به نام خدا

جمع و تفریق تانسورها:

$$A \pm B = C$$

$$\rightarrow A^{ij} \pm B^{ij} = C^{ij}$$

هر دو تانسور A و B باید هم مرتبه و هر دو در یک فضا با ابعاد یکسان باشند.

$$A^{ij}{}_{k} \pm C^{k}{}_{lm} \quad ※$$

ادغام، ضرب مستقیم:

ادغام:

در ادغام دو شاخص، یکی همدردا و یکی پادوردا را برابر یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$A^{ij}{}_{k} \;,\; B^{k}{}_{lm} \longrightarrow A^{ij}{}_{k} B^{k}{}_{lm} = C^{ij}{}_{lm}$$

$ij \rightarrow$ پادوردا

$lm \rightarrow$ همدردا

Type(2,1)
Rank 3

Type(1,2)
Rank 3

Type(2,2)
Rank 4

ضرب مستقیم:

حاصلضرب مستقیم دو تانسور به طور عام، برابر تانسوری است با رتبه برابر مجموع رتبه‌های آغازی:

$$A^{i}{}_{j} B^{kl} = C^{i\,kl}{}_{j}$$

ضرب مستقیم کمکی است برای ایجاد تانسورهای جدید با رتبه‌های بالاتر.

$$C'^{i\,kl}{}_{j} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{m}} \frac{\partial x^{n}}{\partial x'^{j}} \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{p}} \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{q}} C^{m\,pq}{}_{n}$$

Scanned with CamScanner

قاعدهٔ خارج قسمت:

$$A_i B_j = C_{ij}$$

قاعدهٔ خارج قسمت رابطهٔ وارون بالا می‌باشد یعنی اینکه C_{ij} را می‌دانیم تانسور است و B_j را هم از لحاظ تانسور بودن شناخت داریم و می‌خواهیم A_i را بررسی کنیم.

قرارداد: { دستگاه دکارتی. روی شاخص‌های تکراری جمع می‌زنیم.

در هر یک از این عبارت‌ها A و B تانسورهای معلومی هستند.

بنابر قاعدهٔ خارج قسمت اگر معادلهٔ مورد نظر در جملهٔ دستگاه‌های مختصات دکارتی (چرخیده) برقرار باشد، K تانسوری است از مرتبه‌ای که نشان داده شده است.

روش اول:

الف) $K_i A_i = B$

با توجه به اینکه این معادله در تمام دستگاه‌های دکارتی چرخیده برقرار است.

$$\rightarrow K'_i A'_i = \overset{\text{اسکالر}}{B'} = B = K_j A_j$$

$$\rightarrow K'_i A'_i = K_j A_j \Rightarrow \begin{cases} K'_i A'_i = K_j (a_{ij} A'_i) \\ A_j = a_{ij} A'_i \end{cases}$$

$$\rightarrow K'_i A'_i = a_{ij} K_j A'_i \rightarrow K'_i A'_i - a_{ij} K_j A'_i = 0$$

$$\rightarrow (K'_i - a_{ij} K_j) A'_i = 0$$

با توجه به اینکه A_i اختیاری است بنابراین A'_i نیز اختیاری است:

$$K'_i = a_{ij} K_j$$

که تعریف تانسور رتبهٔ یک می‌باشد.

Scanned with CamScanner

روش دوم :

$$K_i A_i = B$$

اسکالر

دستگاه چرخیده

$$\rightarrow K'_i A'_i = B' = B = K_j A_j$$

$$\rightarrow K'_i A'_i = K_j A_j \Rightarrow \begin{cases} A_j = a_{kj} A'_k \\ K'_i A'_i = K_j A_j \end{cases}$$

$$\rightarrow K'_i A'_i = K_j a_{kj} A'_k \rightarrow \sum_i K'_i A'_i = \sum_{j,k} K_j a_{kj} A'_k$$

اندیس دامی

اندیس دامی

$k \rightarrow i$

$$\rightarrow \sum_i K'_i A'_i = \sum_{j,i} K_j a_{ij} A'_i$$

$$\rightarrow \sum_i K'_i A'_i - \sum_j \sum_i K_j a_{ij} A'_i = 0$$

$$\rightarrow \sum_i \Big(\underbrace{K'_i - \sum_j K_j a_{ij}}_{=0} \Big) A'_i = 0$$

A_i اختیاری بنابراین A'_i اختیاری می‌باشد

$$\rightarrow K'_i = \sum_j a_{ij} K_j \rightarrow K'_i = a_{ij} K_j$$

که تعریف تانسور رتبه یک می‌باشد.

Scanned with CamScanner

ب) $K_{ij} A_{jk} = B_{ik}$ (α)

با توجه به اینکه این معادله در تمام دستگاه‌های دکارتی چرخیده برقرار است داریم:

$$\rightarrow K'_{ij} A'_{jk} = B'_{ik}$$

$$B'_{ik} = a_{il} a_{km} B_{lm} \longrightarrow K'_{ij} A'_{jk} = a_{il} a_{km} B_{lm} \quad (\beta)$$

$$(\alpha) \rightarrow B_{lm} = K_{ln} A_{nm}$$

$$(\beta) \rightarrow K'_{ij} A'_{jk} = a_{il} a_{km} K_{ln} A_{nm} \quad (\gamma)$$

$$A_{nm} \xrightarrow{\text{دستگاه چرخیده}} A_{nm} = a_{pn} a_{qm} A'_{pq}$$

$$(\gamma) \rightarrow K'_{ij} A'_{jk} = a_{il} a_{km} K_{ln} a_{pn} a_{qm} A'_{pq}$$

$$= a_{il} a_{km} a_{pn} a_{qm} K_{ln} A'_{pq}$$

$$\sum_m a_{km} a_{qm} = \delta_{kq}$$

$$\rightarrow K'_{ij} A'_{jk} = a_{il} a_{pn} \delta_{kq} K_{ln} A'_{pq}$$

$$\rightarrow K'_{ij} A'_{jk} = a_{il} a_{pn} K_{ln} A'_{pk}$$

دامی

اندیس تکراری بنابراین دامی می‌باشد

A_{jk} اختیاری است، بنابراین A'_{jk} اختیاری می‌باشد.

$$\rightarrow K'_{ij} A'_{jk} = a_{il} a_{jn} K_{ln} A'_{jk} \xrightarrow{p \to j} \underbrace{(K'_{ij} - a_{il} a_{jn} K_{ln})}_{=0} A'_{jk} = 0$$

$$\longrightarrow K'_{ij} = a_{il} a_{jn} K_{ln}$$

که تعریف یک تانسور رنک (رتبه) دو است.

Scanned with CamScanner

۷) $K_{ijkl} A_{ij} = B_{kl}$

دستگاه مختصات $\begin{cases} K'_{ijkl} A'_{ij} = B'_{kl} \\ B'_{kl} = a_{km} a_{ln} B_{mn} \end{cases} \longrightarrow K'_{ijkl} A'_{ij} = a_{km} a_{ln} B_{mn}$ ①

$B_{mn} = K_{pqmn} A_{pq} \xrightarrow[\alpha]{} K'_{ijkl} A'_{ij} = a_{km} a_{ln} K_{pqmn} A_{pq}$ ②

$A_{pq} = a_{ip} a_{jq} A'_{ij} \xrightarrow[\beta]{} K'_{ijkl} A'_{ij} = a_{km} a_{ln} a_{ip} a_{jq} K_{pqmn} A'_{ij}$

$\longrightarrow (K'_{ijkl} - a_{km} a_{ln} a_{ip} a_{jq} K_{pqmn}) A'_{ij} = 0$

↳ اختیاری و دلخواه.

$\longrightarrow K'_{ijkl} = a_{ip} a_{jq} a_{km} a_{ln} K_{pqmn}$ که تبدیل یک تانسور رتبه چهار است.

غ) $K_{ij} A_k = B_{ijk}$

غ) $K_{ij} A_i B_j = C$: C is scalar

Scanned with CamScanner

شبه تانسورها

تا اینجا تبدیل‌های مختصاتی به چرخش محض منجر می‌شد،

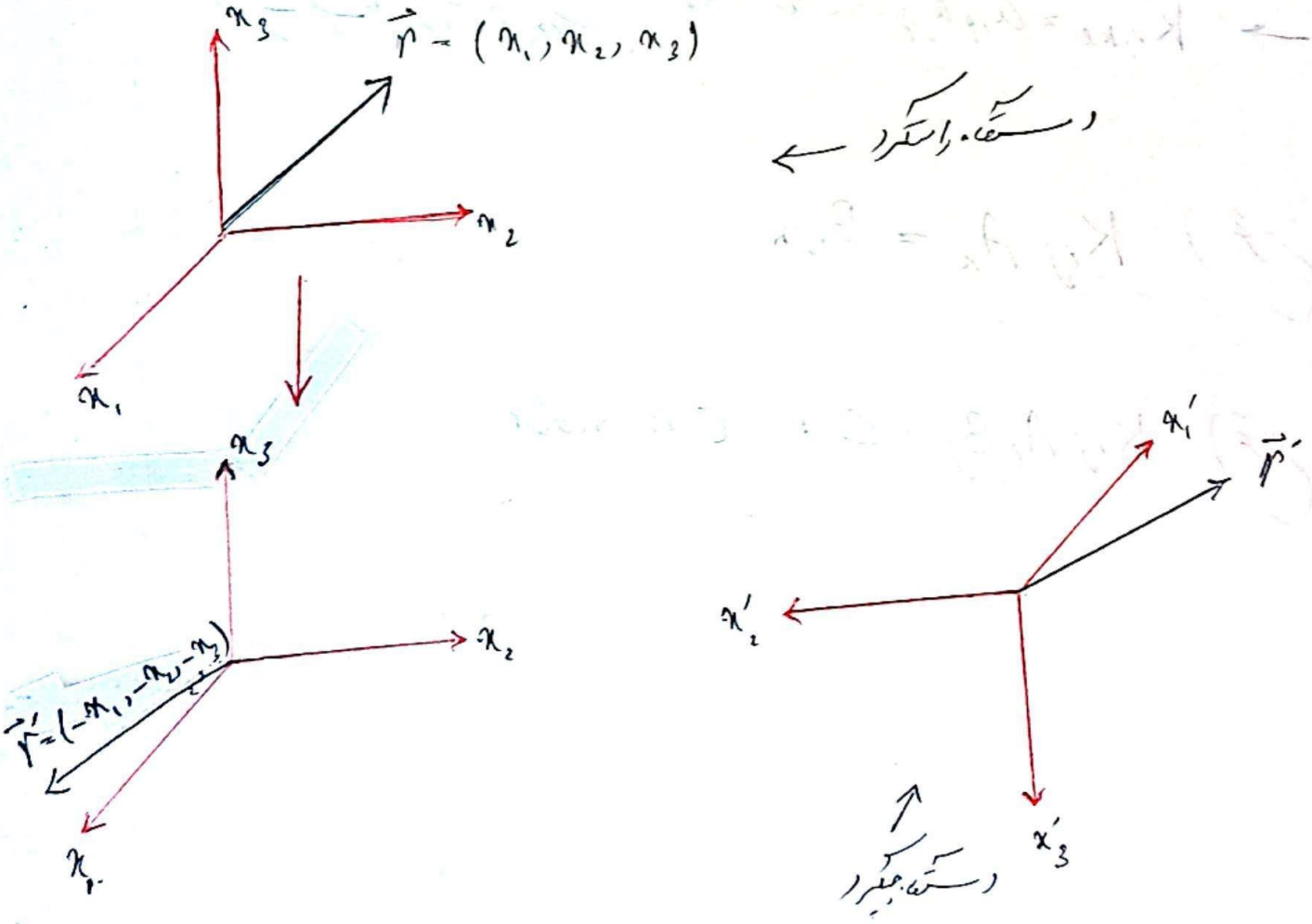
$$[a_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{|a_{ij}|}_{\text{چرخش}} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = +1$$

اثر انعکاس و وارونی را بررسی می‌کنیم:

برای وارونی داریم «پاریته»: $x'_i = -x_i \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$

$$\rightarrow a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{d(-x_i)}{dx_j} = -\frac{dx_i}{dx_j} = -\delta_{ij}$$

$$\rightarrow [a_{ij}] = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{|a_{ij}|}_{\text{وارونی}} = -1$$



Scanned with CamScanner

$$\vec{r}' = x'_1 \hat{i}' + x'_2 \hat{j}' + x'_3 \hat{k}'$$

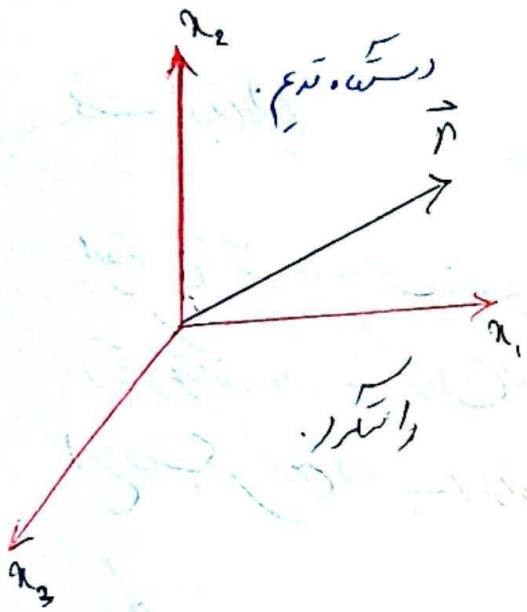
$$\vec{r} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$$

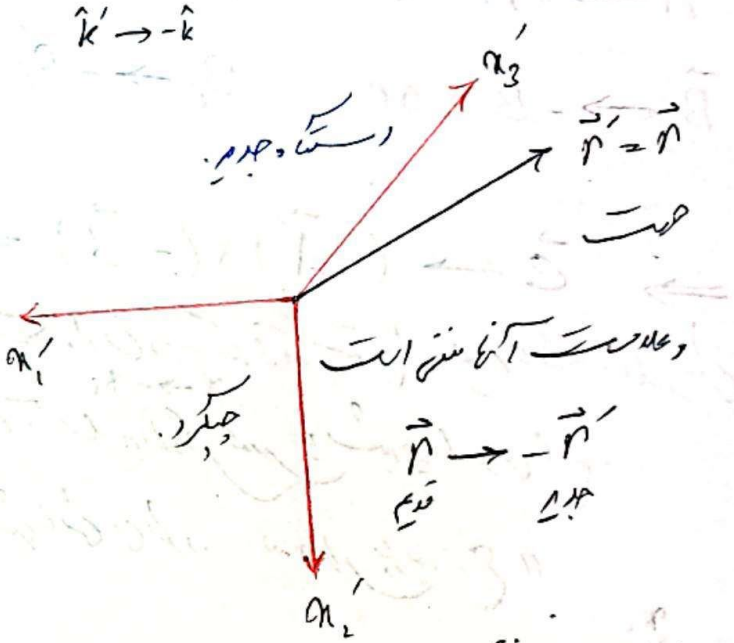
$$\vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3) = (-x_1, -x_2, -x_3) = x'_1 \hat{i}' + x'_2 \hat{j}' + x'_3 \hat{k}'$$

$$= -x_1 \hat{i}' - x_2 \hat{j}' - x_3 \hat{k}'$$

$$\xrightarrow[\hat{j}' \to -\hat{j}]{\hat{i}' \to -\hat{i}} \vec{r}' = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k} = \vec{r}$$

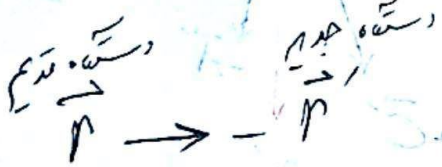
$$\hat{k}' \to -\hat{k}$$





قبلاً هم در چرخش دستگاه مختصات بردار را غیر چرخاندیم بلکه مختصات را می چرخاندیم.

بردارهایی که مثل بردار $\vec{r}$ در تبدیل دارونما (پاریته) تغییر علامت می دهند (نسبت به دستگاه جدید) را بردار قطبی (Polar Vector) می گویند. این بردارها پاریته فرد دارند.



$\vec{r}$ is a polar vector

مختصات وارون شده اند، و دنیای فیزیکی ثابت باقی مانده است!

Scanned with CamScanner

• بردار محوری (pseudovectors) or (axial vectors):

حاصلضرب خارجی $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ را در نظر بگیرید،

که در این حاصلضرب بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{A}$ بردارهای قطبی هستند. یعنی:

$$\vec{A} \to -\vec{A}' \quad \text{or} \quad A_i \to -A_i'$$

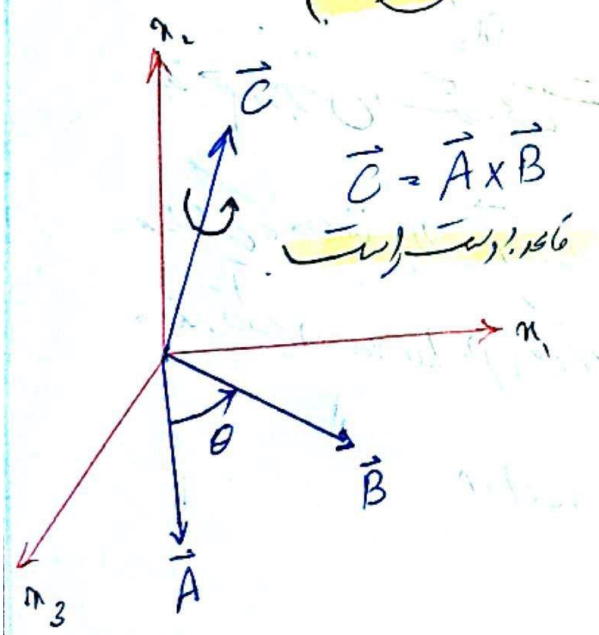
$$\vec{B} \to -\vec{B}' \quad \text{or} \quad B_i \to -B_i'$$

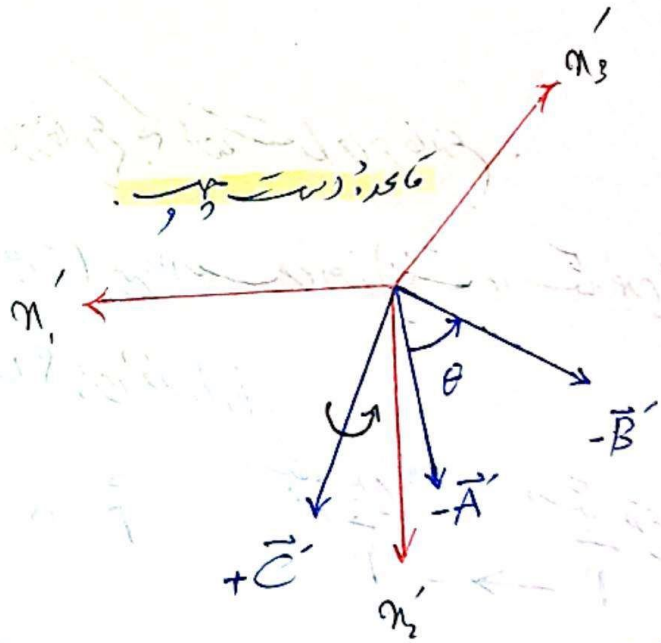
تحت وارونی داریم:

$$\Longrightarrow \quad \vec{C} \to (-\vec{A}') \times (-\vec{B}') = +\vec{C}'$$

یعنی $\vec{C}$ تغییر علامت نمی‌دهد. (تحت وارونی دستگاه مختصات $x \to -x_i$). یعنی مانند بردار قطبی رفتار نمی‌کند. برای متمایز کردن این بردارها، آنها را بردارهای محوری یا شبه بردار می‌نامیم.

این ضرب‌های خارجی اغلب از نوعیت چرخشی ناشی می‌شود. «دارای پاریته زوج»





$\vec{A} \times \vec{B} = +\vec{C}$

در دستگاه قدیم

$(-\vec{A}') \times (-\vec{B}') = +\vec{C}'$

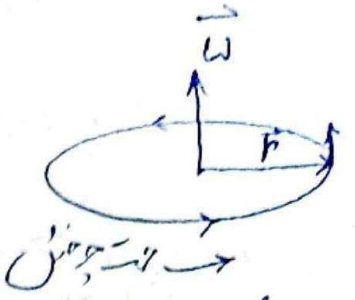
در دستگاه جدید

علامت A'، B' (بردارهای قطبی) نسبت به دستگاه جدید منفی است.

Scanned with CamScanner

مثال ۵:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

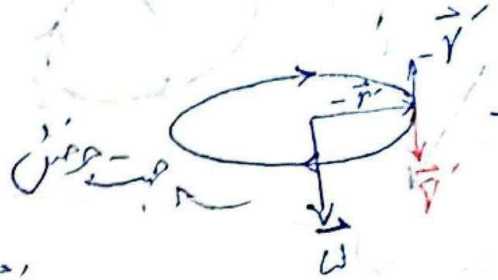


قاعده دست راست

$\vec{r}$: polar vector , $\vec{r} \to -\vec{r}'$

$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$: polar vector , $\vec{V} \to -\vec{V}'$

نسبت به دستگاه جدید



قاعده دست چپ

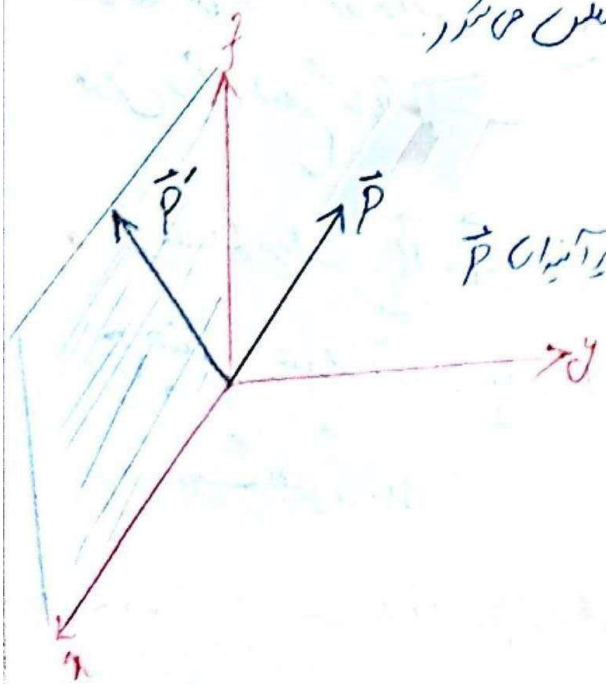
$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \to -\vec{V}' = \vec{\omega}' \times (-\vec{r}')$$

$$\hookrightarrow \vec{\omega} \to +\vec{\omega}'$$

برداری محوری یا شبه بردار

• تمایز بین بردارهای قطبی و محوری با کمک بازتابش (reflection):

• بردار قطبی در آینه ← مانند یک بردار فیزیکی واقعی منعکس می‌شود.



$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z) \Rightarrow P_y \to -P_y$$

تصویر آینه‌ای $\vec{P}$ $\vec{P}' = (P_x, -P_y, P_z)$

$$\hat{j} \to \hat{j}' = -\hat{j} \quad \text{or} \quad y \to y' = -y$$

$\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{r}' = (x, -y, z)$

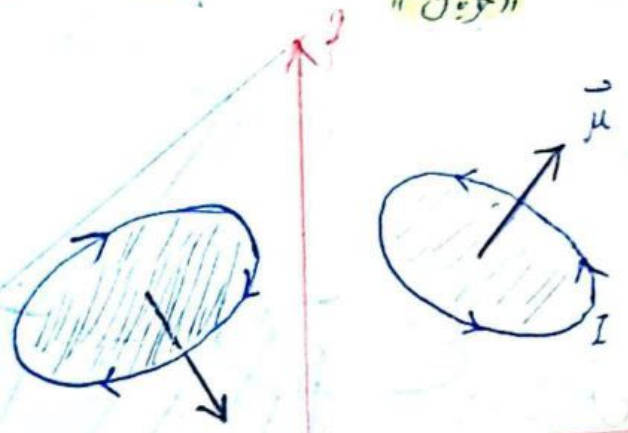
محورهای مختصات ثابت می‌مانند و دنیای فیزیکی در آینه‌ای در صفحه xz بازتاب می‌یابد.

Scanned with CamScanner

• بردار محوری و آکسیال ← کاملاً متفاوت رفتار می‌کند.

میدان مغناطیسی $\vec{H}$ و گشتاور مغناطیسی $\vec{\mu}$ حاصل از یک بار الکتریکی که در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند در تقارن بگیرید. جهت چرخش بار در بازتابش عکس می‌شود.

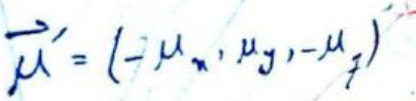
"هویل"

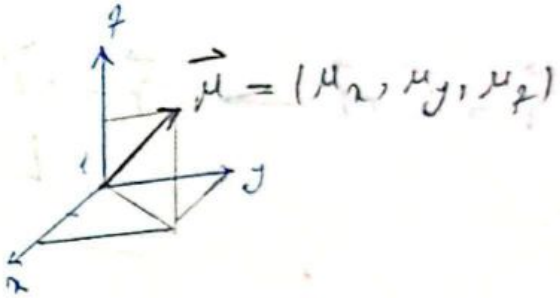


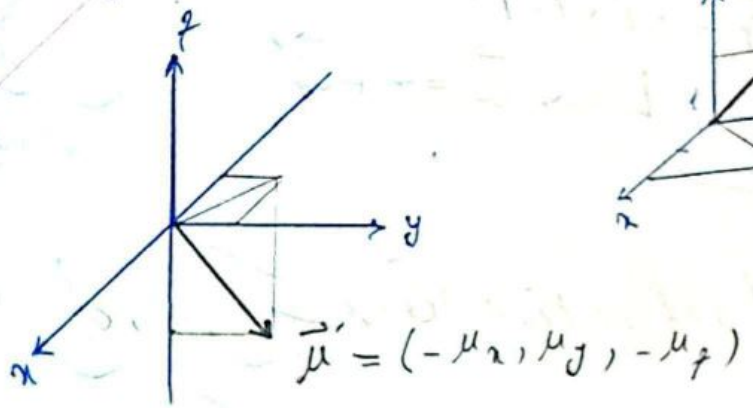
$\vec{\mu} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$

$\vec{\mu} = I\vec{A}$

آکسیال در صفحه "xz"







ملاحظه می‌شود که در بردار محوری $\vec{\mu}$ علامت μ_y عوض نمی‌شود و علامت μ_x و μ_z عوض شده. این کاملاً خلاف رفتار بردارهای قطبی تحت بازتاب (reflection) است.

• در معادله برداری $\vec{A} = \vec{B}$ هر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ یا قطبی هستند یا محوری.

هم‌چنین در معادله اسکالر $\Phi_1 = \Phi_2$ هر دو کمیت Φ_1 و Φ_2 یا قطبی هستند یا محوری.

در معادله تانسوری $T_1 = T_2$ هر دو یا قطبی هستند یا محوری.

Scanned with CamScanner

• شبه اسکالرها، شبه بردارها و شبه تانسورها معمولاً به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$S' = |a| S \quad \text{or} \quad S' = J S$$

$$C_i' = |a| a_{ij} C_j \quad \text{or} \quad C_i' = J a_{ij} C_j$$

$$A_{ij}' = |a| a_{ik} a_{jl} A_{kl} \quad \text{or} \quad A_{ij}' = J a_{ik} a_{jl} A_{kl}$$

که در آن $|a|$ یا J دترمینان آرایه ضرایب a_{mn} است.

برای وارونی:

$$a_{ij} = -\delta_{ij} \rightsquigarrow J = |a| = \begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{vmatrix} = -1$$

برای بازتابش یکی از محورها:

$$x \to -x \to \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$J = |a| = \begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ & +1 & \\ 0 & & +1 \end{vmatrix} = -1$$

برای چرخش هم قبلاً بدست آمده است.

$$J = |a| = +1$$

این کمیت‌ها تا جائی که تنها چرخش‌ها مورد نظر باشند به صورت تانسور معمولی هستند، و فقط وقتی با تانسورها تفاوت پیدا می‌کنند که بازتاب‌ها یا وارونی مختصات مطرح شوند.

بنابراین شبه اسکالر، شبه بردارها و شبه تانسورها تحت بازتاب‌ها و وارونی‌ها به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

S، C_i و A_{ij} محوری هستند.

- $S \to +S' = -S$
- $C_i \to +C_i' = -a_{ij} C_j$
- $A_{ij} \to +A_{ij}' = -a_{ik} a_{jl} A_{kl}$

Scanned with CamScanner

و نیز اسکالر S، بردار S و تانسور S هم به صورت زیر تبدیل می‌شوند،

S ، A_i ، T_{ij} قطبی هستند:

- $S \rightarrow -S' = -S$
- $A_i \rightarrow -A'_i = -a_{ij} A_j$
- $T_{ij} \rightarrow -T'_{ij} = -a_{ik} a_{jl} T_{kl}$

به عنوان مثال اگر A_i بردار قطبی باشد تحت چرخش، وارونی و بازتاب داریم،

$$A'_i = |a|\, a_{ij} A_j$$

- rotation: $|a| = +1$

$$\rightarrow A'_i = a_{ij} A_j$$

فرقی بین تانسور و شبه تانسور نیست.

- inversion: $|a| = -1$

$$A_i \rightarrow -A'_i = |a|\, a_{ij} A_j \Rightarrow -A'_i = -a_{ij} A_j$$

$$\rightarrow A'_i = a_{ij} A_j$$

- reflection: $|a| = -1$

$$A_i \rightarrow -A'_i = |a|\, a_{ij} A_j \Rightarrow -A'_i = -a_{ij} A_j$$

$$\rightarrow A'_i = a_{ij} A_j$$

Scanned with CamScanner

اگر B_i بردار محوری باشد در این صورت داریم: $|a| = -1$ با ناب و وارونی

$$B_i \to +B_i' = |a|\, a_{ij} B_j \to B_i' = -a_{ij} B_j$$

تحت وارونی « inversion » در بردار $A_i' = a_{ij} A_j$ ، $B_i' = -a_{ij} B_j$ به چه صورت تبدیل می‌شوند.

$$a_{ij} = -\delta_{ij}$$

$$\to \begin{cases} A_i' = a_{ij} A_j \to A_i' = -\delta_{ij} A_j \to A_i' = -A_i \to \vec{A} & \text{قطبی} \\ B_i' = -a_{ij} B_j \to B_i' = -(-\delta_{ij}) B_j \to B_i' = B_i \to \vec{B} & \text{محوری} \end{cases}$$

مثال برای شبه اسکالر « Pseudoscalar »:

$$S = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

if $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$, Polar vector

تحت وارونی یک علامت منفی می‌گیرند.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{A} \to -\vec{A}' \\ \vec{B} \to -\vec{B}' \\ \vec{C} \to -\vec{C}' \end{array}\right. \to S \to -S$$

بنابراین شبه اسکالر است.

S حجم یک متوازی السطوح است که اضلاع آن بردارهای $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ هستند وقتی که جهت محورها عوض شود داریم:

$$dv = dx\,dy\,dz \xrightarrow{\text{وارونی}} dv' = dx'dy'dz' = (-dx)(+dy)(-dz) = -dv$$

بنابراین حجم تغییر علامت می‌دهد و شبه اسکالر است.

Scanned with CamScanner

نماد لوی - چی ویتا:

نماد لوی - چی ویتا سه بعدی ϵ_{ijk} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1 \\ \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \\ \epsilon_{ijk} = 0 \quad \text{برای موارد دیگر} \end{cases}$$

• ϵ_{ijk} کاملاً پاد متقارن است، یعنی اگر جای دو اندیس مجاور را عوض کنیم یک منفی می‌گیرد.

اکنون فرض کنید یک شبه تانسور رتبه سه δ_{ijk} داریم که در دستگاه مختصات خاصی برابر ϵ_{ijk} است بنابراین داریم:

$$\delta_{ijk} \rightarrow +\delta'_{ijk} = |a|\, a_{ip} a_{jq} a_{kr} \epsilon_{pqr}$$

حال با بسط سیستم دترمینان ماتریس 3x3 داریم:

$$|a| = a_{1p} a_{2q} a_{3r} \epsilon_{pqr}$$ ⇒ در فصل ماتریسها، دترمینان حساب خواهیم کرد.

$$\rightarrow +\delta'_{123} = |a|\, a_{1p} a_{2q} a_{3r} \epsilon_{pqr} \Rightarrow +\delta'_{123} = |a|^2 \epsilon_{pqr} = \epsilon_{123}$$

به همین ترتیب بقیه مؤلفه‌ها را حساب می‌کنیم. بنابراین برای چرخش‌ها و بازتاب‌ها داریم:

$$\delta'_{ijk} = \epsilon_{ijk} \rightarrow$$ شبه تانسور or Pseudotensor

این شبه تانسور همانگرد است چون در همه دستگاه‌های مختصات دکارتی چرخیده مؤلفه‌های یکسانی دارد.

Scanned with CamScanner

تانسور دوران:

در فضای سه بعدی هر تانسور رتبه دوم پادمتقارن C^{ik} می‌توان یک شبه‌بردار دوران C_i به صورت زیر تعریف کرد:

$$C_i = \frac{1}{2} e_{ijk} C^{jk} \quad , \quad C^{jk} = -C^{kj}$$

تانسور دوران در واقع یک روش جبری برای نمایش برخی از تانسورهای مرتبه بالاتر به یک مفهوم هندسی یا مرتبه پایین‌تر است.

$C_i \rightsquigarrow$ مؤلفه‌های شبه‌بردار

$C^{jk} \rightsquigarrow$ مؤلفه‌های تانسور پادمتقارن رتبه 2

$$j,k=1 \rightsquigarrow C^{11} = -C^{11} \rightarrow C^{11} + C^{11} = 0 \rightarrow 2C^{11} = 0 \rightarrow \boxed{C^{11} = 0}$$

$$j,k=2 \rightsquigarrow C^{22} = -C^{22} \Rightarrow C^{22} + C^{22} = 0 \rightarrow 2C^{22} = 0 \rightarrow \boxed{C^{22} = 0}$$

$$j,k=3 \rightsquigarrow C^{33} = -C^{33} \rightarrow C^{33} + C^{33} = 0 \rightarrow 2C^{33} = 0 \rightarrow \boxed{C^{33} = 0}$$

بنابراین مؤلفه‌های روی قطر اصلی همیشه صفر می‌شوند.

$$\begin{cases} j=1 \\ k=2 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{C^{12} = -C^{21}}$$

$$\begin{cases} k=1 \\ j=2 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{C^{21} = -C^{12}}$$

$$\begin{cases} j=3 \\ k=1 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{C^{31} = -C^{13}}$$

$$\begin{cases} j=2 \\ k=3 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{C^{23} = -C^{32}}$$

$$[C^{ik}] = \begin{pmatrix} C^{11} & C^{12} & C^{13} \\ C^{21} & C^{22} & C^{23} \\ C^{31} & C^{32} & C^{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [C^{ik}] = \begin{pmatrix} 0 & C^{12} & -C^{31} \\ -C^{12} & 0 & C^{23} \\ C^{31} & -C^{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

C_i تحت چرخش باید مانند بردار تبدیل شود و با توجه به سرشت شبه تانسوری ϵ_{ijk}، C_i در واقع شبه بردار است. مولفه‌های C_i به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$C_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}C^{jk}$$

- $i=1 \rightarrow C_1 = \frac{1}{2}\epsilon_{1jk}C^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{123}C^{23} + \frac{1}{2}\epsilon_{132}C^{32}$

$$= \frac{1}{2}(+1)C^{23} + \frac{1}{2}(-1)C^{32} = \frac{1}{2}(C^{23} - C^{32})$$

$$C^{32} = -C^{23} \rightarrow C_1 = \frac{1}{2}(C^{23} + C^{23}) = C^{23} \rightarrow \boxed{C_1 = C^{23}}$$

- $i=2 \rightarrow C_2 = \frac{1}{2}\epsilon_{2jk}C^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{213}C^{13} + \frac{1}{2}\epsilon_{231}C^{31}$

$$= \frac{1}{2}(+1)C^{13} + \frac{1}{2}(-1)C^{31} = \frac{1}{2}(C^{13} - C^{31})$$

$$C^{31} = -C^{13} \quad = \frac{1}{2}(C^{13} + C^{13}) = C^{13} \rightarrow \boxed{C_2 = C^{13}}$$

- $i=3 \rightarrow C_3 = \frac{1}{2}\epsilon_{3jk}C^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{312}C^{12} + \frac{1}{2}\epsilon_{321}C^{21}$

$$= \frac{1}{2}(+1)C^{12} + \frac{1}{2}(-1)C^{21} = \frac{1}{2}(C^{12} - C^{21})$$

$$C^{21} = -C^{12} \quad = \frac{1}{2}(C^{12} + C^{12}) = C^{12} \rightarrow \boxed{C_3 = C^{12}}$$

$\rightarrow (C_1, C_2, C_3) = (C^{23}, C^{31}, C^{12})$ $\rightarrow$ در چهار بعد همگی همدیگر هستند.

شبه بردار — تانسور پادمتقارن

or $\rightarrow (C_1, C_2, C_3) = (C_{23}, C_{31}, C_{12})$

دقت کنید که این سه در چهار بعد عملاً یکی هستند و استفاده از آن کاملاً بستگی به موقعیت دارد.

Scanned with CamScanner

از لحاظ فیزیکی و ریاضی میزان اطلاعاتی که شبه بردار وجود دارد با میزان اطلاعاتی که در تانسور پادمتقارن وجود دارد یکی است. و در ذرات بنیادی بستگی به انتخاب شما دارد که از شبه بردار استفاده کنید یا از تانسور پادمتقارن. یعنی در جائیکه استفاده می‌کنید یا نیاز به شبه بردار دارید یا یک تانسور پادمتقارن. و این مفهوم دوگانگی می‌باشد.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \rightsquigarrow C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \rightsquigarrow C_i = \epsilon_{ijk} D_{jk}$$

مثال از فصل یک.

ضرب برداری سه بعدی را می‌توان بسته به اینکه آنرا به چه صورتی بنویسیم، یک شبه بردار یا یک تانسور مرتبه دوم پادمتقارن بدانیم.

مثال دیگر: برای سه بردار (قطبی) $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ می‌توان ضرب سه‌تیم زیر را تعریف کرد.

$$V^{ijk} = A^i B^j C^k$$

تانسور مرتبه سه

کمیت دوگان این تانسور در فضای سه بعدی:

$$V = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} V^{ijk}$$

ضریب $n!$ یعنی تعداد اندیس‌های تکراری در نماد لوی-چی‌ویتا و تانسور مورد نظر.

$$H = \frac{1}{4!} \epsilon_{ijkl} H^{ijkl}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijkln} A^{kln}$$

Scanned with CamScanner

1.4.3 آرایه مربعی پادمتقارن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

که در آن (C_1, C_2, C_3) یک شبه بردار است با فرض اینکه رابطه

$$C_i = \frac{1}{2!} \epsilon_{ijk} C_{jk}$$

در تمام دستگاه‌های مختصات برقرار باشد، ثابت کنید که C_{jk} تانسور است. (خارج قسمت)

حل $\rightarrow$ شبه بردار $C'_i = |a|\, a_{im} C_m$

$$\rightarrow C'_i = \frac{1}{2!} \epsilon'_{ijk} C'_{jk}$$

$$\downarrow$$

$$\rightarrow |a|\, a_{im} C_m = \frac{1}{2!} \left(|a|\, a_{im} a_{jl} a_{kn} \epsilon_{mln} \right) C'_{jk}$$

$$\rightarrow \cancel{|a|}\, \cancel{a_{im}} \left(\cancel{\tfrac{1}{2}}\, \cancel{\epsilon_{mln}} C_{ln} \right) = \cancel{\tfrac{1}{2}}\, \cancel{|a|}\, \cancel{a_{im}}\, a_{jl} a_{kn} \cancel{\epsilon_{mln}} C'_{jk}$$

$$\rightarrow C_{ln} = a_{jl} a_{kn} C'_{jk}$$

Scanned with CamScanner

3.4.3 - نشان دهید که:

الف) $\delta_{ii} = 3$

$$\sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1+1+1 = 3$$

ب) $\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = 0$

$$\sum_{i,j} \delta_{ij}\epsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_{iik} = \epsilon_{11k} + \epsilon_{22k} + \epsilon_{33k} = 0+0+0 = 0$$

ج) $\epsilon_{ipq}\epsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$l \to i \Rightarrow \sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{kim} = \sum_{i=1}^{3} (\delta_{ii}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{ji})$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii}\delta_{jm} - \sum_{i=1}^{3} \delta_{im}\delta_{ji}$$

$$= 3\delta_{jm} - \delta_{jm} = 2\delta_{jm}$$

$$\longrightarrow \sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{kij}\epsilon_{kim} = 2\delta_{jm}$$

د) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

از قید قسمت ج داریم.

$$m \to j \Rightarrow \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{kij}\epsilon_{kij} = \sum_{j=1}^{3} 2\delta_{jj}$$

$$\longrightarrow \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2 \times 3 = 6$$

Scanned with CamScanner

4.4.3 نشان دهید که

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \underbrace{\delta_{kk}}_{3} \end{vmatrix} = \delta_{ip}(3\delta_{jq} - \delta_{jk}\delta_{kq}) + \delta_{iq}(\delta_{jk}\delta_{kp} - 3\delta_{jp}) + \delta_{ik}(\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp})$$

$$\rightarrow \sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}(3\delta_{jq} - \delta_{jq}) + \delta_{iq}(\delta_{jp} - 3\delta_{jp}) + \delta_{ik}(\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp})$$

$$= \underline{2\delta_{ip}\delta_{jq}} - 2\delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{jp}\delta_{iq} - \underline{\delta_{jq}\delta_{ip}}$$

$$= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

7.4.3 $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi$ را برحسب نماد ϵ_{ijk} چنان بنویسید که مشخص شود هر یک از این عبارت‌ها صفر است.

- $$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = \sum_i \nabla_i(\vec{\nabla}\times\vec{A})_i = \sum_i \partial_i \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\partial_j A_k = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k$$
$$= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} A_k = 0$$

- $$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\partial_j(\vec{\nabla}\varphi)_k = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi = 0$$

Scanned with CamScanner

12.4.3 - به ازای $A_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}B_{ij}$ ، که در آن B بار متقارن است، $B_{ij} = -B_{ji}$

نشان دهید،

$$B_{mn} = \epsilon_{mnk}A_k$$

$$\longrightarrow A_k = \frac{1}{2!}\epsilon_{ijk}B_{ij} \xrightarrow{\times \epsilon_{mnk}} \epsilon_{mnk}A_k = \frac{1}{2}\epsilon_{mnk}\epsilon_{ijk}B_{ij}$$

$$\longrightarrow \epsilon_{mnk}A_k = \frac{1}{2}\left(\delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{mj}\delta_{ni}\right)B_{ij}$$

$$= \frac{1}{2}\delta_{mi}\delta_{nj}B_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{mj}\delta_{ni}B_{ij}$$

$$= \frac{1}{2}B_{mn} - \frac{1}{2}B_{nm} = \frac{1}{2}B_{mn} - \frac{1}{2}(-B_{mn})$$

$$\epsilon_{mnk}A_k = \frac{1}{2}\left(B_{mn} - (-B_{mn})\right) = B_{mn}$$

Scanned with CamScanner