r^2 + z^2} + z) \Big|_0^{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{r}\right) \hat{a}_z$$

نویسندگان که بار خالص داریم برابر با صفر است. زیرا بار خارجی به سیم وارد نشده است. پس

$$q = 0 \Rightarrow \Phi(r, t) = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}(r, t) = \frac{-\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \hat{a}_z$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cdot \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{E} \rightarrow 0$$

$$\vec{B} \rightarrow \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

نویسندگان که پس از گذشت زمانی بسیار نسبت به سرعت می آوریم

خبر در زمان گذر امده ای الکتریکی و جنت طیس در فضا

ایجاد می نشود. در حالی که پس از گذشت زمان، با بری شدن زمان گذرا، جواب ما

به سمت می آید. یعنی میدان الکتریکی در خارج از سیم طول و حاصل جریانی I برابر با صفر می نشود و میدان جنت طیس نیز همان جوابی که به سمت می آید که قانون آمپر می دهد.

الکترومغناطیس ۲

تابش الکترومغناطیسی از دو قطبی الکتریکی نوسانی

گسیل ناشی اکثر دغطیس:

دوقطبی نوسان کننده: دوقطبی الکتریکی نوسانی هنگامی ایجاد می شود که حرکت بارها را بتوان به طور جمعی به وسیله یک دوقطبی الکتریکی که گشتاور آن به صورت سینوسی بر حسب زمان تغییر می کند، توضیح داد. این حالت می تواند، به عنوان مثال، در مورد الکتریسیته که حرکت طبیعی آن در اتم فتل شده است، یا در مورد یک جریان نوسانی در آنتن خطی یک دستگاه رادیویی، صادق باشد.

اگر گشتاور دوقطبی الکتریکی ثابت باشد (مستقل از زمان باشد)، تنها میدان الکتریکی تولید می کند. ولی اگر گشتاور دوقطبی الکتریکی نوسانی باشد، میدان الکتریکی نیز نوسان می کند و بنابراین تابع زمان است. بنابراین مطابق قانون آمپر-ماکسول، علاوه بر میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی نیز تولید می کند. نتیجه فوق را می توان چنین بیان کرد: در واقع دوقطبی الکتریکی نوسانی هم از جریان خطی نوسانی است و جریان الکتریکی همواره در اطراف خود میدان مغناطیسی به وجود می آورد.

در نقاط خیلی نزدیک به دوقطبی الکتریکی، اثر تاخیری ناشی از سرعت محدود انتشار امواج الکترودغناطیسی قابل اغماض است، زیرا فاصله در خیلی کوچک است. بنابراین میدان ایجاد شده با میدان حاصل از یک دوقطبی الکتریکی ساکن، مشابه است. یعنی اگر فرض کنیم که محور z به موازات دوقطبی قرار دارد، آنگاه میدان الکتریکی مولفه A_z خواهد داشت و با

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \cdot \hat{a}_r + \sin\theta \cdot \hat{a}_\theta)$$

۱/۳ تناسب است زیرا:

و از میدان مغناطیسی صرف نظر می‌کنیم ولی در فاصله کمی دور،

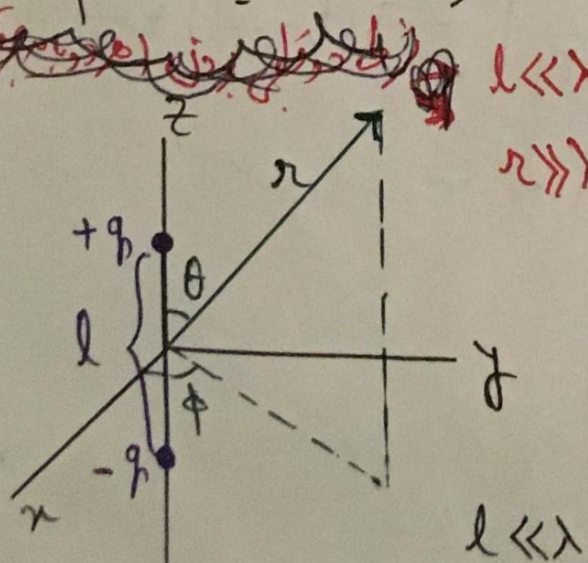
سرعت محدود انتشار امواج الکترومغناطیسی موجب تغییر میدان می‌شود. حل معادله موج با دامنه میدان در آن جهت آسان می‌دهد که در این حالت میدان الکترومغناطیسی ممکن است، به جای $\frac{1}{r^3}$ در فاصله کمی نزدیک یا $\frac{1}{r}$ به طور عجیب به فاصله بستگی داشته باشد. این نتیجه را جواب حقیقی معادلات ماکسول نیز تأیید می‌کند. بنابراین در فاصله کمی دور، یعنی جایی که بتوان قسمت کوچکی از جبهه موج را تحت در نظر گرفت، میدان الکتریکی فقط مولفه E_θ دارد که آن هم با $\frac{1}{r}$ تناسب است و $E_r \approx 0$ ، باید عبارت دیگر در نقاط دور $E_r \gg E_\theta$ ، از طرف دیگر میدان مغناطیسی مولفه B_ϕ دارد که آن هم در نقاط دور با $\frac{1}{r}$ تناسب است.

تأش یک دو قطبی الکتریکی نوسانی را به طور کلی تحلیل می‌کنیم.

(تأش با ذرات الکتریکی متحرک در جهه نسبتی $\ll c$).

دو بار الکتریکی $\pm q$ در فاصله l از یکدیگر بر روی محور قرار دارند. یعنی طول

l دو قطبی از طول موج تأش بسیار کوچکتر است.



جریان الکتریکی به وجود آمده بین دو بار نقطه‌ای چنانچه بار نقطه‌ای تغییر کند، به صورت زیر است:

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

بنابراین برداری مربوط به توزیع جریان $I = \frac{dq}{dt}$ برابر است با:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t') \cdot d\vec{v}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{r} = r \cdot \cos\theta \cdot \hat{a}_x + r \cdot \sin\theta \cdot \hat{a}_y + r \cdot \cos\theta \cdot \hat{a}_z, \quad \vec{r}' = r' \cdot \hat{a}_z, \quad d\vec{L} = dr' \cdot \hat{a}_z$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = r \cdot \cos\theta \cdot \hat{a}_x + r \cdot \sin\theta \cdot \hat{a}_y + (r \cdot \cos\theta - r') \hat{a}_z \Rightarrow$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r \cdot r' \cdot \cos\theta} = r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cdot \cos\theta \right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$r \gg r' \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| \approx r \left(1 - \frac{2r'}{r} \cos\theta \right)^{1/2} \approx r \left(1 - \frac{r'}{r} \cos\theta \right) = r - r' \cos\theta$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(r', t') \cdot d\vec{L}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(r', t - \frac{r - r' \cos\theta}{c}) \cdot dr' \cdot \hat{a}_z}{r - r' \cos\theta}$$

برای نقاط دور داریم: $r - r' \cos\theta \approx r$

اگر نقطه در مقایسه با طول موج کوچک باشد و از نقطه خیلی دور باشیم ~~و از نقطه خیلی دور باشیم~~ یعنی $r \gg r'$ ، داریم:

$$A_z(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} l \cdot I(t - \frac{r}{c})$$

حالت پتانسیل اسکالر (فراپوتنسیال) با استفاده از شرط لورنتز:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{-1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial A_z}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{-1}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{\mu_0 l}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r} \cdot I(t - \frac{r}{c}) \right] \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{-l}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot I(t - \frac{r}{c}) \right] \cdot \frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\text{چون: } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}$$

$$\text{پس: } \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{-l}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot I(t - \frac{r}{c}) \right] \cdot \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{l}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{z}{r^3} \cdot \overbrace{I(t - \frac{r}{c})}^{q(t - \frac{r}{c})} + \frac{z}{r^2 c} I'(t - \frac{r}{c}) \right]$$

توجه شود که I' مشتق نسبت به آرگومان خودش است. داریم: $I = q$ پس خواهیم داشت:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{l}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{z}{r^2} \left[\frac{q(t - r/c)}{r} + \frac{I(t - r/c)}{c} \right]$$

$$q(t - \frac{r}{c}) = q_0 \cos \omega(t - \frac{r}{c})$$

فرض می کنیم:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r} \left[\frac{q_0 \cdot \cos\omega(t-r/c)}{r} + \frac{-q_0 \omega r \sin\omega(t-r/c)}{c} \right]$$

$$(\sin(t - \frac{r}{c}) = \sin\omega(t - r/c))$$

به جای q_0 نیز I_0/ω قرار می دهیم:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{l \cdot I_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r} \left[\frac{-\cos\omega(t-r/c)}{\omega \cdot r} + \frac{\sin\omega(t-r/c)}{c} \right]$$

بردار $\vec{A}$ را نیز در دستگاه مختصات کروی می نویسیم:

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi \Rightarrow \begin{cases} A_r = \vec{A} \cdot \hat{a}_r \\ A_\theta = \vec{A} \cdot \hat{a}_\theta \\ A_\phi = \vec{A} \cdot \hat{a}_\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_r = A_z \cos\theta \\ A_\theta = -A_z \sin\theta \\ A_\phi = 0 \end{cases} \quad (\vec{A} = A_z \hat{a}_z)$$

پس مولفه های $\vec{A}$ در دستگاه مختصات کروی برابرند با:

$$\begin{cases} A_r = \frac{\mu_0}{4\pi r} l \cdot I_0 \sin\omega(t-r/c) \cos\theta \\ A_\theta = \frac{-\mu_0}{4\pi r} l \cdot I_0 \sin\omega(t-r/c) \sin\theta \\ A_\phi = 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow B_\phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \Rightarrow$$

$$B_{\phi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0}{r} \cdot 2\pi \theta \left[\frac{\omega}{c} \cdot C_0 \omega (t - r/c) + \frac{1}{r} \cdot 2\pi \omega (t - r/c) \right]$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$E_r = \frac{-\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{2l \cdot I_0 \cdot C_0 \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{2\omega (t - r/c)}{r^2 \cdot c} - \frac{C_0 \omega (t - r/c)}{\omega \cdot r^3} \right]$$

$$E_{\theta} = \frac{-1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial t} = \frac{-l \cdot I_0 \cdot 2\pi \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\omega \cdot r^3} - \frac{\omega}{r \cdot c^2} \right) \cdot C_0 \omega (t - \frac{r}{c}) - \frac{1}{r^2 \cdot c} 2\pi \omega (t - \frac{r}{c}) \right]$$

$$E_{\phi} = \frac{-1}{r \cdot 2\pi \theta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} - \frac{\partial A_{\phi}}{\partial t} = 0$$

می‌توان گفت پهن شدن انرژی از این دو قطبی نوسان کننده:

$$= \oint_{\text{سطح کره}} \vec{S} \cdot \vec{n} da = \oint_{\text{سطح کره}} (S_r \cdot \hat{a}_r + S_{\theta} \cdot \hat{a}_{\theta} + S_{\phi} \cdot \hat{a}_{\phi}) \cdot \hat{a}_r da = \oint_{\text{سطح کره}} S_r da = \oint_{\text{سطح کره}} (\vec{E} \times \vec{H})_r da$$

$r \rightarrow \infty$

الکترومغناطیس ۲

تابش الکترومغناطیسی (ادامه) - دوقطبی مغناطیسی نوسانی

$$= \oint_{\text{سطح}} \vec{E}_\theta \cdot \vec{H}_\phi \cdot d\vec{a} = \oint_{\text{سطح}} \vec{E}_\theta \cdot \frac{B_\phi}{\mu_0} \cdot d\vec{a} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_\theta \cdot B_\phi \cdot \frac{1}{\mu_0} r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \times 2\pi \int_0^\pi E_\theta \cdot B_\phi \cdot r^2 \sin\theta \cdot d\theta = \frac{I_0^2 \cdot l^2}{8\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\omega^2}{c^3} \int_0^\pi \cos^2 \omega(t - \frac{r}{c}) \cdot \frac{r^2 \sin\theta}{r^2} \cdot r^2 \sin\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{(I_0 \cdot l)^2}{6\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\omega^2}{c^3} \cdot \cos^2 \omega(t - r/c) \quad (1)$$

میانه این تابع: $\left[\int_0^{\pi/\omega} \frac{1 + \cos 2\omega(t - r/c)}{2(\pi/\omega)} \cdot d\omega = \frac{1}{2} \right]$

$$\bar{P} = \frac{l^2 \cdot \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{I_0^2}{2} \quad (2)$$

توان تابشی شده لحظه‌ای برابر است با رابطه (1)

توان میانگین تابشی (میانگین نسبت به زمان) برابر است با:

مقدار تابشی آنتن برابر است با:

$$R_{\text{rad}} = \frac{l^2 \cdot \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{l^2}{6\pi \epsilon_0 \cdot c^3} \times 4\pi^2 f^2 = \frac{2\pi l^2}{3 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{c}{\lambda}\right)^2 = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow$$

$$R_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3} \times 120\pi \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 789 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad \Omega$$

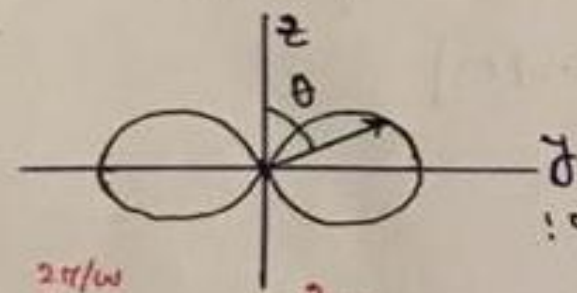
$$\text{دانشیم: } \epsilon_0 = -\omega \cdot q_0 \Rightarrow \bar{P} = \frac{l^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{\omega^2 q_0^2}{2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{(l \cdot q_0)^2 \cdot \omega^4}{3c^3} \Rightarrow$$

$$\bar{P} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{P_0 \cdot \omega^4}{3c^3}$$

یعنی توان تابشی مناسب، بتوان چهارم و کاشی است.

الگوی تابشی (pattern) یک دوقطبی الکتریکی نوسان کننده

مغایب استفاده از این تابشی کننده الکترود مغناطیسی به عنوان یک آنتن فرستنده!



$$\frac{\int_0^{2\pi/\omega} R(\epsilon_m \cdot \sin \omega t)^2 \cdot dt}{2\pi/\omega} = R \epsilon_c^2 \Rightarrow$$

- از اثر نزدیکی زمین صرفه گرفته است.

- معمولا "آنتن" را از طریق خازنی در قسمت پای انتهایی باردار نمی کنند.

- معمولا "آنتن" در مقایسه با طول موجی که تابشی می کنند، کوتاه هستند.

$$\epsilon_c = \epsilon_{rms} = \frac{\epsilon_m}{\sqrt{2}}$$

آنتنی به طول 30m را که امواج الکترود مغناطیسی با فرکانس 500 KHz تابشی می کنند، در نظر می گیریم. مقدار رانده میانی

برای $I_{rms} = 15A$ ، مدت تابشی این آنتن را به دست آورید. توان تابشی چقدر است؟

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^5} = 600m$$

$$R_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{30}{600}\right)^2 = 1.97 \Omega$$

مقدار مدت تابشی خیلی کم است که اصلا مطلوب نیست.

$$\bar{P} = R_{rad} \cdot I_{rms}^2 = 1.97 \times 15^2 = 444 W$$

نمودار که برای انتقال این مقدار توان باید

چون که رانده آنتن را افزایش داد چون مقدار مدت تابشی خیلی کم است. اصولا "این تابشی کننده الکترود مغناطیسی" به عنوان یک آنتن فرستنده استفاده نمی شود.

$$\bar{P} = \frac{l^2 q_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{l^2 q_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c} \cdot \mu_0 \epsilon_0 \Rightarrow$$

$$\bar{P} = \frac{\mu_0 l^2 q_0^2 \omega^4}{12\pi c} \quad (1)$$

برای یک بار نقطه‌ای نوسانی داریم، $x(t) = l \cos \omega t$ و خواهیم داشت: $\ddot{a}(t) = -l \omega^2 \cos \omega t$

$$\Rightarrow a(t) = a_0 \cos \omega t, \quad a_0 = -l \omega^2$$

$$\text{بنابراین داریم: } \bar{P} = \frac{\mu_0 q_0^2 (-l \omega^2)^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0 q_0^2 a_0^2}{12\pi c} \quad (2)$$

$$a^2(t) = a_0^2 \cos^2 \omega t \Rightarrow \overline{a^2(t)} = a_0^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_0^2 = 2 \overline{a^2(t)} \quad (3)$$

(3) into (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{P} = \frac{\mu_0 q_0^2 \times 2 \overline{a^2(t)}}{12\pi c} \Rightarrow \bar{P} = \frac{\mu_0 q_0^2 \overline{a^2(t)}}{6\pi c} \Rightarrow$$

$$\text{بنابراین می‌توانیم بنویسیم: } P(t) = \frac{\mu_0 q^2 a^2(t)}{6\pi c} \Rightarrow p(t) = \frac{\mu_0 q^2 a^2(t)}{6\pi c}$$

فرمول لارمور (Larmor) که می‌توانیم بنویسیم، این فرمول توان تابشی یک بار نقطه‌ای نوسانی را به دست می‌دهد. این فرمول توان تابشی یک بار نقطه‌ای نوسانی را به دست می‌دهد.

در بیشتر موارد بارهای نوسان کننده پروتون یا الکترون هستند که در داخل هسته یا اتم نوسان می کنند. بنابراین بار $q = e$ است. در مورد الکترون در اتم، اندازه l برابر با مرتبه بزرگی اندازه اتی است یعنی:

$$P_0 = q_0 \cdot l = 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-10} = 1.6 \times 10^{-29} \text{ C.m}$$

$$\bar{P} = \frac{P_0^2 \cdot \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} \Rightarrow \bar{P} = 10^{-74} \cdot \omega^4 \text{ W}$$

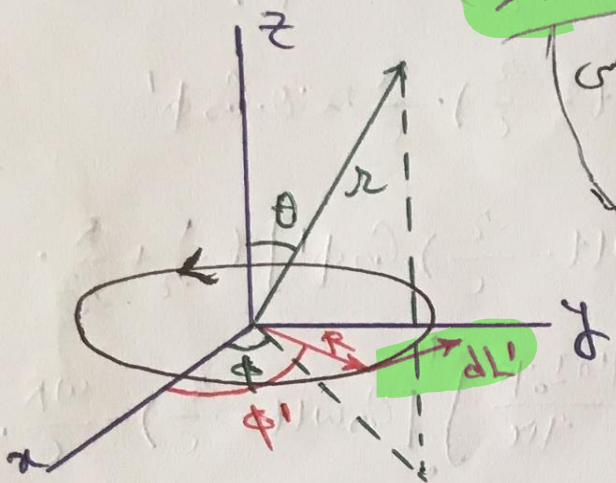
در ناصیه ایکی، ω از مرتبه 10^{14} Hz یعنی $\bar{P} \approx 10^{-18} \text{ W}$ است یا:

$$\bar{P} = 10 \text{ eV/s}$$

این مقدار از دیدگاه ماکروسکوپی بسیار ناچیز ولی در سطح اتمی قابل ملاحظه است.

تأثیر از دو قطب الکتریکی یکی از طرق بسیار موثر تولید امواج الکترومغناطیسی است. مهمترین سازدکاری است که به وسیله آن، امپا، موکولها دهته؟ تأثیر الکترومغناطیسی گسیل می کنند یا جذب می کنند. البته برای بحث پیرامون تأثیر دو قطب الکتریکی به وسیله اتم، موکول که دهته؟ باید از روش های مکانیک کوانتمی بهره گرفت. بنابراین نتایج بیان شده در اینجا، تنها می توانند تخمین غیر دقیق از مرتبه های بزرگی وارد در عملیات را به دست بدهند. یکی از نتایج تجربی بسیار مهمی که از بررسی های مکانیک کوانتمی به دست می آید، این است که اتم به طور یوسته تأثیر نمی کند بلکه تأثیر آن به صورت گسسته است. یک نتیجه تجربی دیگر که باید متصور شود این است که تأثیر گسیل شده توسط اتم، (موکول که دهته؟) از مجموعه ای با فرکانس های مشخص $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ تشکیل شده است که صرفه هارم، موکول داهسته است. این مجموعه را بنیاب (طیف) گسیلی جسم می نامند.

تأثیر الکترومغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی نوسان کننده: $2\pi R \ll \lambda \ll 2\pi R$



یک حلقه سیم دایره ای حامل جریان $I = I_0 \cos \omega t$ یک دوقطبی مغناطیسی نوسان کننده را تشکیل می دهد (برای نقاط دور)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{L}'$$

$$\vec{r} = r (\sin \theta \cos \phi \hat{a}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{a}_y + \cos \theta \hat{a}_z)$$

$$\vec{r}' = R (\cos \phi' \hat{a}_x + \sin \phi' \hat{a}_y), \quad d\vec{L}' = R d\phi' \hat{a}_\phi$$

مثلاً

مسئله متعارف میسر است، یعنی گنگی به ϕ ندارد. بنابراین $\vec{A}$ را در نقطه ای مانند P در صفحه xz در تقارن می گیریم. $(\phi = 0)$ پس داریم:

$$\vec{r} = r \sin \theta \hat{a}_x + r \cos \theta \hat{a}_z$$

$$\vec{r}' = R \cos \phi' \hat{a}_x + R \sin \phi' \hat{a}_y$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (r \sin \theta - R \cos \phi') \hat{a}_x - R \sin \phi' \hat{a}_y + r \cos \theta \hat{a}_z \Rightarrow$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \sin \theta \cos \phi'} = r \left(1 + \frac{R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} \sin \theta \cos \phi' \right)^{1/2} \approx r \left(1 - \frac{R}{r} \sin \theta \cos \phi' \right)$$

$$\sin \theta \cos \phi' = \frac{r - R \sin \theta \cos \phi'}{r} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \left(\frac{r - R \sin \theta \cos \phi'}{r} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx \vec{r}' \left(1 - \frac{R}{r} \sin \theta \cos \phi'\right)^{-1} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| \approx \vec{r}' \left(1 + \frac{R}{r} \sin \theta \cos \phi'\right)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} R d\phi' \hat{a}_{\phi'}$$

$$\cos \omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) = \cos \omega\left(t - \frac{r - R \sin \theta \cos \phi'}{c}\right) = \cos \omega\left[\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{R}{c} \sin \theta \cos \phi'\right]$$

محیط حلقه خیلی کمتر از طول موج است، یعنی: $2\pi R \ll \lambda$ پس داریم: $(\lambda \gg R \gg 2\pi R)$

$$2\pi R \ll \lambda \Rightarrow 2\pi R \ll c \cdot T \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \cdot R \ll c \Rightarrow \omega \cdot R \ll c$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

همین طور داریم!

$$x \rightarrow x_0 + \Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots$$

$$\hookrightarrow f(t + \Delta t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!} (\Delta t) + \frac{f''(t)}{2!} (\Delta t)^2 + \dots$$

الکترومغناطیس ۲

تابش دوقطبی مغناطیسی نوسانی (ادامه) - میدان های شبه ساکن

$$\phi(t) = \cos\omega(t - \frac{r}{c}) \Rightarrow \phi(t + \frac{R}{c} \sin\theta \cos\phi') = \cos\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{R}{c} \sin\theta \cos\phi')$$

$$\Rightarrow \cos\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{R}{c} \sin\theta \cos\phi') \approx \cos\omega(t - \frac{r}{c}) - \omega \sin\omega(t - \frac{r}{c}) \cdot \frac{R}{c} \sin\theta \cos\phi'$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cos\omega(t - \frac{r}{c}) - \omega \frac{R}{c} \sin\theta \sin\omega(t - \frac{r}{c}) \cos\phi' \right] \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{R}{r^2} \cdot \text{مرفوعه} \right)$$

$$\cdot \sin\theta \cos\phi' \rangle \langle \phi' \cdot (-\sin\phi' \cdot \hat{a}_x + \cos\phi' \cdot \hat{a}_y) \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cos\omega(t - \frac{r}{c}) - \frac{\omega R}{c} \cdot \sin\theta \sin\omega(t - \frac{r}{c}) \cos\phi' \right] \frac{1}{r} \cos\phi' \cdot \hat{a}_y \cdot \langle \phi' \rangle$$

(فراستادال برای مولفه x صفری شود)

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 R}{4\pi} \cdot \left(-\frac{\omega R}{c} \right) \cdot \sin\theta \sin\omega(t - \frac{r}{c}) \cdot \frac{1}{2} \pi \hat{a}_y$$

در حالت کلی مولفه $\hat{a}_\phi$ را برای بردار $\vec{A}$ داریم، یعنی:

$$A_\phi(\vec{r}, t) = \frac{-\mu_0 I_0 \omega A}{4\pi r c} \cdot \sin\theta \sin\omega(t - \frac{r}{c}) \quad (A = \pi R^2)$$

مولفه θ برای B برابر است با (مولفه θ برای نقاط دور) (فقط مولفه B می ماند که نسبت به $\frac{1}{r}$ است)

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \Rightarrow B_\theta = \frac{-\mu_0 I_0 \omega^2 A}{4\pi c^2 r} \cdot \sin\theta \cos\omega(t - \frac{r}{c})$$

برای میدان ناط دور را به زیر را داریم:

$$\vec{E} = -\frac{c}{r} \vec{r} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{c}{r} \hat{r} \times \left(\frac{\mu_0 I_0 \omega^2 A}{4\pi c^2 r} \right) \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{a}_\theta \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 I_0 \omega^2 A}{4\pi c r} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{a}_\phi \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad (m_0 = I_0 A)$$

نابراین داریم:

$$\begin{cases} E_\phi = \frac{m_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^3 r} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ B_\theta = \frac{-\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2 r} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \end{cases}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} E_\phi \hat{a}_\phi \times B_\theta \hat{a}_\theta = \frac{-1}{\mu_0} E_\phi B_\theta \hat{a}_r$$

$$P = \oint \vec{S} \cdot \vec{n} d\alpha = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{m_0^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^5 r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{a}_r \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{a}_r) \Rightarrow$$

$$\bar{P} = \frac{m_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^5} \xrightarrow{m_0 = I_0 A} \bar{P} = \frac{1}{2} \frac{I_0^2 A^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^5} \xrightarrow{\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}} \bar{P} = \frac{1}{2} I_0^2 \frac{\mu_0}{6\pi} \frac{A^2 \omega^4}{c^3}$$

مقدار توانی برای یک دو قطبی مغناطیسی نوبت کننده برابر است با: $R_{rad} = \frac{\mu_0 A^2 \omega^4}{6\pi c^3}$ (no pattern) $\sin^2 \theta$

در مورد دو قطب مغناطیسی نوسان کننده نیز باید توجه داشت که دو قطب مغناطیسی ساکن، تنها میدان مغناطیسی ثابت (مستقل از زمان) تولید می کنند ولی هرگاه دو قطب مغناطیسی نوسان باشد، میدان مغناطیسی حاصل از آن نیز در هر نقطه از فضا، نوسان یا تابع زمان است. و طبق قانون فارادی - انجمادی، یک میدان الکتریکی نیز به وجود می آید در نقاط نزدیک به دو قطب مغناطیسی، اثر تاخیری ناشی از سرعت محدود انتشار امواج الکترودینامیکی تا چیز است، زیرا فاصله هر کوچک است. پس این میدان دارای دو مولفه B_r و B_θ است (برای نقاط نزدیک به دو قطب مغناطیسی) و هر یک با $\frac{1}{r^3}$ متناسب است و میدان الکتریکی نیز قابل چشم پوشی است. ولی در فاصله کمی خیلی دور، سرعت محدود انتشار امواج الکترودینامیکی تغییر قابل ملاحظه ای در میدان تولید می کند. مانند دو قطب الکتریکی، می توان جوابی که به جای $\frac{1}{r^3}$ به طور محاسبه تابع $\frac{1}{r}$ است را به دست آورد.

در مورد الکترون داریم: $m_0 = \frac{-e}{2m_e} L$ که در آن L اندازه حرکت زاویه ای مداری الکترون است. در نتیجه:

$$\bar{P} = \frac{m_0^2 \cdot \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^5} = \frac{(e/2m_e)^2 \cdot L^2 \cdot \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^5}$$

L از رتبه 10^{-34} J.s است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{P} \approx 10^{-80} \cdot \omega^4 \text{ W}$$

از تعامیه این نتیجه با آنچه برای دو قطب الکتریکی به دست آمد، نسبت شدتهای تابشی دو قطب مغناطیسی به تابشی دو قطب الکتریکی برای اتم که دهمین طور برای هکول که از رتبه 10^{-6} است. یعنی برای وگاهاش کمی یکسان، تابشی دو قطب مغناطیسی اتم که در مقابل تابشی دو قطب الکتریکی قابل چشم پوشی است و مانند آن را به حساب می آوریم، مگر هنگامی که به هر دلیل دو قطب الکتریکی حضور نداشته باشد. چون توضیح این امر نیازمند مکانیک کوانتم است بنابراین آن را بررسی نمی کنیم. فعلاً چون $L = m_e r v$ و اندازه کمی در L از یک مرتبه مقداره، نتیجه می شود:

$$\bar{P} \approx \left(\frac{v}{c}\right)^2 \cdot \bar{P}_{\text{الکتریکی}}$$

دو قطب مغناطیسی

بنابراین، این در مقدار فقط برای الکترونهای خیلی تند و قابل مقایسه اند. ولی در هسته که تابشی دو قطب مغناطیسی نسبتاً قوی تر از اتم که دو مولد است.

میدان‌های شبه ساکن (شبه الکتروستاتیک و شبه مغناطیسی)

در مواردی، میدان الکترومغناطیسی خیلی به گونه‌ای با زمان تغییر می‌کند. به عنوان یک مثال می‌توان به یک جسم باردار است که به تدریج بارش را از دست می‌دهد یا الکترون‌های آن به گونه‌ای در حال تغییر است. در این صورت میدان الکترومغناطیسی نیز به گونه‌ای با زمان تغییر می‌کند. به بیان دیگر نسبت تغییرات E نسبت به زمان نسبت ملاطفتی است. به عبارت دیگر، با وجود این که E با زمان تغییر می‌کند ولی این تغییر زمانی به حدی کم است که می‌توان آن را تقریباً ثابت در نظر گرفت. این به معنای آن است که می‌توان قانون کولن را برای آن نوشت. زیرا قانون کولن مربوط به الکتروستاتیک بود و در آن میدان الکترومغناطیسی تغییرات زمانی نداشته. برقرار بودن قانون کولن نیز به معنای معبر بودن $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ است. از این رو، اگر میدان الکترومغناطیسی نسبت به زمان به گونه‌ای تغییر نکند، آن را میدان شبه الکتروستاتیک (Quasi-static electric field) می‌نامند. معادلات ماکسول برای میدان‌های

شبه الکتروستاتیک به صورت زیر هستند:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

electrostatic

گاهی اوقات میدان مغناطیسی نسبت به زمان به کندی تغییر می‌کند. مانند یک سیم حاصل جریان متغیر یا زمانی که تغییرات آن نسبت به زمان $\frac{d\Phi}{dt}$ ضلعی کندی است. در این صورت میدان مغناطیسی حاصل از سیم، با زمان به کندی تغییر می‌کند، به طوری که می‌توان در بازه زمانی مورد نظر این تغییرات را ناچیز فرض نمود و با تقریب خوب می‌توان آن را ثابت در نظر گرفت. ثابت بودن جریان الکتریکی گذرنده از یک سیم باعث می‌شود که بتوان میدان مغناطیسی حاصل از آن را با استفاده از قانون بیو-ساواری به دست آورد. همانطور که دیدیم قانون بیو-ساواری نیز قانون آمپر را نتیجه می‌دهد. بنابراین هنگامی که تغییرات زمانی جریان گذرنده از یک سیم خیلی کم باشد، می‌توان قانون بیو-ساواری و در نتیجه قانون آمپر را نوشت. ضرایب میدان مغناطیسی به کندی با زمان تغییر کند، قانون آمپر با تقریب خوبی برای آن برقرار است. به همین میدان مغناطیسی که با زمان به کندی تغییر کند میدان الکترومغناطیسی (electromagnetic field) می‌گویند. معادلات ماکسول برای میدان‌های الکترومغناطیسی عبارتند از:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

الکترومغناطیس ۲

تکانه میدان الکترومغناطیسی

قانون بقای تکانه میدان الکترومغناطیسی

نیروی الکترومغناطیسی کل وارد بر بار الکتریکی q در حجم V از طرف میدان الکترومغناطیسی برابر است با:

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{F} = \int_V dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \int_V \rho \cdot dV (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int (\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}) dV$$

نیروی $\vec{F}$ را نیروی مکانیکی می نامیم، برای توانه باعث حرکت بار الکتریکی شود. طبق قانون دوم نیوتن می توان نوشت $\vec{F} = d\vec{p}_m / dt$ که در آن $\vec{p}_m$ تکانه خطی (مکانیکی) بار الکتریکی است.
 داریم: $\vec{J} = \rho \vec{v}$ بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{d\vec{p}_m}{dt} = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) \cdot dV \quad (1)$$

از قانون آمپر-مکسول (معادله دوم مکسول دالکترودینامیک) داریم:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \xrightarrow{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$(2) \text{ into } (1) \Rightarrow \frac{d\vec{p}_m}{dt} = \int [\rho \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}] dV \quad (3)$$

$$\text{پارا: } \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$(4) \text{ into } (3) \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{\text{em}}}{dt} = \int \left[\rho \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \epsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] dV$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{\text{em}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} dV = \int \left[\rho \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \epsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] dV$$

استلال $\vec{P} = \int \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} dV$ بارابانت، مکان میدان الکترومغناطیسی در حجم V .

از این رو $\vec{P}_V = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ مکان میدان الکترومغناطیسی در واحد حجم می باشد.

$$\vec{P}_V = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

مسئله الف: برای موج الکترومغناطیسی عرضی با $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \hat{y}$ سهم مولفه الکتریک و مولفه مغناطیسی موج را در انرژی موج به دست آورید. ب: مکان موج را می گویید.

حل: در تفصیلی نگریسیم: $E_x = E_0 \cos(\omega t - kx)$ بر این اساس خواهیم داشت:

$$\vec{E} = E_x \hat{y}, \quad \vec{B} = E_x / c \cdot \hat{z}, \quad \vec{H} = E_x / \eta \cdot \hat{z}$$

الف

$$u = \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 \left(\frac{E_x}{n}\right)^2)$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E_x^2 + \cancel{\mu_0} \cdot \frac{\epsilon_0}{\cancel{\mu_0}} E_x^2) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 = \epsilon_0 E_x^2$$

نیمی انرژی حوله الکتریکی یک موج عرضی در فضای آزاد برابر با $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ و انرژی حوله مغناطیسی این موج نیز برابر با $u_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ است. بنابراین نیمی از انرژی موج توسط حوله الکتریکی آن و نیمی دیگر توسط حوله مغناطیسی موج حمل می شود.

ب: مکان موج در دایره حجم $\vec{P}_V$ را برابر است با:

$$\vec{P}_V = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\epsilon_0 E_x^2}{c} \hat{z} \Rightarrow P_V = \epsilon_0 E_x^2 / c \Rightarrow P_V = u E / c$$

می توان این کمیت را برای حجم دیفرانسیلی بسیار کوچک dV به دست آورد.

$$P_V \cdot dV = \frac{u E}{c} \cdot dV \Rightarrow P = u / c$$

در حجم دیفرانسیلی بسیار کوچک dV عمده ای توان یک فوتون را در نظر گرفت. بنابراین رابطه بالا همان رابطه آشنای مکان فوتون است که قبلاً $P = \frac{E}{c}$ (انرژی فوتون) را برای شما ختم.

نموده شود که میدان الکتر و مغناطیسی علاوه بر مکان حاملی توان ای نیز است.

$$\vec{L}_V = \vec{r} \times \vec{P}_V = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$$

مسئله ۱: کره‌ای از یک ماده فرومغناطیس (مانند آهن) به شعاع R به طور یکنواخت مغناطیده شده است. اندازه بردار مغناطش برابر با M است. یک لایه عایق خیلی نازک روی سطح کره می‌نشانیم. سپس بار الکتریکی Q را روی سطح این کره (لایه عایق خیلی نازک) به طور یکنواخت توزیع می‌کنیم. این کره به تدریج گرم می‌شود تا به دمای کوری برسد.

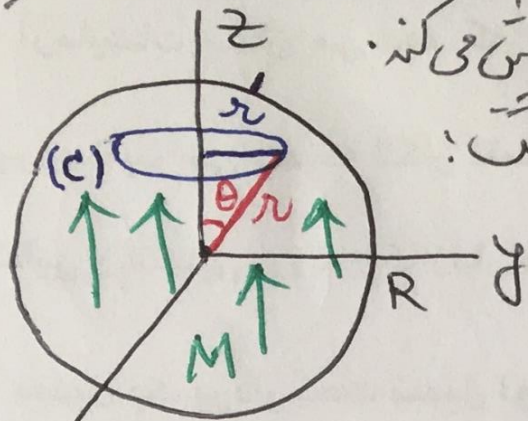
الف: از زمانی که کره گرم می‌شود تا هنگامی که به دمای کوری می‌رسد چه اتفاقی می‌افتد؟
ب: تکانه زاویه‌ای کره را از زمان گرم شدن تا رسیدن به دمای کوری به طور مستقیم به دست آورید.
ج: تکانه زاویه‌ای کره را با استفاده از تکانه میدان الکترومغناطیسی محاسبه کنید.
چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

مسئله ۲: کره‌ای از یک ماده فرومغناطیس (مانند آهن) به شعاع R به طور یکنواخت مغناطیده شده است. اندازه بردار مغناطش برابر با M است. بار الکتریکی Q را روی سطح این کره آهنی قرار می‌دهیم. سپس کره را به زمین وصل می‌کنیم تا بار آن به تدریج کم شود و به صفر برسد.

الف: از زمانی که بار کره کم می‌شود تا هنگامی که به صفر برسد چه اتفاقی می‌افتد؟
ب: تکانه زاویه‌ای کره را از شروع تخلیه بار تا صفر شدن کامل آن به طور مستقیم به دست آورید.
ج: تکانه زاویه‌ای کره را با استفاده از تکانه میدان الکترومغناطیسی محاسبه کنید.
چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل مسئله 1 مربوط به تکان میدان الکتریکی و مغناطیسی :

از دیدن دادن ته ریجی خاصیت مغناطیسی این کوره گفته به معنای آن است که می توان آن را یک مشد
تبه بگشود نه تنگ در نظر گرفت. می توان دید که کوره شروع به چرخش می کند.
با در نظر گرفتن معادلات تبه بگشودنه تنگ ما کسول می توان نوشت :



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

دایره به شعاع a در اطراف شکل درون کوره در تعامی داریم

گاهش M باعث کاهش شد میدان مغناطیسی که از سطح این دایره نسبت به زمین می شود.
طبق قانون القای فارادی، میدان الکتریکی E در این سطح نسبت به گویه ای ایجاد می شود که با کاهش
شد میدان مغناطیسی نسبت به زمان مخالفت کند. یعنی جهت E باید ساعتگرد خواهد بود (دید از بالا).
از این رو باید دانست که :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow E \cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt} (B \cdot \pi r^2)$$

میدان مغناطیسی B داخل و خارج از کوره را قیاس به صورت زیر به دست آوردیم :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{2}{3} \mu_0 M \cdot \hat{a}_z & (r < R) \\ \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \cdot \hat{a}_\theta) & (r > R) \end{cases}$$

(که در آن داریم : $m = \frac{4}{3} \pi R^3 M$)

بنابراین داریم:

$$E \cdot 2\pi r \cdot \sin\theta = -\pi (r \cdot \sin\theta)^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3} \mu_0 M \right) \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{-\mu_0 r \cdot \sin\theta}{3} \frac{dM}{dt} \hat{a}_\phi$$

(توجه کنید که طبق انتظاریما، $\vec{E}$ در جهت $\hat{a}_\phi$ است)
(توجه کنید که $\frac{dM}{dt} < 0$ است).

$$\vec{E}|_{r=R} = \frac{-\mu_0 R \cdot \sin\theta}{3} \frac{dM}{dt} \hat{a}_\phi$$

میدان الکتریکی را روی سطح کره به دست می آوریم. داریم:

این میدان الکتریکی بر بارهای مقید روی کره نیرو وارد می کند و باعث چرخش کره حول محور می شود.

$$d\vec{F} = \vec{E}|_{r=R} \cdot dq \Rightarrow d\vec{F} = \vec{E}|_{r=R} \cdot \sigma \cdot ds = \frac{-\mu_0 R Q}{12\pi} \sin^2\theta \cdot \frac{dM}{dt} d\theta d\phi \hat{a}_\phi$$

داریم:

در اینجا با انتخاب $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ نیز انجام شده است. این نیرو ایجاد کننده $\vec{\tau}$ می کند. داریم:

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \int R \hat{a}_r \times \left(\frac{-\mu_0 R Q}{12\pi} \right) \sin^2\theta \cdot \frac{dM}{dt} d\theta d\phi \hat{a}_\phi \Rightarrow$$

$$\vec{\tau} = \frac{-\mu_0 R^2 Q}{12\pi} \frac{dM}{dt} \hat{a}_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{-2}{9} \mu_0 R^2 Q \frac{dM}{dt} \hat{a}_z$$

اگرچه می شود که اگر کره به تدریج گرم نشود و عمل گرم شدن آن به سرعت انجام نشود، در این صورت M در زمان شروع به گرم شدن، رسیدن به دمای کوری، تحولات زمانی و همین طور تغییرات مکانی نیز خواهد داشت و دیگر نمی توان $\frac{dM}{dt}$ را از زیر علامت انتگرال خارج نمود (اینجا خارج شده است).

الکترومغناطیس ۲

تکانه میدان الکترومغناطیسی (ادامه) - انتشار امواج الکترومغناطیسی

$$\vec{L} = \int \vec{r} \cdot d\vec{t} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{-2}{9} \mu_0 R^2 Q \frac{dM}{dt} \hat{a}_z \cdot dt = \int_M \frac{-2}{9} \mu_0 R^2 Q \cdot dM \cdot \hat{a}_z \Rightarrow$$

$$\vec{L} = \frac{2}{9} \mu_0 R^2 Q M \cdot \hat{a}_z$$

تکانه زاویه‌ای کل منتقل شده به کره حین از دست دادن تدریجی خاصیت مغناطیسی آن

پس می‌توان نشان داد که این تکانه دقیقاً برابر با تکانه زاویه‌ای میدان الکتریکی و مغناطیسی نسبت به محور است.

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r & (r > R) \end{cases}$$

(حالت ۲) $\hat{a}_\theta = \cos\theta \hat{a}_r + \sin\theta \hat{a}_\phi$ $\hat{a}_\phi = -\sin\theta \hat{a}_r + \cos\theta \hat{a}_\phi$

$$\vec{P}_v = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \cdot \frac{mQ}{r^5} \sin\theta \cdot \hat{a}_\phi \quad (r > R)$$

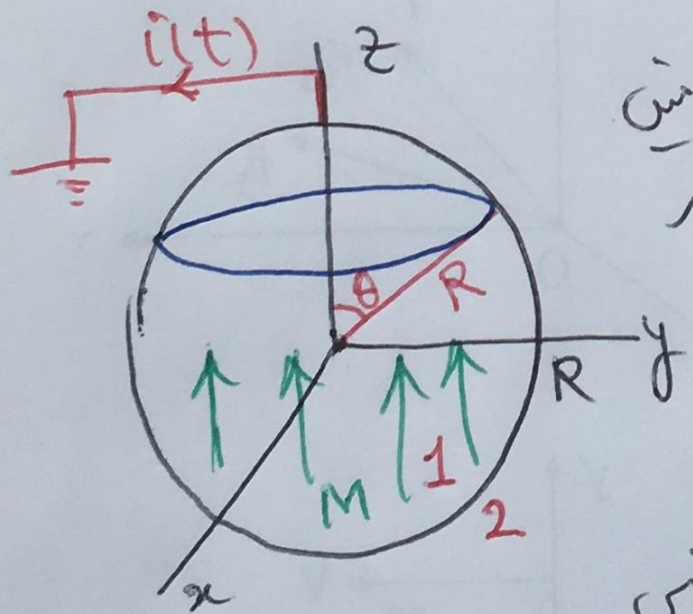
$$\vec{L}_v = \vec{r} \times \vec{P}_v = r \cdot \hat{a}_r \times \vec{P}_v = \frac{-\mu_0}{(4\pi)^2} \cdot \frac{mQ}{r^4} \sin\theta \cdot \hat{a}_\theta \quad (r > R)$$

$$\vec{L} = \int \vec{L}_v \cdot dv = \frac{-\mu_0 m Q}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{\sin\theta}{r^4} \hat{a}_\theta \cdot r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi \Rightarrow$$

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 m Q}{6\pi R} \hat{a}_z = \frac{\mu_0 Q}{6\pi R} \frac{4}{3} \pi R^3 M \hat{a}_z \Rightarrow \vec{L} = \frac{2}{9} \mu_0 R^2 Q \cdot M \hat{a}_z$$

تکانه زاویه‌ای میدان الکتریکی و مغناطیسی همان مقداری است که در بالا می‌گفته بودیم. به عبارت دیگر با گرم شدن تدریجی کره، میدان مغناطیسی در خارج و داخل کره کاهش می‌یابد. در نتیجه تکانه میدان نیز شروع به کم شدن می‌کند تا هنگام رسیدن به دمای آکوری به صفر می‌رسد. تکانه از دست رفته میدان الکتریکی و مغناطیسی به کره منتقل می‌شود و کره حول محور خود می‌چرخد.

حل مسئله 2 مربوط به مکان میدان الکتریکی و مغناطیسی:



در اینجا در این بخش M ثابت می باشد ولی بار کروی به تدریج به زمین منتقل می شود. این عمل می توان مثلاً با استفاده از یک مدار $R-C$ ایستاده به طوری که تخلیه بار به زمین به آهستگی صورت گیرد. از این رو، یک مسئله و نکته الکتریکی را فراهم می دانست، زیرا میدان الکتریکی در نقاط خارج از کره به آهستگی با زمان تغییر می کند. اگر از دست دادن بار الکتریکی کره به تدریج انجام نشود، در این صورت جگالی بار سطحی کره (σ) در زمان t برابر با مقدار ثابتی نخواهد بود و تابعی از موقعیت بار روی کره نیز خواهد بود و حل مسئله دشوار می شود ولی در این مسئله از دست دادن تدریجی بار کره باعث می شود که جگالی بار سطحی کره در لحظه t (یعنی σ) همان فرم مکیواض (مسئله از مکان) را حفظ کند و می توان به میزان قابل توجهی ساده خواهد شد.

در زمان t بار الکتریکی کره برابر با q فرض می شود. چون انتقال بار به زمین به آهستگی انجام می شود پس بار q همان توزیع مکیواض روی سطح کره را حفظ خواهد کرد یعنی
$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

حلقه دایره‌ای روی سطح کره را مطابق شکل در نظر می‌گیریم. شعاع این دایره برابر با $R \sin \theta$ خواهد بود. بار الکتریکی واقع در بخش یا شش این حلقه در زمان t برابر با q_{down} فرض می‌شود ($\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$)

$$q_{\text{down}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma \cdot R \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi = \frac{q}{2} (1 + \cos \theta)$$

عبور این بار q_{down} از سطح محدود شده به حلقه، جریان سطحی ایجاد می‌کند. داریم:

$$i(t) = -\frac{d}{dt} q_{\text{down}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dq}{dt} (1 + \cos \theta)$$

زمان $(dt > 0)$ بار q_{down} کم می‌شود و $q_{\text{down}} < 0$ است. گنجایی جریان سطحی روی کره را در زمان t برابر با K در نظر می‌گیریم. برای این منظور داریم:

$$di(t) = \vec{J} \cdot d\vec{s} = J_\theta (-\hat{a}_\theta) \cdot d s_\theta (-\hat{a}_\theta) = J_\theta \cdot d s_\theta = J_\theta \cdot R \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

چون جریان روی سطح کره برقرار می‌شود پس $d r = 0$ و $J_\theta = \infty$ پس در نظر می‌گیریم $d r = 0$. $K_\theta = J_\theta \cdot d\theta$

$$\Rightarrow di(t) = K_\theta \cdot R \sin \theta \cdot d\phi \Rightarrow i(t) = K_\theta \cdot R \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi R \cdot K_\theta \sin \theta$$

$$\Rightarrow K_\theta = \frac{i(t)}{2\pi R \sin \theta} \Rightarrow \vec{K} = \frac{i(t)}{2\pi R \sin \theta} (-\hat{a}_\theta) \Rightarrow \vec{K} = \frac{1}{4\pi R} \frac{dq}{dt} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \hat{a}_\theta$$

نبردی وارد یک نوار حلقه‌ای دایره‌ای شکل به شعاع $R \sin \theta$ برابر است با:

$$d\vec{F} = I d\vec{L} \times \vec{B} = \vec{K} d s \times \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = \vec{K} \times \vec{B} d s \quad (\text{روی سطح کره}) \quad (1)$$

برای محاسبه $\vec{B}$ روی سطح کره، باید توضیح داشت که در پس وجود جریان سطحی، بارهای آزاد مولفه H

بیولته نخواهد بود (ردی سطح کره بیولته نیست) از $H_1 - H_2 = K$ سایرین H روی سطح کره بیولته
 نیست و همین B_t نیز بیولته نیست. البته B (خولف عمودی B روی سطح کره) بیولته است ولی ذرات
 $\vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_n$ بیولته نخواهد بود (ردی سطح کره). ولی $\vec{B}$ روی سطح کره برابر میانگین $\vec{B}$ داخل و خارج
 کره خواهد بود. از این رو داریم:

$$\vec{B} = (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) / 2 \quad (r=R)$$

(2) (سطح کره)

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 M}{6} (2\hat{a}_z + 2\cos\theta \cdot \hat{a}_r + 2\sin\theta \cdot \hat{a}_\theta)$$

$$(2) \text{ into } (1) \Rightarrow d\vec{F} = \frac{R}{4\pi} \frac{dq}{dt} \cdot \frac{\mu_0 M}{6} (1 + \cos\theta) [2\hat{a}_\theta \times \hat{a}_z + 2\cos\theta (\hat{a}_\theta \times \hat{a}_r)] d\theta d\phi$$

 بجز آنکه $\vec{r} = R\hat{a}_r$ می توان گفت و نیروی وارد بر کره را به دست آورد (گفت و نسبت به محور z)

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \frac{\mu_0 M R^2}{12\pi} \frac{dq}{dt} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos\theta) \times 2\cos\theta \hat{a}_\theta \cdot d\theta d\phi \Rightarrow$$

$$\vec{\tau} = \frac{-2}{9} \mu_0 M R^2 \frac{dq}{dt} \hat{a}_z$$

 مکان مستقل شده به کره حتی از دست دادن تدریجی بار نیز به صورت زیر خواهد بود!

$$\vec{L} = \int \vec{\tau} \cdot dt = \int_0^Q \frac{-2}{9} \mu_0 M R^2 \cdot \hat{a}_z \cdot \frac{dq}{dt} \cdot dt \Rightarrow \vec{L} = \frac{2}{9} \mu_0 M R^2 Q \hat{a}_z$$

 این مقدار همان مکان زادی ای ذخیره شده در میدان است. **نکته** شود که مکانی که به وسیله آن مکان زادی از
 میدان به کره منتقل می شود در این دو مسئله با یکدیگر فرق دارند. در حالت اول این مکانیسم طبق قانون القای
 فارادی است در حالی که در حالت دوم این مکانیسم طبق قانون نیروی لورنتس است.

انتشار امواج الکترومغناطیسی

موج تخت الکترومغناطیسی را در تقارمی بگیریم. موج تخت موجی است که فاز موج در هر لحظه مشخص + برای کلیه نقاط واقع بر هر صفحه عمود بر راستای انتشار، یکسان باشد.

به عنوان مثال داریم:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cdot e^{-i(\omega t - Kz)} \hat{a}_x$$

برای یک محیط بدون بار خالص چسبیده به تخت است:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$\vec{E}(\vec{r}, t)$ می تواند یک تابع فیزیکی (Physical) و یا مختلط باشد (برای یک موج تکفاز). برای نوشتن یک موج تکفاز به فرم مختلط داریم:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} \quad (2)$$

$$\text{مختلط (2) into (1)} \Rightarrow \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + (\omega^2 \mu\epsilon + i\omega \mu g) \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (3)$$

نتیجه داریم که یک جواب برای $\vec{E}$ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(z) \cdot \hat{a}_x \quad (4)$$

و از آنجا برای یک محیط عایق و بدون بار خالص چسبیده داریم:

$$E_x(z) = E_0 \cdot e^{\pm iKz} \quad (5)$$

$$(4), (5), (2) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{مختلط}} = E_0 \cdot e^{\pm iKz} \cdot e^{-i\omega t} \hat{a}_x = E_0 \cdot e^{-i(\omega t \mp Kz)} \hat{a}_x$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{مختلط}} = E_0 \cdot e^{-i(\omega t \mp Kz)} \hat{a}_x, \quad \vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{فیزیکی}} = E_0 \cdot \cos(\omega t \mp Kz) \hat{a}_x$$

فاز موج برابر با $\omega t - Kz$ است (برای موج رفته در جهت $+$). فاز ثابت می دهد!

$$\omega t - Kz = \text{ثابت} \Rightarrow \omega \cdot dt - K \cdot dz = 0 \Rightarrow v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{nw/c} = \frac{c}{n}$$

سرعت فاز موج سرعت حرکت امواج با فاز ثابت است.

در حالت کلی اگر $\vec{r}$ ثابت باشد، بردار $\vec{K}$ باید به $\vec{r}$ موازی باشد (یعنی توان نوشت: $\vec{E}$ می تواند مختلط باشد)

$$\vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{مختلط}} = \vec{E} \cdot e^{-i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})}$$

($\vec{K}$ بردار موج نامیده می شود)

برای یک محیط عایق و بدون بار خالص چگالی داریم $\rho = 0$ و $\vec{J} = q\vec{E} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

در اینجا با استفاده از می توانیم مختلط یا فیزیکی (physical) بنویسیم (به علت خطی بودن). بنابراین از

مسئله ای که حل کردیم، الگوی گسسته را اختیار می کنیم: $\vec{E}(\vec{r}, t)_{\text{مختلط}} = \vec{E} \cdot e^{-i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})}$

برای کمیت های دیگر مانند $\vec{D}$ و $\vec{H}$ و $\vec{B}$ نیز می توان که صورت بالا نوشت.

الکترومغناطیسی ۲

انتشار امواج الکترومغناطیسی (ادامه) - قطبش امواج الکترومغناطیسی

تکم شود که حتی برای محیطی ناهمگن است $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ به عنوان مثال می توان
 اشتراک موج الکترومغناطیسی تحت (کفام) را در یک لایه نازک ناهمگن نام برد. البته نتیجه
 بازتابش ها و شکست های بی درسی در لایه نازک ناهمگن خواهد شد.

اکنون می خواهیم معادلات ماکسول را برای یک موج تحت (plane wave) به دست آوریم.
 نشان می دهیم که در این حالت، معادلات دیفرانسیل ماکسول به معادلات برداری تبدیل می شود.
 برای $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0$ داریم:

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{D} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}] = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot [(\epsilon_x \hat{a}_x + \epsilon_y \hat{a}_y + \epsilon_z \hat{a}_z) e^{-i\omega t} \times e^{i(K_x x + K_y y + K_z z)}] = 0 \Rightarrow e^{-i\omega t} (\epsilon_x i K_x e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \epsilon_y i K_y e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \epsilon_z i K_z e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = 0 \Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{D} = 0$$

یعنی برای یک موج کفام (موج تحت) معادله دیفرانسیل $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0$ تبدیل به معادله برداری
 $i \vec{k} \cdot \vec{D} = 0$ می شود. به عبارت دیگر انگار که تبدیل $\vec{\nabla} \rightarrow i \vec{k}$ و $\vec{D}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{D}$ انجام شده
 است. به همین ترتیب نیز به سادگی می توان نتیجه گرفت که $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$.
 از این دو معادلات برداری زیر خواهیم داشت!

$$i \vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow i \vec{k} \cdot (\epsilon_0 K \vec{E}) = 0 \Rightarrow K \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

(محیط است را غیر مغناطیسی)
 در تعاریف گیریم یعنی: $\mu = \mu_0$

$$\vec{k} \times \vec{E} = -(-i\omega) \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{k} \times \vec{B} = \mu \epsilon (-i\omega) \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{k} \vec{E}$$

نبا بر این برای مطالعه انتشار یک موج کثیف تحت در محیط ناهمگن و پدید آمدن خواص جسم به عبارات برداری از فرقی رسم:

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

توجه: جهت انتشار موج است

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \Rightarrow k \vec{u} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \Rightarrow \frac{n\omega}{c} \vec{u} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{n}{c} \vec{u} \times \vec{E}$$

با ضرب کردن خواصی را به بالا در $\vec{u}$ از طرف چپ و به کار بردن $BAC-CAB$ داریم، پس i خارج

$$\vec{E} = -\frac{c}{n} \vec{u} \times \vec{B}$$

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{k} \vec{E} \Rightarrow$$

$$\frac{n\omega}{c} \vec{u} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} n^2 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{c}{n} \vec{u} \times \vec{B}$$

با ضرب خارجی خواصی را به $\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{k} \vec{E}$ در $\vec{k}$ از طرف چپ می شود:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{B}) = -\frac{\omega}{c^2} \vec{k} \vec{k} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{B}) - \vec{B} k^2 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{k} \vec{k} \times \vec{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\vec{B} \cdot \vec{K}^2 = \frac{-\omega}{c^2} \vec{K} \cdot \omega \cdot \vec{B} \Rightarrow K^2 = \frac{K \omega^2}{c} \Rightarrow K = \sqrt{K} \cdot \frac{\omega}{c} = \frac{n\omega}{c}$$

رابطه $K = \frac{n\omega}{c}$ را به یاد داشته باشید. اگر رابطه یاد داشته باشید به صورت $K = n\omega/c$ باشد، محضاً انتشار را تغییر داده می‌تواند. رابطه یاد داشته باشید که اندازه بردار انتشار موج $\vec{K}$ را بر حسب ω ، K نشان می‌دهد، یا بر حسب n, ω .

محیطی که انتشار معمولاً محیطی در خلاء طیفی است. برای فرکانس‌های نوری و برای تمام مواد $\mu \approx \mu_0$.

محیطی که برای آن در فرکانس‌های پایین، $\mu \approx \mu_0$ ، قابل ملاحظه‌ای با μ_0 متفاوت است، محیطی در خلاء طیفی هستند که به هر جهت محیطی در خلاء هستند. برای فرکانس‌های استاتیکی (نور مرئی) داریم $\mu \approx \mu_0$.

در اینجا که $\vec{K} \cdot \vec{D} = 0$ یا $\vec{K} \cdot (\epsilon \cdot \vec{E}) = 0$ و $\vec{K} \cdot \vec{E} = 0$ اگر $\vec{K} \neq 0$ آنجا $\vec{E} \cdot \vec{E} = 0$ و $\vec{K} \cdot \vec{E} = 0$ البته همواره داریم $\vec{K} \cdot \vec{B} = 0$ یعنی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ هر دو در $\vec{K}$ عمود می‌شوند (البته همواره $\vec{E}$ ، $\vec{B}$ نیز همواره بر یکدیگر عمودند و بر افتاده داریم $\vec{K} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$).

از این رو، اگر $\vec{K} \neq 0$ باشد در این صورت $\vec{E}$ بر $\vec{K}$ عمود است زیرا $\vec{K} \cdot \vec{E} = 0$ و همین‌طور همواره داریم $\vec{B} \perp \vec{K}$ و $\vec{E} \perp \vec{B}$. بنابراین یک موج عرضی داریم. به عبارت دیگر برای یک موج عرضی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ هر دو بر $\vec{K}$ عمودند و $\vec{E}$ ، $\vec{B}$ بر یکدیگر نیز عمودند.

(موج تخت)

$$\vec{K} \perp \vec{D}, \quad \vec{K} \perp \vec{B}, \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

$$\vec{K} \perp \vec{E}, \quad \vec{K} \perp \vec{B}, \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

(موج عرضی) ($\vec{K} \neq 0$)

هر موج عرضی یک موج تخت است و ممکن است یک موج تخت، موج عرضی نباشد.

این تویند موج عرضی برای کلمه محیطی است. برای محیطی مارپیچی می توان نشان داد که $\vec{E}$ و $\vec{B}$ (یعنی کمیت های فیزیکی $\vec{E}$ و $\vec{B}$) نیز بر $\vec{k}$ عمود و در یکدیگر نیز عمود هستند. بنابراین برای محیطی عباتی بردار $\vec{k}$ و $\vec{E}$ و $\vec{B}$ یک دستگاه راستگرد را تشکیل می دهند.

نوشته که در اینجا جواب های معادلات ماکسول را به صورت موج تخت (تفصیل) در تقاضای گرم. همواره می توان با بنطالعه جوابها به صورت یک موج تخت، برهم نهی انواع تخت را نیز بررسی نمود. برای معادلات ماکسول معادلات خطی هستند و با بنطالعه جواب به صورت موج تخت می توان برهم نهی آنها را نیز مطالعه کرد. در حالت کلی برای برهم نهی تعدادی جواب به صورت موج تخت اگر جواب به جواب متساوی منظور

لفظ باشد (نه الزاماً گسسته) داریم:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_i \vec{E}(\vec{k}_i, \omega_i) e^{-i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad \text{(برای فوریه)}$$

باید یک یک جملات نیز به طور جداگانه در شرایط مربوط به معادلات برداری ماکسول نیز صدق کنند. یعنی در معادلات ردبرو

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \quad \text{و} \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad \text{و} \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{و} \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

اگر جوابی متساوی نباشد، به جای سری فوریه تمثیل بالا، یک انتگرال فوریه خواهیم داشت. یعنی:

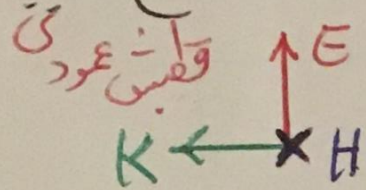
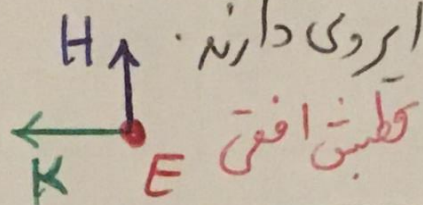
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d\omega$$

$\vec{E}(\vec{r}, t)$ انتگرال فوریه $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ و $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ نیز تبدیل فوریه $\vec{E}(\vec{r}, t)$ است.

چون $(\vec{k}, \omega)$ به $\hat{E}$ به $\vec{k}$ ، ω گنگی دارد پس به گنگی n (ضریب شکست محیط) به $\vec{k}$ ، ω نزدیک
 تقریفاً گرفته شود. یعنی $n = n(\vec{k}, \omega)$ به این رابطه، رابطه یابنده می گوئیم. اگر گنگی n به ω و
 $\vec{k}$ به صورت $k = \frac{n\omega}{c}$ باشد، در این صورت محیط یابنده است. در غیر این صورت
 برای $n = n(\vec{k}, \omega)$ محیط یابنده (dispersive) خواهد بود.

قطبش امواج الکترومغناطیسی:
 (Polarization of electromagnetic waves)

یک موج الکترومغناطیسی تحت (عرضی) هنگامی تحریف نشده و معین است که $\vec{E}$ مشخص نشود. یعنی $\vec{E}$ و $\vec{H}$
 عمود بر زمین است یا به موازات زمین است یا مثلاً در یک صفحه عمودی قرار دارند و گاهی به
 موازات زمین و گاهی عمود بر آن است و گاهی نه عمود و نه به موازات آن است. به این موارد به ترتیب
 قطبش خطی (عمودی یا افقی) و یا قطبش دایروی می گوئیم. امواج AM رادیو قطبش عمودی و امواج تلوزیون
 قطبش افقی دارند. امواج FM رادیو، قطبش دایروی دارند.

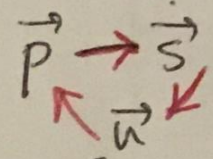


$$\vec{k} = k \vec{u}$$

(بردار یکم است، جرم)

سطح زمین

کمیت‌های $\vec{P}$ ، $\vec{S}$ ، $\vec{u}$ را به عنوان مجموعه راکتوری از بردارهای یک متعامد حقیقی در فضای گریز $\vec{u}$ بردار یک بردار است. موج است و بردارهای یک $\vec{P}$ ، $\vec{S}$ نیز صفحه‌ای را تعریف می‌کنند که بر راستی است. یعنی $\vec{u}$ عمود است. $\vec{P}$ ، $\vec{S}$ ، $\vec{u}$ سه بردار یک متعامد را تشکیل دهند.



چون موج تحت (عرض) داریم، پس میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در صفحه‌ای عمود بر راستی است. (صفحه $P-S$) قرار دارند. بنابراین می‌توان نوشت: $\vec{E} = \vec{E}_P \cdot \vec{P} + \vec{E}_S \cdot \vec{S}$. در محاسبات فعلی، اختلاف فاز بین حلقه‌های $\vec{P}$ و $\vec{S}$ میدان

بخش حلقه‌های $\vec{E}_P$ ، $\vec{E}_S$ برای ما اهمیت دارد. بنابراین فاز $\vec{E}_S$ را عنوان فاز $\vec{E}_P$ را ϕ و $\vec{u}$ می‌گیریم. داریم:

$$\hat{E}_S = E_S \cdot e^{i\phi_S} \Rightarrow \hat{E}_S = E_S \quad (\phi_S = 0)$$

$$\hat{E}_P = E_P \cdot e^{i\phi_P} \Rightarrow \hat{E}_P = E_P \cdot e^{i\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_P \cdot e^{i\phi} \cdot \vec{P} + E_S \cdot \vec{S}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} \cdot e^{-i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} = E_P \cdot e^{-i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} - \phi)} \vec{P} + E_S \cdot e^{-i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} \vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}, t)] \Rightarrow$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_P \cdot \cos(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} - \phi) \vec{P} + E_S \cdot \cos(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r}) \vec{S}$$

الکترومغناطیس ۲

قطبش امواج الکترومغناطیسی (ادامه) - امواج تخت در محیط‌های رسانه

اگر $\phi = 0$ باشد، قطبش خطی خواهیم داشت و داریم $(\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t)$:

$$\left. \begin{aligned} P &= E_p \cos \omega t \\ S &= E_s \cos \omega t \end{aligned} \right\} \xrightarrow[t]{\text{حذف}} \frac{P}{S} = \frac{E_p}{E_s} \Rightarrow S = \frac{E_s}{E_p} P$$

در صفحه $P-S$ نده یک خط است. یعنی انرژی بر دار، $\vec{E}$ بر روی خط قرار دارد.

اگر $\phi = \pi$ باشد نیز قطبش خطی داریم :

$$\phi = \pi \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} P &= -E_p \cos \omega t \\ S &= E_s \cos \omega t \end{aligned} \right. \xrightarrow[t]{\text{حذف}} S = -\frac{E_s}{E_p} P$$

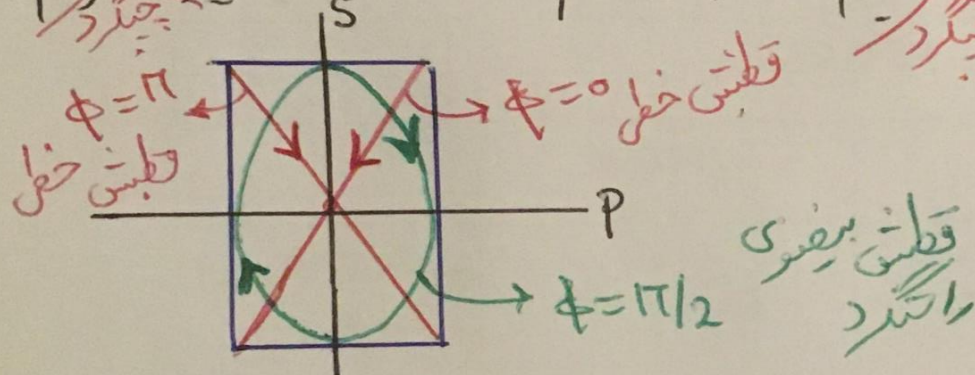
اگر $\phi = \pi/2$ باشد نیز قطبش دایروی داریم زیرا :

$$\phi = \pi/2 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} P &= E_p \sin \omega t \\ S &= E_s \cos \omega t \end{aligned} \right. \xrightarrow[t]{\text{حذف}} \frac{P^2}{E_p^2} + \frac{S^2}{E_s^2} = 1$$

قطبش بیضوی **راستگرد** ($E_p = E_s$)

قطبش دایروی **راستگرد** $\phi = \pi/2, E_p = E_s \Rightarrow P^2 + S^2 = E_p^2$

اگر $\phi = -\pi/2$ باشد نیز قطبش بیضوی داریم و اگر $E_p = E_s$ باشد، قطبش دایروی خواهیم داشت **چپگرد**.



اگر برای $\phi = \pi/2$ داشته باشیم $E_p = E_s$ ،
در این صورت قطبش دایروی و
راستگرد را داریم.

برای موج AM رادیو از قطبش افقی استفاده نمی شود. زیرا فرکانس در موج AM نسبتاً پایین است (حدود 1MHz) و در این فرکانس زمین هنوز یک رسانای خوب است. بنابراین اگر از قطبش افقی استفاده نشود، میدان الکتریکی به موازات زمین خواهد بود و چون زمین در این فرکانس هنوز رسانای خوبی است پس تصور مولفه میدان الکتریکی روی زمین، یک بردار صحیح خواهد بود که آن هم به موازات زمین است و در خلاف جهت صحیح اصلی قرار دارد. این امر منجر به ضعیف شدن کل صحیح در زمین خواهد شد. ضعیف شدن میدان الکتریکی منجر به سطح زمین باعث می شود که گیرنده (رادیوی AM) نتواند امواج را دریافت کند، بنابراین برای موج AM قطبش عمودی موج استفاده می شود (البته گیرنده آن رادیو برای دریافت امواج AM، عمود بر زمین است).

امواج تلویزیونی دارای قطبش خطی واقعی هستند، یعنی مولفه صحیح موج به موازات زمین است. به همین دلیل است که لوله کبکی مربوط به آنتن تلویزیون افقی هستند. امواج FM رادیو نیز قطبش دایره ای دارند. یعنی مادامی که آنتن رادیوی موج FM در صفحه عمود بر زمین قرار داشته باشد، می تواند امواج FM رادیو را دریافت کند. فرکانس موج AM رادیو در حدود 10^6Hz تا 1MHz است. در حالی که فرکانس موج FM رادیو و امواج تلویزیونی حدود 10^8Hz تا 100MHz است.

می خواهیم نشان دهیم که برای یک موج عرضی که در یک محیط عایق منتشر می شود و برای هر نوع قطبش (قطبش خطی، دایروی و بیضی) همواره نسبت $\vec{E}$ و $\vec{B}$ نیز بزرگتر عمودند.

$$\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E}(0, t) = E_p \cdot \cos(\omega t - \phi) \vec{p} + E_s \cdot \cos \omega t \cdot \vec{s} \quad (1)$$

$$\vec{E}(0, t)_{\text{مختلط}} = E_p \cdot e^{-i(\omega t - \phi)} \vec{p} + E_s \cdot e^{-i\omega t} \vec{s} \Rightarrow \vec{E} = E_p \cdot e^{i\phi} \vec{p} + E_s \cdot \vec{s}$$

$$\vec{B} = \frac{n}{c} \vec{u} \times \vec{E} = \frac{n}{c} \vec{u} \times (E_p \cdot e^{i\phi} \vec{p} + E_s \cdot \vec{s}) = \frac{n}{c} (E_p \cdot e^{i\phi} \vec{s} - E_s \cdot \vec{p})$$

$$\vec{B}(0, t)_{\text{مختلط}} = \frac{n}{c} (E_p \cdot e^{i\phi} \vec{s} - E_s \cdot \vec{p}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \Rightarrow$$

$$\vec{B}(0, t)_{\text{مختلط}} = \frac{n}{c} (E_p \cdot e^{-i(\omega t - \phi)} \vec{s} - E_s \cdot e^{-i\omega t} \vec{p})$$

$$\vec{B}(0, t)_{\text{فیزیکی}} = \frac{n}{c} [E_p \cdot \cos(\omega t - \phi) \vec{s} - E_s \cdot \cos \omega t \cdot \vec{p}] \quad (2)$$

می توان دید که همواره داریم: $\vec{E} \perp \vec{B}$
 البته برای هر $\vec{r}$ (نه الزاماً $\vec{r} = 0$) نیز رابطه بالا برقرار است.

نویس شود که جهت پلاریزاسیون موج الکترومغناطیس، مکان هندسی انتهای بردار $\vec{E}$ تعیین کننده نوع قطبش است. انتهای بردار $\vec{B}$ نیز مسیر را طی می کند که 90° پاد ساعتگرد چیده باشد.

در اینجا می خواهیم چگالی حجمی انرژی موج تخت (معرض) در حال انتشار در یک محیط عایق و بیابری را بیابیم.
 به سبب آن داریم به علاوه بردار پویستینگ $\vec{S}$ را نیز محاسبه خواهیم کرد. برای سادگی $\vec{E} = E \hat{z}$ در نظر می گیریم
 و $\vec{E}(0, t) = E \cos(\omega t - \phi)$ نشان می دهیم

$$(1) \Rightarrow E^2 = E_p^2 \cdot \epsilon_0^2 (\omega t - \phi) + E_s^2 \cdot \epsilon_0^2 \omega t$$

$$(2) \Rightarrow B^2 = \left(\frac{n}{c}\right)^2 [E_p^2 \cdot \epsilon_0^2 (\omega t - \phi) + E_s^2 \cdot \epsilon_0^2 \omega t] = \left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2 \Rightarrow$$

$$B^2 = n^2 \mu_0 \epsilon_0 E^2 = K \mu_0 \epsilon_0 E^2 \Rightarrow B^2 = \mu_0 \epsilon E^2 \Rightarrow \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon E^2 \Rightarrow \vec{B} \cdot \vec{H} = \epsilon E^2$$

$$\text{داریم: } u = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \epsilon E^2) = \epsilon E^2 \quad (3)$$

همانطور که می بینیم نمی توان از انرژی (در داخل حجم) یک موج تخت عرضی در محیط عایق (و بیابری را بیابیم)
 مربوط به مولفه انتشاری موج و نمی دیگر مربوط به مولفه متعامتس موج است.

برای بردار پویستینگ به نتیجه ای به سبب می آید. (از روابط (1) و (2) داریم:)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{n}{c} E^2 \hat{z} \quad (4)$$

$$u = \epsilon E^2 \Rightarrow E^2 = \frac{u}{\epsilon} \quad (5)$$

$$(5) \text{ into } (4) \Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{n}{c} \frac{u}{\epsilon} \hat{z} \Rightarrow \vec{S} = \frac{n}{\mu_0 \epsilon_0 K \cdot c} u \hat{z} \Rightarrow \vec{S} = \frac{c}{n} u \hat{z} \Rightarrow \vec{S} = v_p \cdot u$$

انوجه نشد که این رابطه را می توان مانند رابطه $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ توصیف نمود. $\Rightarrow \vec{S} = \vec{V}_p \cdot u$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{S} = u \cdot \vec{V}_p \rightarrow$$

جغالی بار الکتریکی
جغالی بار الکتریکی
(یا بار نشتی)

جغالی در سطح انرژی
(تبدیل انرژی به تابش)
جغالی
انرژی موج

امواج تحت تکلف در محیط های رسانا (محیط را به رخ با خالص جسم در تقاطع می گیریم) (غیر مغناطیسی)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = g \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{E} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \vec{D} \rightarrow i\vec{K}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

$$\vec{k} \cdot \hat{D} = 0, \quad \vec{k} \cdot \hat{B} = 0, \quad \vec{k} \times \hat{E} = \omega \hat{B}, \quad \vec{k} \times \hat{H} = -\omega \hat{D} - ig \hat{E}$$

$$\vec{k} \cdot \hat{E} = 0, \quad \vec{k} \cdot \hat{B} = 0, \quad \vec{k} \times \hat{E} = \omega \hat{B}, \quad \vec{k} \times \hat{B} = -\mu_0 \omega \epsilon_0 \vec{k} \hat{E} - i\mu_0 g \hat{E}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times \hat{B} = -\omega \vec{k} \mu_0 \epsilon_0 \hat{E} - i\mu_0 g \hat{E} \Rightarrow \vec{k} \times \hat{B} = \frac{\omega}{c^2} (\vec{k} + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega}) \hat{E}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times \hat{B} = \frac{\omega}{c^2} \vec{k} \hat{E}$$

نی بر این برای یک موج تحت تکلف رسانا عمل "تکلف" می بینیم (حوزه فکانش) ضرر
دی الکتریک کمیتی مختلط است می آید - داریم

$$\vec{k} = k_r + i k_i$$

$$k_r = k, \quad k_i = \frac{g}{\epsilon_0 \omega}$$

اگر $\vec{k} \neq 0$ در این صورت $\vec{k} \cdot \hat{E} = 0$ خواهد بود.

اصول تخت مکفام در محیط های رسانا

$$(\hat{K} \neq 0)$$

$$\vec{K} \cdot \hat{E} = 0, \quad \vec{K} \cdot \hat{B} = 0$$

$$\vec{K} \times \hat{E} = \omega \hat{B}, \quad \vec{K} \times \hat{B} = -\frac{\omega}{c^2} \hat{E}$$

که در اینجا داریم: $\hat{n} = \sqrt{\hat{K}}$

$$\hat{K} = K_r + i K_i, \quad K_r = K, \quad K_i = \frac{g}{\epsilon_0 \omega}$$

دیده ایم $\hat{K} = \frac{\hat{n} \omega}{c}$ پس بردار است، مختصات $\hat{n}$ مختصات بیابراین و توان نزدیک

$$\hat{n} = \sqrt{\hat{K}} \Rightarrow \hat{n}^2 = \hat{K} \Rightarrow (n + i k)^2 = K_r + i K_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2 - k^2 = K_r \\ 2nk = K_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \sqrt{\frac{1}{2} [K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]} \\ k = \sqrt{\frac{1}{2} [-K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]} \end{cases}$$

از رابطه $n^2 - k^2 = K_r$ و توان دید که $K_r = K$ و توانه متن نیز باشد ولی از $K_i = \frac{g}{\epsilon_0 \omega}$ نتیجه می شود که $K_i > 0$ متعهد می شود که n, k بزرگتر از K, g, ω دارند یعنی:

$$n = n(K, g, \omega), \quad k = k(K, g, \omega)$$

یعنی برای یک محیط رسانا، بخش [۱] حقیقی و بخش [۲] ضریب شکست مختلط، برای n, k, ω, K, g هستند. بنابراین چنین محیطی یک محیط پراکنده است. (dispersive)

الکتر ومغناطیس ۲

انتشار امواج الکتر ومغناطیسی - قطبش موج

در اینجا علامت $\vec{E}(\vec{r}, t)$ را در یک محیط رسانا به سمت $\vec{r}$ داریم، داریم:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - (\vec{k}_2 + i\vec{k}_1) \cdot \vec{r})} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} e^{-\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}$$

یعنی یک موج تحت تضعیف شونده داریم با طول موج $\lambda = \frac{2\pi}{k_2}$ و دامنه موج در جهت $\vec{k}_1$ که تضعیف می شود. موج فاز ثابت نیز صفت آن هسته عمود بر جهت انتشار $\vec{k}_2$. در حالت کلی می توان $\vec{k}_2$ و $\vec{k}_1$ را به سمت $\vec{r}$ از رابطه زیر:

$$\hat{k} = \frac{\hat{n}\omega}{c} \Rightarrow \sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k}} = \frac{\hat{n}\omega}{c} \Rightarrow \sqrt{(\vec{k}_2 + i\vec{k}_1) \cdot (\vec{k}_2 + i\vec{k}_1)} = \frac{\omega}{c} (n + i k)$$

$$\Rightarrow \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + 2i\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_1} = \frac{\omega}{c} (n + i k)$$

با بسیاری موارد $\vec{k}_1$ و $\vec{k}_2$ هم در یک خط و هم در یک صفحه می توانیم در رابطه مستقیم با هم نوشت. شکل کلی این رابطه نسبت به $\vec{r}$ و $\vec{r}$ را می نویسیم. فقط می گوئیم که در حالت کلی داریم $k_1 = k_1(n, k)$ و $k_2 = k_2(n, k)$

و چون n, k نیز بستگی به $\vec{k}$ دارد، پس در حالت کلی می توان k_2 و k_1 را نیز به صورت تابعی از $\vec{k}$ نوشت. برای حالت خاص البته رابطه ساده تری و بدین جهت داریم. حالت خاص این است که در آن موج تابشی به طور عمود بر یک سطح رسانا برخورد کند. در این صورت $\vec{k}_2$ و $\vec{k}_1$ به صورت زیر خواهند بود.

$$\vec{k}_2 = k_2 \vec{u}, \quad \vec{k}_1 = k_1 \vec{u}, \quad \hat{k} = \vec{k}_2 + i\vec{k}_1 = (k_2 + i k_1) \vec{u} = \hat{k} \cdot \vec{u}$$

$$\text{داریم: } \hat{k} = \frac{\hat{n}\omega}{c} \Rightarrow k_2 + i k_1 = \frac{\omega}{c} (n + i k) \Rightarrow k_2 = \frac{n\omega}{c}, \quad k_1 = \frac{k\omega}{c}$$

$$\vec{K}_r = K_r \cdot \vec{u} = \frac{n\omega}{c} \vec{u}, \quad \vec{K}_i = K_i \cdot \vec{u} = \frac{k\omega}{c} \vec{u}$$

که در آن $\vec{r} = \vec{u} \cdot \vec{r}$ است. $E(\vec{r}, t) = E_0 \cdot e^{\frac{-k\omega}{c} \vec{r} - i(\omega t - \frac{n\omega}{c} \vec{r})}$

$1 - k\omega \delta / c = 1 \Rightarrow \delta = \frac{c}{k\omega}$

$$\frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{n\omega}, \quad \delta = \frac{c}{k\omega} \Rightarrow \delta = \frac{n \cdot \lambda}{2\pi \cdot k}$$

بنابراین برای یک محیط با رسانندگی ضعیف داریم $k \gg n$ و عمده "تضعیف موج ناچیز است" (محیط تلفات) را که در محیط با رسانندگی خوب داریم $k \ll n$ و موج درین صدد یک طول جبرج تضعیف می نمود.

برای محیط های نارسانا و عیبدانی ساکن داریم $K_r = K \gg 1$

برای میدانهای متناوب در فزلات داریم: متنی یا هترو یا $K_r = K \ll 1$

$$n \approx k \approx \sqrt{\frac{K_i}{2}} = \sqrt{\frac{g}{2\epsilon_0 \omega}}$$

فزلات در کاسن ای میگردید و باین کراز آن داریم $K_i \gg 1$ $K_r \ll 1$

$$\delta = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega}{g}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega g}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 g}} \ll \delta = \frac{c}{k\omega}$$

برای فزلات اگر $\omega \rightarrow 0$ نگاه ده $\delta \rightarrow 0$ و برای مثلاً فزه در کاسن $f = 10^{10}$ Hz داریم $g = 3 \times 10^7 \frac{S}{m}$, $\delta = 0.92 \mu m$

$$n \approx \sqrt{K_r} = \sqrt{K}, \quad k \approx 0 \ll K_i \ll 1$$

برای کاسن نور مرئی داریم $f \approx 10^{14}$ Hz

برای محیط عیانی در کاسن ای بالا (که جذب کشته می نمونه) یا برای یک نیمه رسانا داریم:

$$|K_r| \approx K_i \Rightarrow n \approx \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) K_r} = 1.1 \sqrt{K_r}$$

$$k \approx \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2}) K_r} \approx 0.455 \sqrt{K_r}$$

$$\delta = \frac{n \cdot \lambda}{2\pi k} = \frac{1.1 \sqrt{K_r} \cdot \lambda}{2\pi \times 0.455 \sqrt{K_r}} \Rightarrow \delta = 0.384 \lambda$$

و داریم:

مثله: اگر یک درج عرض، قطبش دایره‌ای را کند در یک موج،
 در برابرش وجود یک موج (دائره‌ای) هم برابرند.

$$\hat{E} = E_p \cdot e^{i\phi} \cdot \vec{p} + E_s \cdot \vec{s} \Rightarrow \hat{E}_1 = E_p \cdot e^{i\pi/2} \cdot \vec{p} + E_s \cdot \vec{s} \Rightarrow$$

$$E_p = E_s = E_0 \Rightarrow \hat{E}_1 = E_0 \cdot e^{i\pi/2} \cdot \vec{p} + E_0 \cdot \vec{s} \Rightarrow$$

$$|\hat{E}_1(\vec{r}, t)| = \hat{E}_1 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \Rightarrow \hat{E}_1(\vec{r}, t) = (E_0 \cdot e^{i\pi/2} \cdot \vec{p} + E_0 \cdot \vec{s})^* \times e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\Rightarrow |\hat{E}_1(0, t)|_{\text{physical}} = E_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \vec{p} + E_0 \cos(\omega t) \vec{s} \Rightarrow |\hat{E}_1(0, t)|_{\text{physical}} = E_0 \sin \omega t \vec{p} + E_0 \cos \omega t \vec{s}$$

$$\Rightarrow |\hat{E}_1(0, t)|_{\text{physical}} = E_0 \sin \omega t \vec{p} + E_0 \cos \omega t \vec{s} \quad \text{اگر د.}$$

$$|\hat{E}_2(0, t)|_{\text{physical}} = -E_0 \sin \omega t \vec{p} + E_0 \cos \omega t \vec{s} \quad \text{میکرد}$$

$$|\hat{E}_1(0, t)|_{\text{physical}} + |\hat{E}_2(0, t)|_{\text{physical}} = 2E_0 \cos \omega t \vec{s}$$

مسئله: برای یک موج الکتریکی تحت آنکه $\vec{K} \neq 0$ (موج عرضی) داریم $\vec{u} \cdot \hat{E} = \vec{u} \cdot \hat{B} = 0$ و $\vec{u}$ و $\vec{E}$ ، $\vec{B}$ حقیقتاً الزاماً بر یکدیگر عمود نباشند بلکه برابر و عمود بر یکدیگر نیستند و در حقیقت موازی می‌شوند

$$\vec{E} = E_p \cdot e^{i\phi} \vec{p} + E_s \cdot \vec{s} \Rightarrow \vec{E}(0, t) |_{\text{physical}} = E_p \cdot \cos(\omega t - \phi) \vec{p} + E_s \cdot \cos \omega t \cdot \vec{s}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = \frac{|\hat{n}|}{c} \cdot e^{i\phi_n} \cdot \vec{u} \times (E_p \cdot e^{i\phi} \vec{p} + E_s \cdot \vec{s}) \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{|\hat{n}|}{c} [-E_s \cdot e^{i\phi_n} \cdot \vec{p} + E_p \cdot e^{i(\phi + \phi_n)} \cdot \vec{s}]$$

$$\Rightarrow \vec{B}(0, t) |_{\text{physical}} = \frac{|\hat{n}|}{c} [-E_s \cdot \cos(\omega t - \phi_n) \vec{p} + E_p \cdot \cos(\omega t - \phi - \phi_n) \vec{s}]$$

$$\vec{B} \cdot \vec{E} = \frac{|\hat{n}|}{c} [-E_s \cdot E_p \cdot \cos(\omega t - \phi) \cdot \cos(\omega t - \phi_n) + E_p \cdot E_s \cdot \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \phi - \phi_n)]$$

میانگین بردار
 $\phi_n = 0$ یا $\phi_n \neq 0$ و $\phi = 0$ یا $\phi = \pi$

عبارة فوق برابر حالتی که در بالا ذکر کردیم:

یعنی اگر یک موج تحت $\vec{E}$ از یک محیط به طور عمودی به یک سطح رسان برضد کند، موج در آن رسان $\vec{E}$ دارد (موتلف) و رسان دیگر $\vec{B}$ عمود بر یکدیگر خواهد بود و اگر در حالتی که موج دارای قطبش خطی باشد.

اگر $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ هم جهت باشند (مانند حالتی که موج از یک محیط به طور عمودی بر یک مرز تحت وارد محیط رسان نشود)، اگر یک بردار یک $\vec{E}$ مختلف خواهد بود. در اینجا لازم نیست میدانهای حقیقی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ بر $\vec{E}_1$ یا $\vec{E}_2$ عمود باشند. هر چند که باز هم موج عرضی است چون اگر $\vec{E} \neq 0$ است.

در این حالت باز هم طول موج و تغییر در تعداد n و k یکی خواهند داشت متغیر $\vec{E}$ و $\vec{B}$ به یکدیگر عمود است.

$$\sqrt{\hat{R} \cdot \hat{K}} = \frac{\hat{v}_w}{c} \Rightarrow \sqrt{K_2^2 - K_1^2 - 2i K_2 \cdot K_1} = \frac{\hat{v}_w}{c} \Rightarrow$$

$$\hat{K} = K_2 + i K_1 \Rightarrow \hat{K} = K + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega} \Rightarrow$$

$$\epsilon_0 \hat{K} = \epsilon_0 K + i \frac{g}{\omega} \Rightarrow \hat{\epsilon} = \epsilon + i \frac{g}{\omega} \Rightarrow \hat{\epsilon} = \epsilon' + i \epsilon''$$

در اینجا $\epsilon' = \epsilon = \epsilon_0 K$ و $\epsilon'' = \frac{g}{\omega}$ است.

و اما $\mu = \mu' + \mu''$ در تواریت ول در حقیقت (μ) به درجه بزرگی از μ' تغییر است
و معمولا از μ'' صرف نظر کرد.

$$\hat{K} = \frac{\hat{v} \omega}{c} \Rightarrow \hat{K} = \sqrt{\hat{K}} \cdot \frac{\omega}{c} \Rightarrow$$

$$\hat{K} = \sqrt{\mu \epsilon_0} \cdot \sqrt{\hat{K}} \cdot \omega \Rightarrow \hat{K} = \omega \sqrt{\mu \epsilon_0} \quad (\epsilon = \epsilon_0 \hat{K})$$

برای $f = 1 \text{ KHz}$ داریم: $\hat{K} = 10$ و $g = 10^{-2} \text{ S/m}$ (برای زمین مضطرب) پس:

$$\frac{g}{\epsilon_0 \omega} = \frac{10^{-2}}{\frac{10^{-9}}{36\pi} \times 2\pi \times 1000} = \frac{10^4}{1/18} = 18 \times 10^4 \gg 1$$

مضطرب
پس زمین را نمی توان
به عنوان ماضی مضرب است.

ول در وگشی $f = 10^{10} \text{ Hz}$ و $g = 10^{-3} \text{ S/m}$:

$$\frac{g}{\epsilon_0 \omega} = \frac{10^{-3}}{\frac{10^{-9}}{36\pi} \times 2\pi \times 10^{10}} = 1.8 \times 10^{-3} \ll 1$$

زمین مضطرب در وگشی
 10^{10} Hz مانند یک عایق عمل می کند.

الکتر و مغناطیس ۲

ضرایب انعکاس و انتقال فرنل

مسئله: برای یک دی الکتریک کم انداف (یک عایق خوب ولی غیر کامل) درای یک رسانای خوب

K_r و K_i و ν_p را به دست آورده (توجه کنید که K_r و K_i اشیاء نشود)،
 (در تقارن به گونه که خروج الکتریک طبعی به طور عمودی از یک عمود به عمود وارد نشود).

برای یک دی الکتریک کم انداف داریم:

$$\hat{K} = \frac{\hat{n} \omega}{c} \Rightarrow \hat{K} = K_r + i K_i = \sqrt{\hat{K}} \cdot \frac{\omega}{c} \Rightarrow$$

$K_r + i K_i = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \omega \sqrt{K + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega}}$

↓ فقط دی الکتریک کم انداف
 (1) $\left(\frac{g}{\epsilon_0 \omega} \ll K \Rightarrow \frac{g}{\epsilon_0 \omega K} \right)$

$$\Rightarrow \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 K} \left(1 + \frac{i g}{\epsilon_0 K \omega} \right)^{1/2} \approx \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 K} \left[1 + i \frac{g}{2 \epsilon_0 K \omega} + \frac{g^2}{8 (\epsilon_0 K \omega)^2} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{K_r \approx \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 K} \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{g^2}{(\epsilon_0 K \omega)^2} \right)} \quad , \quad \boxed{K_i \approx \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 K}}{2 \epsilon_0 K} \cdot g}$$

یعنی برای یک دی الکتریک کم انداف، K_i کمتری است به طور مستقیم گویی به ω ندارد. 120π

$$K_i \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} g \Rightarrow K_i \approx \frac{60\pi}{\sqrt{K}} g$$

$$\nu_p = \frac{\omega}{K_r} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 K}} \left(1 - \frac{g^2}{8 (\epsilon_0 K \omega)^2} \right)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \hat{K}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 (K + i g / \epsilon_0 \omega)}} \approx \frac{120\pi}{\sqrt{K}} \left(1 - i \frac{g}{2 \epsilon_0 K \omega}\right)$$

یعنی میدانهای الکتریکی $\vec{E}$ و مغناطیسی $\vec{H}$ (و همین طور $\vec{B}$ برای محیطی غیر خنثی) با یکدیگر بر از تقارن است
هم فاز نیستند. برای یک رسانای خوب نیز داریم:

$$\frac{g}{\epsilon_0 \omega} \gg K \Rightarrow \frac{g}{\epsilon_0 \omega K} \gg 1$$

$$\hat{K} = K_r + i K_i = \frac{\hat{n} \omega}{c} = \sqrt{\hat{K}} \cdot \frac{\omega}{c} \Rightarrow \hat{K} = K_r + i K_i = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \left(K + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow K_r + i K_i \approx \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \left(i \frac{g}{\epsilon_0 \omega}\right)^{1/2} \Rightarrow K_r + i K_i \approx \sqrt{\frac{\mu_0 \omega g}{2}} (1 + i)$$

$$\Rightarrow K_r = K_i \approx \sqrt{\mu_0 \omega g / 2} = \sqrt{\pi f \mu_0 g}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \hat{K}}} = 120\pi \left(K + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega}\right)^{-1/2} \approx 120\pi \left(i \frac{g}{\epsilon_0 \omega}\right)^{-1/2} \Rightarrow$$

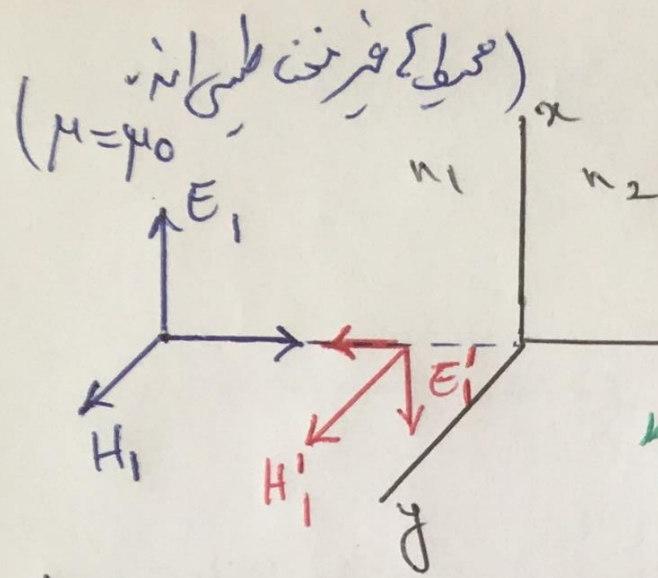
$$\eta = 120\pi \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \eta = 120\pi \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{2g}} (1 - i)$$

یعنی سرعت فاز در یک رسانای خوب با $\sqrt{f}$ و $\frac{1}{\sqrt{g}}$ متناسب است.

$$v_p = \frac{\omega}{K_r} \approx \sqrt{2\omega / \mu_0 g}$$

مسئله: توان تابشی که زمین از نور خورشید دریافت می کند تقریباً برابر با ۱۳۰۰ وات بر مترمربع است. با فرض آن که این توان به صورت یک موج تکفام و با زاویه عمودی به زمین گسیل می شود، اندازه بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی مربوط به امواج الکترومغناطیسی خورشید را محاسبه کنید.

التماس و شکست در مرز دو محیط ناهمسان (فرد عمودی)
 موج فردی را با قطبش خطی در جهت $+x$ در نظر بگیریم.



داریم:

$$\vec{E}_1 = E_{1x} e^{-i(\omega t - K_1 z)} \hat{a}_x$$

$$\vec{E}_1' = -E_{1x}' e^{-i(\omega t + K_1 z)} \hat{a}_x$$

$$\vec{E}_2 = E_{2x} e^{-i(\omega t - K_2 z)} \hat{a}_x$$

$$K_1 = \frac{n_1 \omega}{c}, K_2 = \frac{n_2 \omega}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{n}{c} \vec{u} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{n_1}{c} e^{-i(\omega t - K_1 z)} \hat{a}_y \cdot E_{1x}$$

$$\vec{B}_1' = \frac{n_1}{c} E_{1x}' e^{-i(\omega t + K_1 z)} \hat{a}_y, \quad \vec{B}_2 = \frac{n_2}{c} E_{2x} e^{-i(\omega t - K_2 z)} \hat{a}_y$$

در مرز دو محیط $(z=0)$ داریم: $E_{1x} = E_{2x} + E_{1x}'$ (1) یعنی $E_{1t} = E_{2t} + E_{1t}'$ چون رساننده غیر چگال است
 (ابر رساننده داریم) پس مولفه مماس H نیز در مرز دو محیط $z=0$ پیوسته است یعنی $H_{1t} = H_{2t}$

$$\Rightarrow n_1 (E_{1x} + E_{1x}') = n_2 E_{2x} \quad (2)$$

$$(1) \ \& \ (2) \Rightarrow E_{1x}' = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}, \quad E_{2x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}$$

$$r_{12} = \frac{E_{1n}}{E_{1n}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \quad t_{12} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

در r_{12} و t_{12} ترتیب فریب انکسار و انتقال برای فرودمودی می باشد.
 قابل ذکر است که کمیت r ی قابل اندازه گیری، میانگین زمانی شار r ی انرژی انکساری و انتقالی در واقع سطح
 بردار پویستینگ $\vec{H}$ است.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \Rightarrow S = \frac{n}{\mu_0 c} E^2 \Rightarrow \bar{S} = \frac{n}{\mu_0 c} \overline{E^2}$$

(توجه کنید که $\vec{H}$ کمیت r ی فریبی هست)

$$\Rightarrow \bar{S}_1 = \frac{n_1}{\mu_0 c} E_{1n}^2, \quad \bar{S}_1 = \frac{n_1}{\mu_0 c} E_{1n}^2, \quad \bar{S}_2 = \frac{n_2}{\mu_0 c} E_{2n}^2$$

$$R_n = \frac{\bar{S}_1}{\bar{S}_2} = \frac{E_{1n}^2}{E_{2n}^2} = r_{12}^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

$$T_n = \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_1} = \frac{n_2 E_{2n}^2}{n_1 E_{1n}^2} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

این روابط در مرز درج اولی
برقرارند.

تایم: $R_n + T_n = 1$ و البته منطبق است (اصل بقای انرژی در فصل مشترک)

مثال: $n_1 = 1$ (هوا) , $n_2 = \frac{3}{2}$ (شیشه) $\Rightarrow R_n = 0.04$, $T_n = 0.96$
 یعنی نور مرئی هنگام فرودمودی از هوا به شیشه، به میزان 4% توان آن منعکس و 96% آن منتقل می شود.

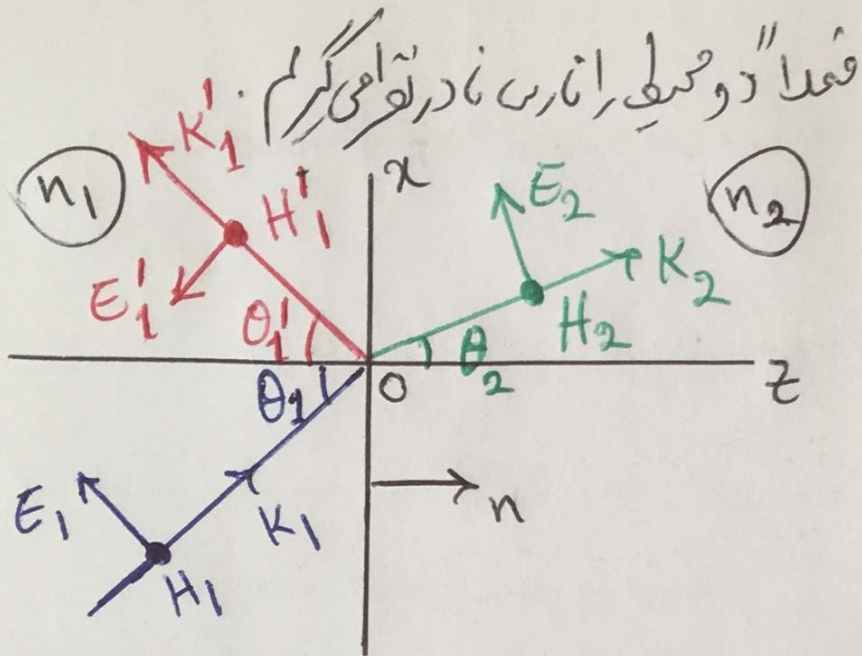
می توان نشان داد که برای موج فرودی، با قطبش بیضی، نیز روابط به دست آمده برقرارند. بعضی داریم:

$$R_n = r_{12}^2 \quad , \quad T_n = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2$$

انعکاس و انتقال در مرز دو محیط (فرودهای):

امواج تحت (عرضی) فرودی، انعکاس و انتقالی را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_1 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} \\ \vec{E}'_1 &= \vec{E}'_1 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{r})} \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_2 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \end{aligned}$$



صغیر $\epsilon = 0$ (یا $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$) فصل مشترک دو محیط است که در آن داریم $\vec{n} = \hat{a}_z$. طبق تعریف، صفحه ای که شامل دو بردار $\vec{k}_1$ و $\vec{k}_2$ است (در این جا صفحه $\epsilon = 0$) صفحه فرود (Incidence plane) نامیده می شود. توجه شود که $\vec{E} \times \vec{n}$ بردار $\vec{n}$ عمود است؛ بنابراین در فصل مشترک دو محیط قرار دارد. بنا بر این مولفه مماس میدان الکتریکی در مرز را به صورت $\vec{E} \times \vec{n}$ می نویسیم. ترکیب $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \vec{E}'_1$ در مرز $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ می دهد؛

الکترومغناطیس ۲

ضرایب انعکاس و انتقال فرنل برای فرود مایل

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 + \vec{n} \times \vec{E}_1' = \vec{n} \times \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{n} \times [\hat{E}_1 e^{-i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + \hat{E}_1' e^{-i(\omega t - \vec{k}_1' \cdot \vec{r})}]$$

$$= \vec{n} \times \hat{E}_2 e^{-i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \quad (\vec{n} \cdot \vec{r} = 0, \text{ در } r)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \times (\hat{E}_1 + \hat{E}_1') = \vec{n} \times \hat{E}_2 \\ \vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_1' \cdot \vec{r} = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} \end{array} \right. \quad (\vec{n} \cdot \vec{r} = 0) \quad (1) \quad \text{از رابطه بالا نتیجه می شود:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_1' \cdot \vec{r} = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} \end{array} \right. \quad (\vec{n} \cdot \vec{r} = 0) \quad (2)$$

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r}) = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \quad (\vec{n} \cdot \vec{r} = 0)$$

$$\Rightarrow \vec{r} = -\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r}) \quad (\vec{n} \cdot \vec{r} = 0) \quad (3) \quad \text{از طرفی دیگر می توان نوشت:} \quad (\text{در } r)$$

$$(3) \text{ into } (2) \Rightarrow \vec{k}_1 \cdot [-\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})] = \vec{k}_1' \cdot [-\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})] = \vec{k}_2 \cdot [-\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})]$$

$$\text{داریم:} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(\vec{n} \times \vec{r}) \cdot (\vec{k}_1 \times \vec{n}) = (\vec{n} \times \vec{r}) \cdot (\vec{k}_1' \times \vec{n}) = (\vec{n} \times \vec{r}) \cdot (\vec{k}_2 \times \vec{n}) \quad (\text{در } r)$$

$$\vec{k}_1 \times \vec{n} = \vec{k}_1' \times \vec{n} = \vec{k}_2 \times \vec{n} \quad (4) \quad \text{رابطه بالا برای هر دو بردار است پس باید داشته باشیم:} \quad (\text{در } r)$$

$\vec{k}_1 \times \vec{n}$ برداری است عمود بر $\vec{n}$ و $\vec{k}_1$ (عمود بر صفحه فرودی). بنابراین $\vec{k}_1' \times \vec{n}$ نیز برداری است عمود بر صفحه فرودی و چون $\vec{n}$ در صفحه فرود قرار دارد پس $\vec{k}_1'$ نیز در صفحه فرود قرار دارد. به همین ترتیب $\vec{k}_2$ نیز در صفحه فرود واقع است. یعنی $\vec{k}_1$ و $\vec{k}_1'$ و $\vec{k}_2$ سه بردار هم صفحه‌اند.

بزرگی رابطه (4) نتیجه می دهد:

$$(K_1 = K_1' = \frac{n_1 \omega}{c}, K_2 = \frac{n_2 \omega}{c})$$

$$K_1 \cdot 2 \cdot \theta_1 = K_1' \cdot 2 \cdot (\pi - \theta_1') = K_2 \cdot 2 \cdot \theta_2 \Rightarrow$$

$$n_1 \cdot 2 \cdot \theta_1 = n_1 \cdot 2 \cdot \theta_1' = n_2 \cdot 2 \cdot \theta_2$$

$$\Rightarrow \theta_1' = \theta_1 \quad \text{از دیدی فرودی و انحنای هم برابرند} \quad (5)$$

$$n_1 \cdot 2 \cdot \theta_1 = n_2 \cdot 2 \cdot \theta_2 \quad (\text{قانون انشعاب}) \quad (6)$$

چون جابجایی سطحی نداریم، پس در مرز داریم: $H_{1t} = H_{2t}$ از آنجا که عمق کوی 1 و 2 غیر متفاوت است، پس مولفه مماسی B نیز در مرز نوشته است. بعضی می توان نوشت:

$$(\vec{n} \cdot \vec{B} = 0) \quad \text{از}$$

$$\vec{n} \times \vec{B}_1 + \vec{n} \times \vec{B}_1' = \vec{n} \times \vec{B}_2$$

$$\vec{B}_1 = \hat{B}_1 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{K}_1 \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{B}_1' = \hat{B}_1' \cdot e^{-i(\omega t - \vec{K}_1' \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{B}_2 = \hat{B}_2 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{K}_2 \cdot \vec{r})}$$

توجه کنید که مولفه مماسی B را به صورت $\vec{n} \times \vec{B}$ در مرز نوشته ایم.

$$\Rightarrow \vec{n} \times (\hat{B}_1 + \hat{B}_1') = \vec{n} \times \hat{B}_2$$

(در مرز)

جایگزینی $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_1'$ و $\vec{B}_2$ در (7)

(7) می ده:

$$\Rightarrow \vec{n} \times \left[\frac{n_1}{c} \vec{u}_1 \times \hat{E}_1 + \frac{n_1}{c} \vec{u}_1' \times \hat{E}_1' \right] = \vec{n} \times \left(\frac{n_2}{c} \vec{u}_2 \times \hat{E}_2 \right)$$

(8) $\Rightarrow$

$$n_1 [\vec{u}_1 (\vec{n} \cdot \hat{E}_1) - \hat{E}_1 (\vec{n} \cdot \vec{u}_1) + \vec{u}_1' (\vec{n} \cdot \hat{E}_1') - \hat{E}_1' (\vec{n} \cdot \vec{u}_1')] = n_2 [\vec{u}_2 (\vec{n} \cdot \hat{E}_2) - \hat{E}_2 (\vec{n} \cdot \vec{u}_2)]$$

از حل دو معادله برداری (۱) و (۸) می توان $\hat{E}_1$ و $\hat{E}_2$ را بر حسب $\hat{E}_1$ به دست آورد. البته این محاسبه اصلاً ساده نیست. از این روی می گوییم برای مولفه های $\hat{E}_1$ و $\hat{E}_2$ و $\hat{E}_3$ و $\hat{E}_4$ می آوریم. برای می گوییم $\hat{E}_1$ و $\hat{E}_2$ می دانیم که میدان الکتریکی بر صفحه عمود است. یعنی داریم:

$$\vec{n} \cdot \hat{E}_1 = \vec{n} \cdot \hat{E}_2 = \vec{n} \cdot \hat{E}_3 = 0$$

را به (۸) برای $\hat{E}_1$ و $\hat{E}_2$ (مولفه $\hat{E}_1$ و $\hat{E}_2$) به صورت زیر خواهد بود:

$$n_1 [-\hat{E}_1 \cos \theta_1 - \hat{E}_1' \cos(\pi - \theta_1')] = n_2 (-\hat{E}_2 \cos \theta_2) \Rightarrow$$

$$n_1 \cos \theta_1 (-\hat{E}_1 + \hat{E}_1') = -n_2 \hat{E}_2 \cos \theta_2 \quad (9) \quad (\text{در زیر})$$

معادله (۱) را از طرف چپ در $\vec{n}$ ضرب خارجی می کنیم و آن را برای مولفه $\hat{E}_1$ و $\hat{E}_2$ می نویسیم. داریم:

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \hat{E}_1) + \vec{n} \times (\vec{n} \times \hat{E}_1') = \vec{n} \times (\vec{n} \times \hat{E}_2) \quad (\text{در زیر})$$

$$\Rightarrow \vec{n} (\underbrace{\vec{n} \cdot \hat{E}_1}_{\text{صفر}}) - \hat{E}_1 + \vec{n} (\underbrace{\vec{n} \cdot \hat{E}_1'}_{\text{صفر}}) - \hat{E}_1' = \vec{n} (\underbrace{\vec{n} \cdot \hat{E}_2}_{\text{صفر}}) - \hat{E}_2 \Rightarrow$$

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_1' = \hat{E}_2 \quad (10)$$

از حل دو معادله (۹) و (۱۰) به دست می آید:

$$\begin{cases} \vec{E}'_{1s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \vec{E}_{1s} \\ \vec{E}'_{2s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \vec{E}_{1s} \end{cases} \xrightarrow{\text{مقایسه بر روی بردار}} \begin{cases} \vec{E}'_{1s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \vec{E}_{1s} \\ \vec{E}_{2s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \vec{E}_{1s} \end{cases}$$

تعریف کردن ضرایب فرس برای فرو دما و برای قطبش می توان نوشت:

$$r_{12s} = \frac{\vec{E}'_{1s}}{\vec{E}_{1s}} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (11) \quad , \quad t_{12s} = \frac{E_{2s}}{\vec{E}_{1s}} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (12)$$

ضرایب قابل اندازه گیری R_s و T_s هستند یعنی:

$$R_s = \frac{\vec{n} \cdot \langle \vec{S}'_{1s} \rangle}{\vec{n} \cdot \langle \vec{S}_{1s} \rangle} = \frac{n_1 \cos \theta_1 (\vec{E}'_{1s})^2}{n_1 \cos \theta_1 (\vec{E}_{1s})^2} = \frac{\vec{E}'_{1s}}{\vec{E}_{1s}} = r_{12s} \quad (13)$$

$$T_s = \frac{\vec{n} \cdot \langle \vec{S}_{2s} \rangle}{\vec{n} \cdot \langle \vec{S}_{1s} \rangle} = \frac{n_2 \cos \theta_2 (\vec{E}_{2s})^2}{n_1 \cos \theta_1 (\vec{E}_{1s})^2} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12s}^2 \quad (14)$$

لوح شود که در این جا نیز داریم $R_s + T_s = 1$ که البته منطقی است (قانون بقای انرژی در سطح مشترک)

می توان r_{125} و t_{125} ضرایب فرس انتقال و انعکاس برای فرومایل را با در نظر گرفتن قانون استل به شکل زیر نوشت: **(برای قطبش S)**

$$r_{125} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot \theta_1}{n_2 \cdot \theta_2} \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot \theta_1}{n_2 \cdot \theta_2} \cdot \cos \theta_2} \Rightarrow r_{125} = \frac{n_2 (\theta_2 - \theta_1)}{n_2 (\theta_2 + \theta_1)} \quad (15)$$

$$t_{125} = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot \theta_1}{n_2 \cdot \theta_2} \cdot \cos \theta_2} \Rightarrow t_{125} = \frac{2 \cdot n_2 \cdot \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{n_2 (\theta_2 + \theta_1)} \quad (16)$$

حال ضرایب فرس شکست و انتقال را برای قطبش P در فرومایل به دست می آوریم. تئوری مرزی به صورت زیر بود:

$$\int \vec{n} \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_1') = \vec{n} \times \vec{E}_2 \quad (17) \quad (\text{در مرز})$$

$$\int \vec{n} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_1') = \vec{n} \times \vec{B}_2 \quad (18) \quad (\text{در مرز})$$

دانشیم: $\vec{E} = -\frac{c}{n} \vec{u} \times \vec{B}$ ، قرار دادن در (17) داریم:

$$\vec{n} \times \left[\frac{-c}{n_1} \vec{u}_1 \times \vec{B}_1 - \frac{c}{n_1} \vec{u}_1' \times \vec{B}_1' \right] = \vec{n} \times \left(\frac{-c}{n_2} \right) (\vec{u}_2 \times \vec{B}_2) \Rightarrow \quad (19)$$

$$\frac{1}{n_1} [\vec{u}_1 (\vec{n} \cdot \vec{B}_1) - \vec{B}_1 (\vec{n} \cdot \vec{u}_1) + \vec{u}_1' (\vec{n} \cdot \vec{B}_1') - \vec{B}_1' (\vec{n} \cdot \vec{u}_1')] = \frac{1}{n_2} [\vec{u}_2 (\vec{n} \cdot \vec{B}_2) - \vec{B}_2 (\vec{n} \cdot \vec{u}_2)]$$

برای (19) را برای قطبش P می نویسیم. در قطبش P بردار $\vec{E}$ به موازات صفحه فرومایل و $\vec{B}$ عمود بر صفحه فرومایل است.

بنابراین با جایگزینی کردن مولفه S برای $\hat{B}$ (مولفه p برای $\hat{E}$ و در نتیجه قطبش p) خواهیم داشت:

$$\vec{n} \cdot \hat{B}_{1s} = \vec{n} \cdot \hat{B}'_{1s} = \vec{n} \cdot \hat{B}_{2s} = 0$$

رابطه (۱۹) برای مولفه $\hat{B}_s$ به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{1}{n_1} [-\hat{B}_{1s} (\vec{n} \cdot \vec{u}_1) - \hat{B}'_{1s} (\vec{n} \cdot \vec{u}'_1)] = \frac{1}{n_2} [-\hat{B}_{2s} (\vec{n} \cdot \vec{u}_2)] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n_1} [-\hat{B}_{1s} \cos \theta_1 - \hat{B}'_{1s} \cos (\pi - \theta'_1)] = \frac{1}{n_2} [-\hat{B}_{2s} \cos \theta_2] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n_1} (-\hat{B}_{1s} + \hat{B}'_{1s}) \cos \theta_1 = -\frac{1}{n_2} \hat{B}_{2s} \cos \theta_2 \quad (20)$$

با نوشتن رابطه (۱۸) برای مولفه S مربوط به $\hat{B}$ و سپس ضرب خارجی در $\vec{n}$ از طرف چپ خواهیم داشت:

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \hat{B}_{1s}) + \vec{n} \times (\vec{n} \times \hat{B}'_{1s}) = \vec{n} \times (\vec{n} \times \hat{B}_{2s}) \Rightarrow \vec{n} (\vec{n} \cdot \hat{B}_{1s}) - \hat{B}_{1s} +$$

$$+ \vec{n} (\vec{n} \cdot \hat{B}'_{1s}) - \hat{B}'_{1s} = \vec{n} (\vec{n} \cdot \hat{B}_{2s}) - \hat{B}_{2s} \Rightarrow \hat{B}_{1s} + \hat{B}'_{1s} = \hat{B}_{2s} \quad (21)$$

$$(20) \ \& \ (21) \Rightarrow \hat{B}'_{1s} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \hat{B}_{1s}, \quad \hat{B}_{2s} = \frac{2 n_2 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \hat{B}_{1s}$$

الکترومغناطیس ۲

کاربرد ضرایب انعکاس و انتقال فرنیل

با محاسبه بزرگی روابط بالا داریم (22)

$$\hat{B}'_{1s} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \hat{B}_{1s}, \quad \hat{B}'_{2s} = \frac{2n_2 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \hat{B}_{1s}$$

طبق توافق داریم $r_{12p} = \frac{\hat{E}'_{1p}}{\hat{E}_{1p}}$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{B} = \frac{n}{c} \vec{u} \times \vec{E} \Rightarrow \hat{B}_s = \frac{n}{c} \hat{E}_p \Rightarrow \hat{E}_p = \frac{c}{n} \hat{B}_s$$

$$\Rightarrow r_{12p} = \frac{\hat{E}'_{1p}}{\hat{E}_{1p}} = \frac{\frac{c}{n_1} \hat{B}'_{1s}}{\frac{c}{n_1} \hat{B}_{1s}} = \frac{\hat{B}'_{1s}}{\hat{B}_{1s}} \Rightarrow r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (22)$$

$$t_{12p} = \frac{\hat{E}_{2p}}{\hat{E}_{1p}} = \frac{\frac{c}{n_2} \hat{B}_{2s}}{\frac{c}{n_1} \hat{B}_{1s}} \Rightarrow t_{12p} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\hat{B}_{2s}}{\hat{B}_{1s}} \Rightarrow t_{12p} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{2n_2 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$

$$\Rightarrow t_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (23)$$

با قرار دادن $n_2 = \frac{n_1 \sin \theta_1}{\sin \theta_2}$ در روابط (22) و (23) می توان روابط زیر را نوشت:

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (24)$$

$$t_{12p} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (25)$$

به طور خلاصه داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} r_{12S} &= \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{n_2 (\theta_2 - \theta_1)}{n_2 (\theta_2 + \theta_1)} \\ t_{12S} &= \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{2 n_2 \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{n_2 (\theta_2 + \theta_1)} \\ r_{12P} &= \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \\ t_{12P} &= \frac{2 n_2 \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{n_2 (\theta_1 + \theta_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \end{aligned} \right.$$

ضرایب فرس انکس و انتقال (شکست)
برای مولفه S و P
قطبش

برای به دست آوردن ضرایب توانی انکس و انتقال داریم:

$$\begin{aligned} R_P &= \frac{\vec{n} \cdot \langle \hat{S}'_{1P} \rangle}{\vec{n} \cdot \langle \hat{S}_{1P} \rangle} = \frac{n_1 \cos \theta_1 \cdot (\hat{E}'_{1P})^2}{n_1 \cos \theta_1 - (\hat{E}_{1P})^2} = r_{12P}^2 \\ T_P &= \frac{\vec{n} \cdot \langle \hat{S}'_{2P} \rangle}{\vec{n} \cdot \langle \hat{S}_{1P} \rangle} = \frac{n_2 \cos \theta_2 \cdot t_{12P}^2}{n_1 \cos \theta_1} \end{aligned}$$

در اینجا نیز داریم $R_P + T_P = 1$ که ناهری منطقی است (قانون بقای انرژی در فصل مشترک برای مولفه P قطبش).

با توجه به شرایط فعلی می توان حالت های خاصی را در نظر گرفت: به عنوان مثال برای فردی
 خراش ن ($\theta_1 = \pi/2$) داریم $R_s = R_p = 1$. یعنی برای فردی که تقریباً خراش ن ضرب انعکاس بزرگ
 است. برای همین ایند که هنگام طلوع یا غروب خورشید یک دریاچه آرام مانند یک آینه است.
 حالت جانب دیگر هنگامی است که $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ که در این حالت $\rho_{12p} = 0$ و ρ_{12s} دارد
 دارد. در اینجا با استفاده از قانون اسنل خواهیم داشت:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin (\frac{\pi}{2} - \theta_B) \Rightarrow \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

به زاویه فردی که برای آن داریم $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ و در نتیجه $\rho_{12p} = 0$ می شود زاویه بروستر می گوئیم
 و θ_B تانژن می دهیم. (Brewster's angle) به عنوان مثال اگر نور منی از هوا
 به شیشه برخورد کند داریم! $n_1 = 1$ و $n_2 = 1.5$ و خواهیم داشت:

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} = 1.5 \Rightarrow \theta_B \approx 56^\circ$$

زاویه بروستر برای هنگامی که نور خورشید از هوا به آب در یک دریاچه آرام برخورد می کند برابر است!

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} = \frac{4/3}{1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta_B \approx 53^\circ$$

بنابراین زمانی که زاویه فردی نور خورشید به یک دریاچه آرام برابر با 53° باشد، مولفه p قطبش انعکاسی نخواهد داشت ولی مولفه s قطبش انعکاسی

می باشد. بنابراین شدت تانژن انعکاسی کاهش می یابد و در این زمان انسان احساس آرامش می کند.

حالت جانب بعدی هنگامی است که $\theta_2 = \pi/2$. در این صورت سرتی توان به وقوع می‌دهد که $R_s = R_p = 1$. این زاویه را زاویه حد می‌نامیم و آن را با θ_c نمایش می‌دهیم و به آن زاویه بحرانی نیز گفته می‌شود. (Critical angle). اگر $\theta_1 = \theta_c$ باشد داریم:

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

از این رو زاویه حد هنگامی وجود دارد که $n_2 < n_1$ یعنی موج از محیط غلیظ‌تر به محیط رقیق‌تر برخورد کند. بنابراین برای $n_2 < n_1$ داریم: $\sin \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_c$ و چون $\sin$ تابع نزاع است از تابع سینوس، صعودی است، پس همواره $\theta_B < \theta_c$. مثلاً در برخورد نور از شیشه به هوا داریم: $n_1 = 1.5$ و $n_2 = 1$.

$$\Rightarrow \theta_B \approx 34^\circ, \quad \theta_c \approx 42^\circ$$

$$(\theta_1 > \theta_c)$$

اگر زاویه فرودی بیشتر از زاویه حد باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ ($n_2 < n_1$)
از قانون اسنل می‌توان دریافت که:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 > \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_c \Rightarrow$$

$$\sin \theta_2 > \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sin \theta_2 > 1 \quad ?$$

یعنی اگر زاویه فرودی بیشتر از زاویه حد باشد، سینوس زاویه شکست بزرگتر از 1 به دست می‌آید. چرا؟

هنگامی که موج تحت از محیط غلیظ تر به محیط رقیق تر برخورد می کند (افزود می آید) در این صورت اگر زاویه تابش (ازادیه فرودی) از زاویه حبه نشر شود یعنی $\theta_1 > \theta_2$ در این صورت $\theta_1 > \theta_2$ خواهد بود. $(n_2 < n_1)$
 این بدان معناست که موج تحت وارد محیط ۲ نمی شود (از پرا θ_2 حقیقی نیست). از این رو به محیط ۱ بازتابش می کند که به آن بازتابش داخلی (انعکاس داخلی) می گویند.

توجه کنید که برای مطالعه در مورد ضرایب انعکاس و انتقال فریل باید θ_2 یک کمیت مختلف در نظر گرفت، به عبارت دیگر موج به ناصیه ۲ نخواهد رفت. موارد دیگری نیز وجود دارند که در آن θ_2 کمیت مختلف است. به عنوان مثال می توان آنجا که موج تحت از سطح یک رسانا وارد رقیق گرفت.

فرض کنیم یک موج تحت (عرض) از یک ناصیه رسانا به ضریب شکست n_1 به ناصیه رسانا به ضریب شکست n_2 فرود می آید. در این صورت داریم:

(رابطه اسنل)

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

 توجه شود که سمت چپ رابطه، کمیتی حقیقی است و چون در سمت راست این رابطه ضریب شکست n_2 مختلف است پس باید θ_2 نیز مختلف شود تا بتواند این رابطه برقرار شود.

قابل ذکر است که برای به دست آوردن روابط مربوط به ناصیه رسانا، از روابط برداری جبری استفاده کردیم و هیچ صحبتی از توابع حقیقی نشد. بنابراین آن روابط برای کمیتی که مختلط هم برقرارند یعنی می توان n_2 را مختلط نیز در نظر گرفت. به عبارت دیگر، تمام روابط مربوط به ضرایب فریل نیز همانند قبل برقرارند. با این

تفاوت که $\hat{n}_2$ و $\hat{\theta}_2$ (و همین طور $\hat{\theta}_2$) کمیت‌های مختلف هستند، بنابراین می‌توان نوشت:

(به عنوان مثال) $\hat{r}_{12p} = |\hat{r}_{12p}| e^{i\alpha_p}$, $\hat{r}_{12s} = |\hat{r}_{12s}| e^{i\alpha_s}$

$\hat{E}'_{1p} = |\hat{r}_{12p}| e^{i\alpha_p} \cdot \hat{E}_{1p}$, $\hat{E}'_{1s} = |\hat{r}_{12s}| e^{i\alpha_s} \cdot \hat{E}_{1s}$

و البته میدانهای E انعکاس و انتقالی نسبت به میدان E فردی، انتقال فاز خواهند داشت. برای میانه

ضرایب انعکاس و انتقال توان نیز داریم: $R_p = |\hat{r}_{12p}|^2$ و $R_s = |\hat{r}_{12s}|^2$

مسئله: مجموع تحت (عرض) از هوا به طور عمودی بر سطح یک صلب رسانا فردی می‌آید. ضرایب جذب به صورت $A_n = 1 - R_n$ تعریف می‌شود (برای فردی عمودی). آن را به دست آورید.

حل: داریم: $n_1 = 1$ و $\hat{n}_2 = n + ik$. برای فردی عمودی داریم $\theta_1 = 0$ ، از رابطه انشعاب نیز

$\theta_2 = 0$ به دست می‌آید زیرا: $n_1 \cdot \sin \theta_1 = \hat{n}_2 \cdot \sin \theta_2$

می‌سازد برای مولفه $\vec{p}$ قطعی به صورت زیر خواهد بود:

$\hat{r}_{12p} = \frac{\hat{n}_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{\hat{n}_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \Rightarrow \hat{r}_{12p} = \frac{\hat{n}_2 - n_1}{\hat{n}_2 + n_1} = \frac{n + ik - 1}{n + ik + 1} \Rightarrow$

$R_p = |\hat{r}_{12p}|^2 = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}$

الکترومغناطیس ۲

حل مسائلی از ضرایب انعکاس و انتقال فرنل

بر اساسی می توان دید که برای مولفه $\hat{r}_{125}$ به نتیجه مشابهی می رسم. زیرا داریم:

$$\hat{r}_{125} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \hat{n}_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + \hat{n}_2 \cos \theta_2} \Rightarrow \hat{r}_{125} = \frac{1 - (n+ik)}{1 + (n+ik)} \Rightarrow R_s = |\hat{r}_{125}|^2 = \frac{(1-n)^2 + k^2}{(1+n)^2 + k^2}$$

توجه شود که در حالت کلی هنگامی که موج تحت (مرفی) از محیط نارسنا به محیط نارسنا فرد می آید (فرد مایل)، زاویه θ_2 مختلط می شود به عبارت دیگر موج داخل نارسنا منتقل نمی شود. البته چون رسانای کامل وجود ندارد، پس بخشی بسیار کوچکی از توان موج فردی به داخل رسانا انتقال می یابد که آن هم جذب خواهد شد (تلفات اهمی) و بخشی عمده آن منعکس می شود. در زیر می توان این به پدیده را تحلیل نمود.

$$A_n = 1 - R_n = 1 - \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2} = \frac{4n}{(n+1)^2 + k^2}$$

برای رسانای نسبتاً خوب در نارسنا میسر و دو نکته از آن همین طور برای فلزات نارسنا حبه مادن و تر داریم:

$$K_1 \gg K_2 \Rightarrow n \approx k \approx \sqrt{\frac{g}{2\epsilon_0 \omega}} \Rightarrow n \approx k \approx \sqrt{\frac{g}{2\epsilon_0 \omega}}$$

از طرفی دیگر در این محدوده و کانی، داریم $n \approx k \gg 1$. زیرا مثلاً برای $f = 10^{12}$ Hz و $g \approx 10^7$ S/m داریم:

$$A_n \approx \frac{4k}{2k^2} \Rightarrow A_n \approx \frac{2}{k} \Rightarrow A_n = 2 \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega}{g}}$$

(Hagen-Rubens) رابطه هگن-روبر

(معمبر برای رسانای نسبتاً خوب در نارسنا میسر و دو نکته از آن همین طور برای فلزات نارسنا حبه مادن و تر)

به عنوان مثال برای $f = 10^{10}$ Hz و $q = 3 \times 10^{-7}$ S/m داریم، $A_n \approx 3.9 \times 10^{-4}$ و

به عبارت دیگر موج تحت فودی (فود عمودی) بر فلز مس در زاویه ۰.۹۹۹۶ $R_n = 1 - A_n = 0.9996$ ، یعنی عمده آن (۹۹.۹۶٪) منعکس می شود و در لایه بسیار کمی از آن جذب می شود (۰.۰۴٪). $f = 10^{10}$ Hz

مسئله: نور مرئی از آب ($n_1 = \frac{4}{3}$) به هوا (سطح جدایی در سطح آب و هوا) فودی می آید. زاویه فود برابر با $\theta_1 = 60^\circ$ است. برای هر دو قطبش S و P ضرایب انعکاس توان موج را می گوییم.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \frac{4}{3} \sin 60^\circ = 1 \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = 1.0547 = 2/\sqrt{3}$$

(توجه کنید که $\theta_c = 48.6^\circ$ است).

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} \Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} i$$

$$\hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \hat{n}_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + \hat{n}_2 \cos \theta_2} = \frac{(4/3) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} i}{(4/3) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} i} \Rightarrow \hat{r}_{12s} = \frac{2-i}{2+i}$$

$$R_s = |\hat{r}_{12s}|^2 = \hat{r}_{12s} \cdot \hat{r}_{12s}^* = 1$$

به همین ترتیب می توان دید که برای مولفه P قطبش نیز خواهیم داشت $R_p = 1$.

به عبارت دیگر اگر زاویه فودی از زاویه حد بزرگتر باشد، در این صورت $R_s = R_p = 1$ و می توان موج بازتابش می کند و در نتیجه توان انتقالی به ناهمب ۰ خواهیم داشت. و برای قطبش S و P هر دو داریم: $R_s = R_p = 1$.

مسئله: نور مرئی با فرکانس 10^{14} هرتز به سطح نقره ($k=3$ و $n=0.05+j3$) و همین طور به سطح نیکل ($k=3$ و $n=2$) برخورد می کند. R_p و R_s را برای نقره و نیکل را بر حسب زاویه فرودی رسم کنید.

$$\hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \hat{n}_2 \cos \hat{\theta}_2}{n_1 \cos \theta_1 + \hat{n}_2 \cos \hat{\theta}_2} \quad (1), \quad \hat{r}_{12p} = \frac{\hat{n}_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \hat{\theta}_2}{\hat{n}_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \hat{\theta}_2} \quad (2)$$

$$n_1 \sin \theta_1 = \hat{n}_2 \sin \hat{\theta}_2 \quad (3)$$

$$\cos \hat{\theta}_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \hat{\theta}_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \theta_1}{\hat{n}_2} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2 \sin^2 \theta_1}{\hat{n}_2^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{\hat{n}_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \quad (4)$$

$$(4) \text{ into } (1) \Rightarrow \hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \hat{n}_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{\hat{n}_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}}{n_1 \cos \theta_1 + \hat{n}_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{\hat{n}_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}} \Rightarrow$$

$$\hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \hat{n}_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{\hat{n}_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}}{n_1 \cos \theta_1 + \hat{n}_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{\hat{n}_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}}$$

$$R_s = |\hat{r}_{12s}|^2 = \hat{r}_{12s} \cdot \hat{r}_{12s}^*$$

به همین ترتیب برای R_p داریم:

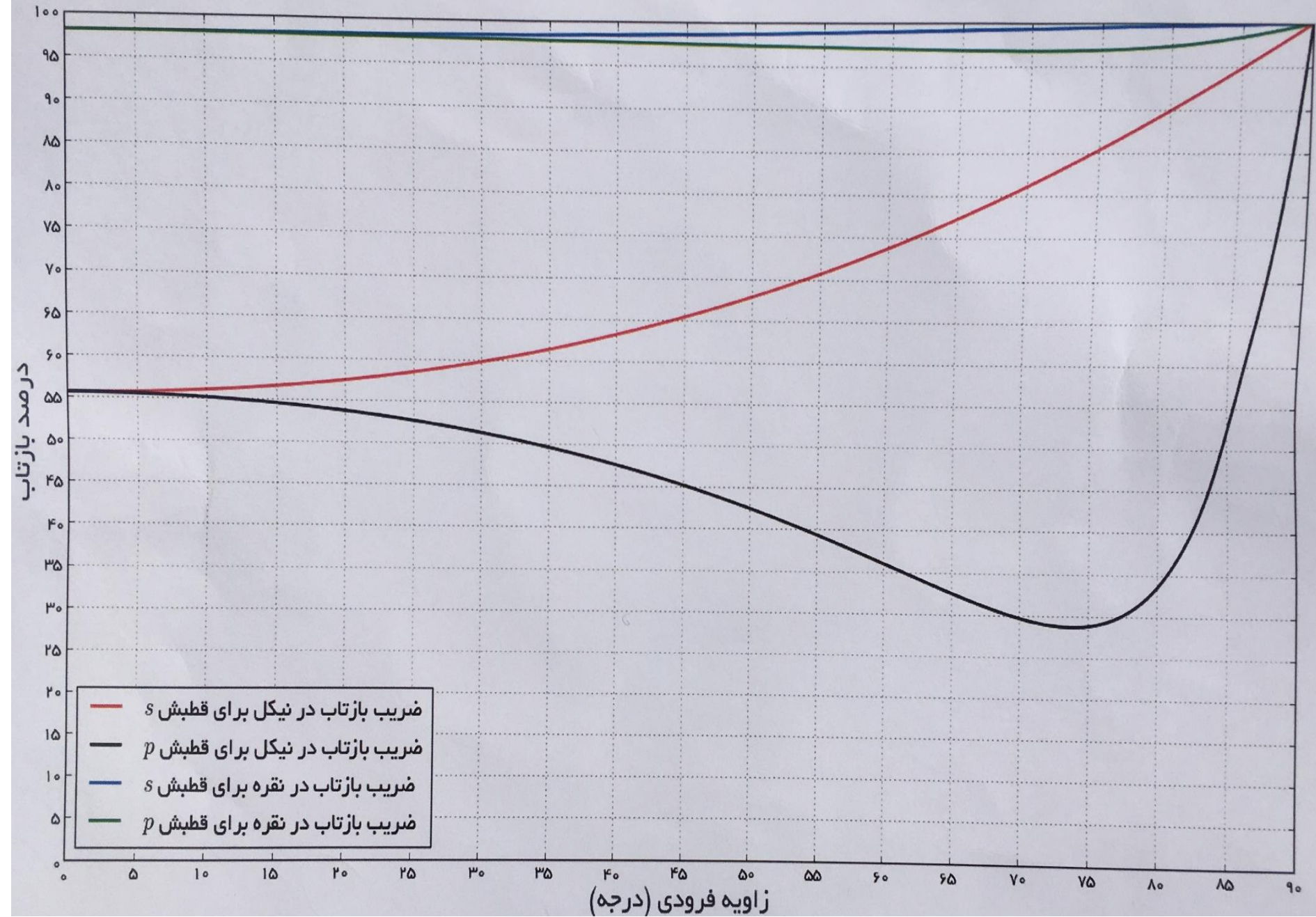
$$\hat{r}_{12p} = \frac{\hat{n}_2 \cos \theta_1 - n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{\hat{n}_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}}{\hat{n}_2 \cos \theta_1 + n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{\hat{n}_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}}$$

$$R_p = |\hat{r}_{12p}|^2 = \hat{r}_{12p} \cdot \hat{r}_{12p}^*$$

$$\hat{n}_2 = 2 + j3 \quad (\text{در فرکانس نور مرئی})$$

$$\text{برای نقره داریم: } \hat{n}_2 = 0.05 + j3 \quad \text{و برای نیکل داریم}$$

شبییه سازی ضرایب بازتاب: R_{12p} و R_{12s}



شبیه سازی ضرایب بازتاب: R_{12p} و R_{12s}

