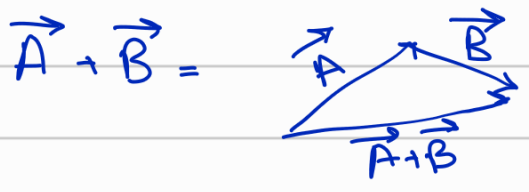
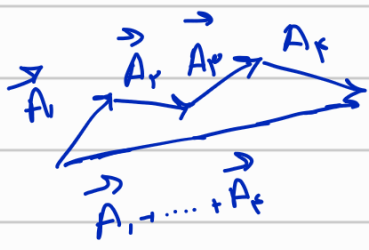


Arfken 3th edition
 Arfken. weber 5th edition

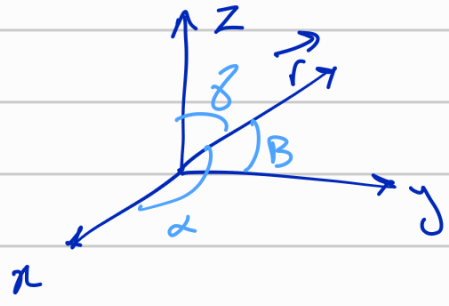
مکانیزم ۱، ۷ - اقلان ویر. اقلان. > فصل اول

1.1



نسبی

Direction Cosines:



$$x = r \cos \alpha \quad z = r \cos \gamma$$

$$y = r \cos \beta$$

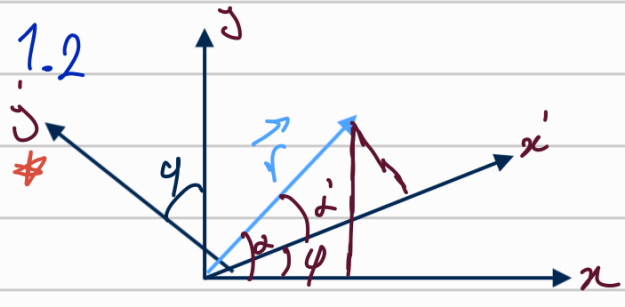
$$|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow r^2 = r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \cos^2 \beta + r^2 \cos^2 \gamma \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

(بسیار مهم است)

$$\vec{r} = (x, y, z) = (r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma)$$

$$|\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} \Rightarrow A_x = A_y = A_z$$



$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \cos \phi + y \sin \phi \\ y' = -x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cos \alpha' \\ y' = r \sin \alpha' \end{cases}$$

$$A'_x = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi$$

$$A'_y = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

نکته: ۱) تبدیل شود به این

$$\alpha' = \alpha - \phi$$

$$\begin{cases} x \rightarrow x_1 \\ y \rightarrow x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' \rightarrow x'_1 \\ y' \rightarrow x'_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos \varphi$$

$$a_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \sin \varphi$$

$$a_{21} = \cos(x'_2, x_1) = -\sin \varphi$$

$$a_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})$$

جبرید

لایپنس زاویه بین
محورهای جدید و محاوره

$$\Rightarrow x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \sum_{j=1}^2 a_{1j}x_j$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \sum_{j=1}^2 a_{2j}x_j$$

$$\Rightarrow x'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j$$

$$A'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij}A_j$$

j = dummy index

$$i = \text{free index} \Rightarrow a_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$$

جهت مثبت

$$a_{11} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1}, \quad a_{12} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_2}, \quad a_{21} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_1}$$

$$a_{ij} = \cos(x'_i, x_j) = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$$

$$\Rightarrow A'_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

میدانیم رابطه فوق N محاسب است.

شرط تمام

لایپنس صحت

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

کروند

* لایپنس < a_{ij} روابط زیر را برآورده می کنند.

* جمع دو بردار نیز بردار

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^N (A^T)_{ij} (A)_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\sum_{i=1}^N a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}$$

a_{ij} عنصر i از j در ماتریس A

$$(A^T A)_{jk} = \sum_i a_{ij} a_{ik} \Rightarrow A^T A = I \quad (8)$$

$$(B) \Rightarrow A A^T = I$$

* اثبات - شرط تمام:

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk}$$

ماتریس متعامد $\leftarrow A^T A = A A^T = I$ - اگر از a_{ij} ها ماتریس متعامد را بنویسیم متعامد است

تعریف مختصر بردارها:

$$\vec{x} = \vec{y} = x_i = y_i$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{z} \Rightarrow x_i + y_i = z_i$$

$$a) \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

$$a\vec{x} = (ax, ay, az)$$

$$b) (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$$

$$-\vec{x} = (-x, -y, -z)$$

$$c) a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$$

$$\vec{0} = (0, 0, 0)$$

$$d) (a+b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$$

$$e) (ab)\vec{x} = a(b\vec{x})$$

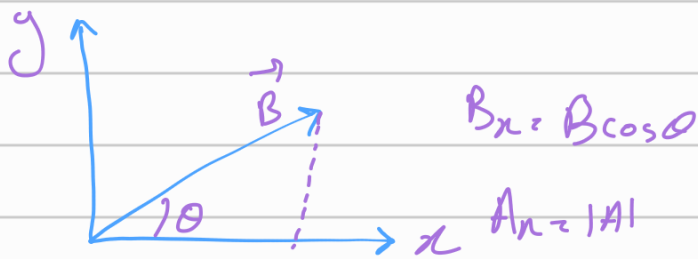
1.3 Dot product = Scalar product = Inner product

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

مثال

تعریف هندسی:

برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضای 3 بعدی، زاویه بین آنها را θ می‌گویند. این زاویه را می‌توان به کمک ضرب داخلی محاسبه کرد. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای واحد باشند، داریم: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \theta$. اگر بردارها واحد نباشند، داریم: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$.



Scalar $\rightarrow$ با تغییر در اندازه مشخصات
تغییر حاصل می شود

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

جایگزینی:

$$: \vec{A} \cdot \vec{B} \text{ انبساط است}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_k A'_k B'_k \Rightarrow$$

$$= \sum_k \left[\left(\sum_i a_{ki} A_i \right) \left(\sum_j a_{kj} B_j \right) \right]$$

$$\Rightarrow \sum_i \sum_j (A_i B_j \delta_{ij}) = \sum_i A_i B_i = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

شرط یکسان

$$Ex) \vec{r} = (x, y, z, w)$$

$$|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$



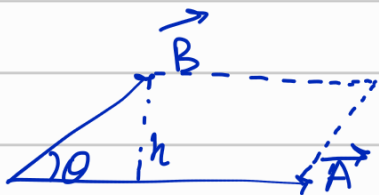
$$\vec{t} = (y, -x, w, -z)$$

$\Rightarrow$ بی‌حاشیه بردار و وجود دارد
که به $\vec{t}$ عود است



1.4 cross product

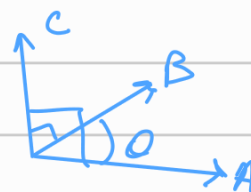
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



$$h = B \sin \theta$$

$$\sum C A h = AB \sin \theta = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



تقریب هندی:

$$C = AB \sin \theta$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

$$\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \Rightarrow C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 \Rightarrow A^2 B^2 \sin^2 \theta$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

✗

مسئله

C یک بردار است به تعریف به سطره:

$$C_i = A'_j B'_k - A'_k B'_j$$

در این جا می بینیم

$$i=1, j=2, k=3$$

$$\Rightarrow C_i = \left(\sum_l a_{il} A_l \right) \left(\sum_m b_{km} B_m \right) - \left(\sum_l a_{kl} A_l \right) \left(\sum_m b_{jm} B_m \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{l,m} (a_{il} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) A_l B_m \Rightarrow i=1, j=2, k=3$$

جای بگذاریم
تغییرات کتاب

$$C_i = \sum_{l,m} (a_{il} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) A_l B_m \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} &= a_{33} \\ a_{12} a_{31} - a_{32} a_{11} &= a_{23} \\ a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11} &= a_{12} \end{aligned}$$

$$C_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} C_j$$

$$C_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} C_j$$

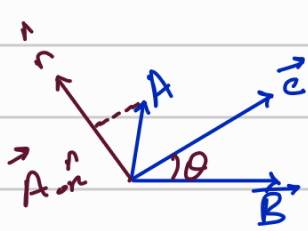
1.5

* Triple vector product and Triple scalar product :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_x (\vec{B} \times \vec{C})_x + A_y (\vec{B} \times \vec{C})_y + A_z (\vec{B} \times \vec{C})_z$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

تعریف هندسی ضرب سه گانه اسطوره :



مساحت مستطیل

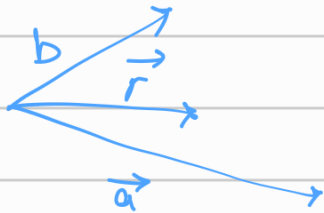
$$\vec{n} = \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B} \times \vec{C}|}$$

$$h = \vec{A} \cdot \vec{n}$$

ارتفاع $\times$ مساحت = حجم

$$\Rightarrow |\vec{B} \times \vec{C}| \vec{A} \cdot \vec{n} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

* بردار ضرب سه گانه :



$$\vec{r} = n_a \vec{a} + n_b \vec{b} + n_c \vec{c}$$

$$n_a, n_b, n_c = \text{اعداد ضرایب}$$

اعداد سه گانه با ۲ توصیف متفاوت

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}, \quad \vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}, \quad \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{a} = \vec{b}' \cdot \vec{b} = \vec{c}' \cdot \vec{c} = 1$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{b} = \vec{a}' \cdot \vec{c} = \vec{b}' \cdot \vec{a} = \vec{b}' \cdot \vec{c} = \vec{c}' \cdot \vec{a} = \vec{c}' \cdot \vec{b} = 0$$

* Vector product :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$$

* Gradient $\Rightarrow$ Point function.

در (x, y, z) یک نقطه مشخص باشد

$\psi(x', y', z) = \psi(x, y, z)$ independent of the rotation of our coordinate.

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \Rightarrow a_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$$

در این جا ψ اسکالر است - مقدارش از دستگاه مختصات جداست.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \Rightarrow A_i = \sum_j a_{ij} A_j \quad (B)$$

* بسط تیلور :

$$\psi(r+dr) = \psi(r) + \nabla \psi(r) \cdot dr$$

* مشتقات $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ به نفع مولفان یک بهار، کل می کنند این بهار داران مولفان زیارت.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \rightarrow \vec{\nabla} \phi = \hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Ex) $f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

$$\vec{\nabla} f(r) = \hat{i} \frac{\partial f(r)}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f(r)}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f(r)}{\partial z}$$

$$\hat{i} \frac{df}{dr} \frac{dr}{dx} + \hat{j} \frac{df}{dr} \frac{dr}{dy} + \hat{k} \frac{df}{dr} \frac{dr}{dz} \Rightarrow \frac{df}{dr} \left[\frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{r} \right]$$

$$\frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr} = \vec{r} \cdot \frac{df(r)}{dr}$$

Ex) بررسی کنید آیا بهار هست یا نه

جواب: * TA

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow A'_x = -y' = -(-\sin \beta x + \cos \beta y) = \sin \beta x - \cos \beta y$$

$$A_y \sin \beta + A_x \cos \beta$$

$$A'_y = x' \Rightarrow x \cos \beta + y \sin \beta = A_y \cos \beta - A_x \sin \beta$$

Ex) $\vec{A} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = -x \hat{i} + y \hat{j} \rightarrow \begin{cases} A_x = -x \\ A_y = y \end{cases}$

$$\vec{A}' = A'_x \hat{i} + A'_y \hat{j} \rightarrow \begin{cases} A'_x = -x' \\ A'_y = y' \end{cases}$$

$$A'_x = -(x \cos \beta + y \sin \beta) = -x \cos \beta - y \sin \beta, A_x \cos \beta - A_y \sin \beta$$

$$A'_y = y' = -x \sin \beta + y \cos \beta$$

$$\vec{\nabla} \phi = \hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

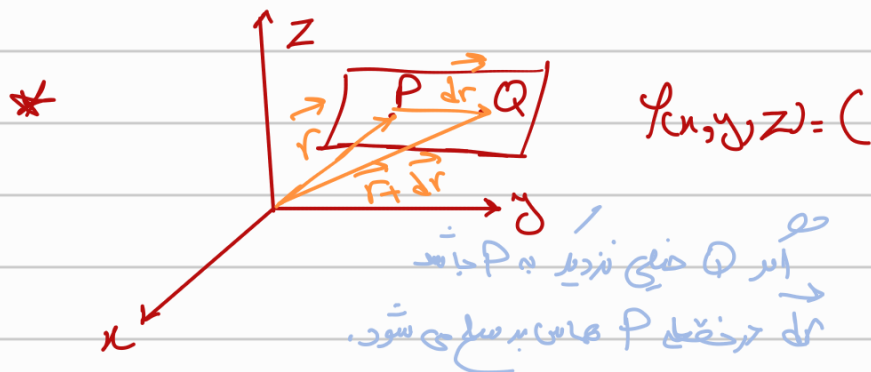
جواب: * TA

تعبیر هندسی در این:

* $\varphi(x, y, z) = C \leadsto D$ یک رویه در فضای 3

یک کره به شعاع C $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = C^2$

یک صفحه $\varphi(x, y, z) = x + y + z = C$



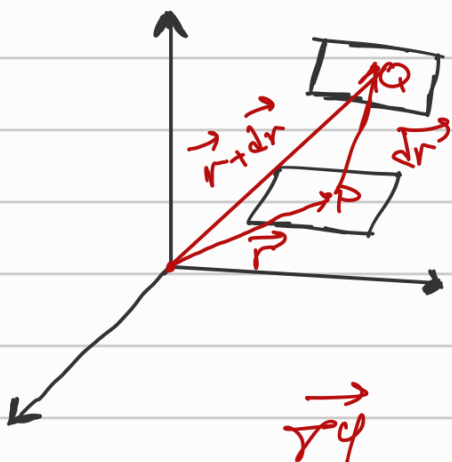
$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \Rightarrow d\varphi(x, y, z)$$

اگر $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0 = \varphi(Q) - \varphi(P) \Rightarrow \vec{r} \perp d\vec{r}$

* الفان ① در نزدیکی P و Q در مسیر $\vec{r}$:

$$d\varphi = \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp d\vec{r}$$

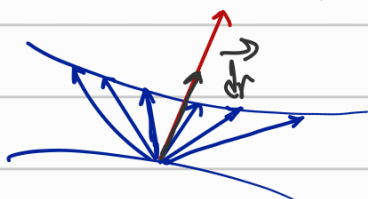
$\Rightarrow \int \vec{r} \perp d\vec{r} \Rightarrow \vec{r} \perp (C = \text{const})$ $\Rightarrow$ خطوط سطح $\Rightarrow$ سطح $\varphi = C$ به سطح است. $\Rightarrow$ سطح φ عمود $\vec{r}$



$$d\varphi = \vec{r} \cdot d\vec{r} = \varphi(Q) - \varphi(P) = C_2 - C_1 = \Delta C$$

$$\Delta C = |\vec{r}| |d\vec{r}| \cos \theta$$

$$\Rightarrow |d\vec{r}| = \frac{\Delta C}{|\vec{r}| \cos \theta}$$



* $\vec{r}$ جهت مایه هم تغییرات φ است.

Ex) $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = r$

$$\nabla \varphi = \hat{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Rightarrow \hat{i} \frac{x}{r} + \hat{j} \frac{y}{r} + \hat{k} \frac{z}{r}$$

$\frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$



* 1.7 Divergence: $\vec{\nabla}$.

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} V_x + \hat{j} V_y + \hat{k} V_z \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

1f $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \vec{r} f(r)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \nabla [\vec{r} f(r)] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [x f(r)] + \frac{\partial}{\partial y} [y f(r)] + \frac{\partial}{\partial z} [z f(r)]$$

$$\Rightarrow x f(r) + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow 3 f(r) + \frac{df}{dr} \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r} + \frac{z}{r} \right)$$

$\vec{r} \cdot \vec{r} f$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3 f(r) + \frac{df}{dr} \left[\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} \right] = 3 f(r) + r \frac{df}{dr}$$

* تعبير فیزیکی Divergence :

فصل تراکم بزرگ باد انسیته: $\rho(x, y, z, t)$ (جرم) t در نقطه (x, y, z) در یک لحظه

$\rho(x, y, z, t)$ است در نقطه واحد و واحد ρ محاسبه می شود. $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ $\text{Div } \rho \vec{v}$ یعنی خاصیت جرم و انرژی.

$$\dot{x} = ct, \dot{v} = c \Rightarrow 0 = \nabla \cdot (c \vec{P}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial (c P_x)}{\partial x} + \frac{\partial (c P_y)}{\partial y} + \frac{\partial (c P_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

1.8 Curl $\vec{v}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \Rightarrow \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \hat{j} (-)$$

$$\vec{\nabla} \times [f(x, y, z) \vec{v}(x, y, z)] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} [f v_z] - \frac{\partial}{\partial z} [f v_y] =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} v_z + f \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} v_y - f \frac{\partial v_y}{\partial z} \Rightarrow f \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial y} v_z - \frac{\partial f}{\partial z} v_y \right]$$

$$= f (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + [\vec{\nabla} f \times \vec{v}] \Rightarrow \vec{\nabla} \times (f \vec{v}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{v} + f \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

(معمولاً) (معمولاً) (معمولاً)

* این قانون را می‌توان برای ضرب داخلی هم به کار برد.

$$\vec{\nabla} \cdot [f(x, y, z) \vec{v}(x, y, z)] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial (f v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (f v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (f v_z)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} v_x + f \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + f \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} v_z + f \frac{\partial v_z}{\partial z} \Rightarrow f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{v}$$

If $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ is solenoidal, $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$
 $\vec{v}$ غیر چرخشی.

$$\text{Ex) } \vec{\nabla} \times [\vec{r} f(r)] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} [z f(r)] - \frac{\partial}{\partial z} [y f(r)]$$

$$z \times \frac{\partial}{\partial r} - y \times \frac{\partial}{\partial r} = 0 \quad \vec{r} f(r) = \vec{v}$$

$$* \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

1: $\vec{B}$ is a vector field

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B} + (\vec{B} \times \vec{\nabla}) \times \vec{A}$$

$$* \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

$$* \vec{\nabla} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}$$

1.9

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi$$

b) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi$

c) $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$

d) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V})$

e) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$

$$a) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Rightarrow \nabla^2 \psi \Rightarrow \text{Laplacian of } \psi$$

$$\Rightarrow \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

* $\nabla^2 \psi = 0$ is called Laplace's equation

f) $\nabla^2 \psi = ?$

1: $\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right)$ (in spherical coordinates)

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} g(r) = \vec{r} \cdot \left[r \cdot \frac{dg(r)}{dr} \right] = \vec{r} \cdot \left[\vec{r} \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} \right]$$

$$\frac{r}{r} \frac{dg}{dr} + r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{dg}{dr} \right] \Rightarrow \frac{r}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2}$$

b)

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} \varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi & y\varphi & z\varphi \end{vmatrix} \Rightarrow \hat{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \hat{j} (-\varphi) + \hat{k} (y\varphi)$$

\$\Rightarrow \nabla \varphi \rightarrow\$ غير موجود

c)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{Solenoidal}$$

d)

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \rightarrow \text{جریان اولی: } \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

e)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - (\nabla \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} (\hat{i} V_x + \hat{j} V_y + \hat{k} V_z) \Leftarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

\$V_x, V_y, V_z\$ استوار هستند که از آنجا که لایه‌ها در جهت \$z\$ متوجه

$$\left[\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \end{array} \right] \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

معادلات ماکسول

3 اثبات \$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

D'Alembertion in the m, n dimensional
 (میان) (میان)

$$\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial t_j^2}$$

1.10 Vector integration

Linear integration

$$\int_C \varphi(x, y, z) d\vec{r}, \quad \int_C \vec{V}(x, y, z) \cdot d\vec{r}, \quad \int_C \vec{V}(x, y, z) \times d\vec{r}$$

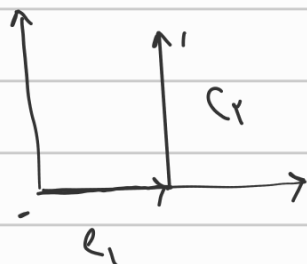
$$\int_C \varphi d\vec{r} = \hat{i} \int_C \varphi(x, y, z) dx + \hat{j} \int_C \varphi(x, y, z) dy + \hat{k} \int_C \varphi(x, y, z) dz$$

C یک منحنی در فضا است و می‌توان آن را پارامتریز کرد.

* جای مسیر C داده شده باشد تا انتگرال معادل فقط تابعی از x و y و z باشد

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_C F_x(x, y, z) dx + \int_C F_y(x, y, z) dy + \int_C F_z(x, y, z) dz$$

Ex) $F = -y\hat{i} + x\hat{j}$



$(0,0) \rightarrow (1,1)$

$$W = \int_{C_1} (-y dx + x dy) + \int_{C_2} (-y dx + x dy)$$

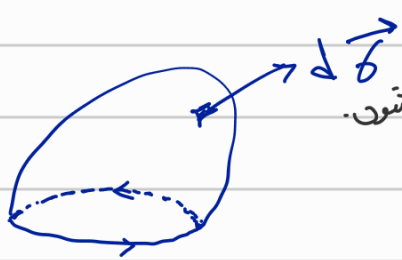
$$\Rightarrow \int_0^1 dy = 1$$

* Surface integrals

در سطح بسته باشد که به سطح بیرون می‌باشد.

$$\int_S \varphi(x, y, z) d\vec{\sigma}, \quad \int_S \vec{V}(x, y, z) \cdot d\vec{\sigma}, \quad \int_S \vec{V}(x, y, z) \times d\vec{\sigma}$$

S سطحی



* اگر سطح باز باشد: جهت $\vec{dS}$ از طریق صفحهی عمود بر بردار است منتهی می‌شود.

$$\int_S \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

فلاکس از طریق سطح
میدان بردار $\vec{V}$ از سطح
عبور می‌کند

Volume integrals

$$\int \varphi(x, y, z) dV$$

$$dV = dx dy dz$$

تعاریف برای این جبرهات انتگرال:

$$\textcircled{1} \quad \vec{\nabla} \varphi = \lim_{\int dV \rightarrow 0} \frac{\int \varphi d\vec{S}}{\int dV}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \lim_{\int dV \rightarrow 0} \frac{\int \vec{V} \cdot d\vec{S}}{\int dV}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{\nabla} \times \vec{V} = \lim_{\int dV \rightarrow 0} \frac{\int d\vec{S} \times \vec{V}}{\int dV}$$

احتمالاً $\int d\vec{S}$ بداند

حجمی است.

$$\Rightarrow \int dV = \int_{x_0}^{x_0+dx} \int_{y_0}^{y_0+dy} \int_{z_0}^{z_0+dz} dz dy dx$$

* جابجایی

$$\int_{EFCH} \varphi d\vec{S} = \int_{EFCH} \varphi \left(-\frac{dx}{y}, y, z \right) (-i dy dz)$$

$\Rightarrow$

انتگرال

$$-\hat{i} \int \left[\varphi(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(-\frac{dx}{r} \right) \right] dy dz$$

$$\int \varphi d\vec{\sigma} = \int \varphi \left(\frac{dx}{r}, y, z \right) e^{\hat{i}} dy dz$$

ABCD

در جهت محور مثبتی

$$\hat{i} \int \left[\varphi(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{r} \right] dy dz$$

$$\int \varphi d\vec{\sigma} = \hat{i} \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz = \hat{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy dz$$

در جهت محور موازی با x

$$\vec{\nabla} \varphi d\tau = \int \varphi d\vec{\sigma} \Rightarrow \vec{\nabla} \varphi = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \varphi d\vec{\sigma}}{d\tau}$$

* برای اینکه ثابت کنیم
در جهت موازی است و خط
که عمود است.

* The Gauss's theorem

* انتگرال سطحی از یک میدان بردار به انتگرال
همین حال میدان در یک حجم

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} \quad (*)$$

$$S = \sqrt{n}$$

به یک بردار نیست

S در جهت n است

Proof:



$\rho(x, y, z)$
 $\vec{V}(x, y, z)$
مجموعه را به قطب و دفرانسیال
قسمت کنید

فلوئید
بر واحد زمان

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) d\tau$$

$$(\rho \vec{V}) \cdot \vec{V}$$

سرعت

$$\sum \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{تکامل}} \underbrace{\leq}_{\text{مطلوب}} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \underbrace{\leq}_{\text{تکامل}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\epsilon$$

انتگرال $\vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$ از طرفه مشترک حذف می شود و از طرفه مطلوب (2) بر می آید

* در نتیجه $\vec{v}$ تقصیر داخل حذف می شوند
انتگرال $\vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$ از طرفه مطلوب ها و انتگرال

$$\underbrace{\leq}_{\text{تکامل}} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \underbrace{\leq}_{\text{مطلوب}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\epsilon$$

همه سطح خارج از فرض می ماند

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\epsilon$$

$$\begin{aligned} * \vec{\nabla} \cdot (u \vec{v}) &= \vec{\nabla} u \cdot \vec{v} + u \nabla^2 v \\ * \vec{\nabla} \cdot (v \vec{u}) &= \vec{\nabla} v \cdot \vec{u} + v \nabla^2 u \Rightarrow \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (u \vec{v} - v \vec{u}) = u \nabla^2 v - v \nabla^2 u$$

از طرفین انتگرال می گیریم

$$** \int_S (u \vec{v} - v \vec{u}) \cdot d\vec{\sigma} = \int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\epsilon$$

(تفاضل تقصیر)

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (u \vec{v}) d\epsilon = \int_V (\vec{\nabla} u \cdot \vec{v} + u \nabla^2 v) d\epsilon$$

تفاضل تقصیر

$$\Rightarrow \oint (u \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma} = \int_V (\vec{\nabla} u \cdot \vec{v} + u \nabla^2 v) d\epsilon$$

تفاضل تقصیر

Alternative forms of Gauss's theorem:

$$\vec{V}(x,y,z) = \varphi(x,y,z) \vec{a} \quad \text{بردار خطی} \quad \vec{V} = \varphi \vec{a} \quad \text{در بردار خطی خاص} \quad \text{قرار دهید}$$

$$\int \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \varphi) d\tau = \int_S \vec{a} \varphi \cdot d\vec{\sigma} \quad * \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \varphi) = \gamma$$

$$\vec{a} \left[\int \vec{\nabla} \varphi d\tau - \int_S \varphi d\vec{\sigma} \right] = 0 \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \varphi + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \vec{\nabla} \varphi d\tau = \int_S \varphi d\vec{\sigma} \quad \text{معمول اول} \quad \text{معمول دوم}$$

$$2) \vec{V}(x,y,z) = \vec{a} \times \vec{P}(x,y,z) \quad \text{بردار خطی خاص قرار دهید}$$

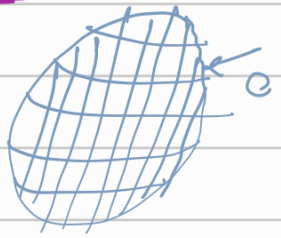
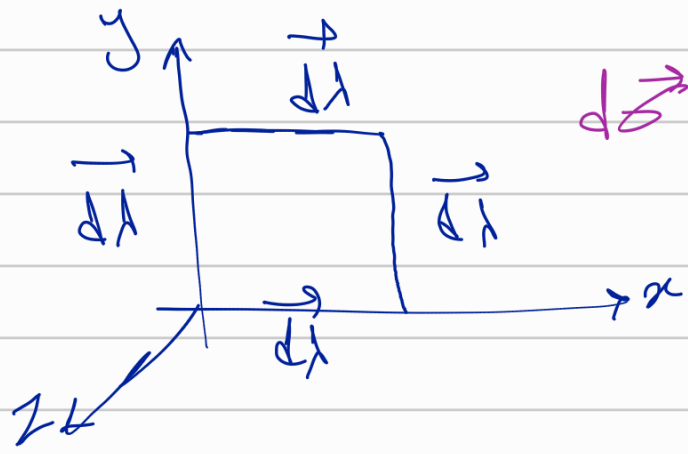
$$\int \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{P}) d\tau = \int (\vec{a} \times \vec{P}) \cdot d\vec{\sigma} \Rightarrow$$

* 1.12, Stokes's theorem

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

انتگرال سطحی و خطی از یک میدان بردار
وابسته به هم هستند

$$C = \partial S \Rightarrow \text{مرز } S \text{ است}$$



$$d\vec{\sigma} = \vec{k} dx dy$$

Sec 1.8

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_C (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

در هر نقطه از سطح جهت $d\vec{r}$ یک کاف
داریم و هستند

$$\vec{v} \cdot d\vec{r}$$

بر سطح مسطح

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

مسطح

مسطح

مسطح

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

مسطح

$$\Rightarrow \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

* نظریه پتانسیل :

$$F = -\nabla \phi \rightarrow \text{پتانسیل اسکالر}$$

مسطح

$$F \Rightarrow \nabla \times F = 0 \Rightarrow \oint F \cdot dr = 0$$

$$\Rightarrow \oint F \cdot dr = - \oint d\phi \Rightarrow \int_A^B F \cdot dr = \phi(A) - \phi(B)$$

$$\int F \cdot dr = \int d\phi \Rightarrow \text{مسطح}$$

اینهاست نظریه پتانسیل

$$F \cdot dr = (\nabla \phi \cdot dr) \Rightarrow (F + \nabla \phi) \cdot dr = 0 \Rightarrow F = -\nabla \phi$$

$$\int F \cdot dr = \int \nabla \times F \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \text{طبیعی استاتیسی}$$

فک پتانسیل اسکالری می توانیم داشته باشیم و داریم یک جسم m و یک جسم m .

$$F_G = -\frac{G m_1 m_2 r_0}{r^2} = -\frac{k r_0}{r^2}$$

$$\int_r^\infty F_0 dr = + (\varphi(\infty) - \varphi(r)) \Rightarrow \int F_0 dr = 0$$

$$+ \int_r^\infty \frac{kr_0}{r^2} dr = (\varphi(\infty) - \varphi(r)) \Rightarrow$$

$$\nabla \varphi = -F$$

$$\nabla \times F = 0$$

$$-\frac{1}{r} kr_0 = + \varphi(r) \Rightarrow -\frac{G_{m,mr}}{r} \quad \begin{matrix} \text{نیروی گرانشی} \\ \text{جاذبه گرانشی} \end{matrix}$$

$$F_c = kr r_0 = r$$

$$F_c = \omega^2 r r_0 \quad \text{نیروی گسیل (Ex)}$$

$$\Rightarrow \int_0^r kr r_0 dr = (\varphi(r) - \varphi(0))$$

$$\frac{r^2}{2} r_0 k \Big|_0^r = \frac{kr_0 r^2}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{kr_0 r^2}{2}$$

* تصویرهای مختلف از یک سطح

$$df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\Rightarrow df = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

* نیامنی بودن:

$$B = \nabla \times A$$

* اگر B میدان برداری باشد و A هم بردار باشد.

$$B = \nabla \times A$$

یعنی B میدان برداری است

$$B = (b_1, b_2, b_3)$$

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

$$b_3 = \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}$$

$$b_2 = \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}$$

= یعنی سه مؤلفه A و B را می توان از هم جدا کرد

$$a_1 = 0$$

$$b_r = -\frac{\partial a_r}{\partial n}$$

$$b_r = \frac{\partial a_r}{\partial n}$$

استدلال $\Rightarrow$ $a_r = \int_{x_0}^x b_r dn + f_r(y, z)$ $\Rightarrow$ مستقل نسبت به y

$a_{r2} = \int_{x_0}^x b_r dn + f_r(y, z)$ مستقل نسبت به z

$$\Rightarrow \frac{\partial a_r}{\partial y} - \frac{\partial a_r}{\partial z} = - \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial b_r}{\partial y} + \frac{\partial b_r}{\partial z} \right) dn + \frac{\partial f_r}{\partial y} - \frac{\partial f_r}{\partial z}$$

$$\frac{\partial a_r}{\partial y} - \frac{\partial a_r}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial b_1}{\partial n} dn + \frac{\partial f_r}{\partial y} - \frac{\partial f_r}{\partial z}$$

$$\frac{\partial a_r}{\partial y} - \frac{\partial a_r}{\partial z} = \int_{x_0}^x db_1 + \frac{\partial f_r}{\partial y} - \frac{\partial f_r}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial a_r}{\partial y} - \frac{\partial a_r}{\partial z} = b_1(x, y, z) - b_1(x_0, y, z)$$

$$f_r = \int_{y_0}^y b_1(x, y, z) dy \Rightarrow b_1(x, y, z) - b_1(x_0, y, z)$$

$$\vec{A} = \hat{i} \int_{x_0}^x b_r(x, y, z) dx + \hat{k} \left[\int_{y_0}^y b_1(x_0, y, z) dy - \int_{x_0}^x b_r(x, y, z) dn \right]$$

* این حل کامل نیست زیرا به $\vec{A}$ میتوان حد $\vec{\nabla}$ اضافه کرد چون $\vec{B}$ تغییر نمی کند.

$$\vec{A} = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

1.14 Gauss's law, Poisson's equation.

$$\vec{E} = \frac{q \vec{r}_0}{r^3}$$

در نقطه q واحد و در مساحت $\vec{r}_0$ قرار می دهیم

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

برای سطح بسته
برای سطح باز

* اثبات: از قضیه گاوس:

$$\oint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{r} \cdot \vec{\nabla} d\tau \Rightarrow \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\tau \quad (1)$$

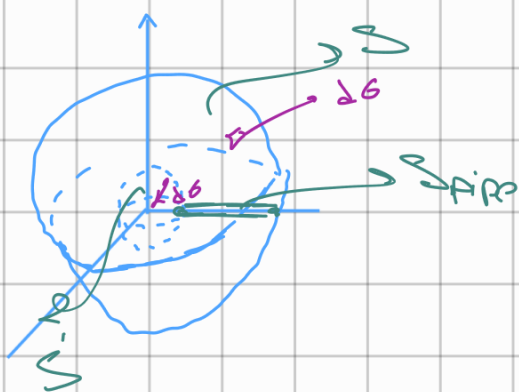
$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{r} f(r)] = 3f(r) + r \frac{df}{dr}, \quad f(r) = r^n \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{r} r^n] = (n+3)r^n \Rightarrow n = -2 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0, \quad r \neq 0 \quad (2)$$

← برای موقعی که مبدأ را در نقطه دلخواه

$$\Rightarrow \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

* قسمت اول



حار خارج از سطح بسته $S' + S''$
است بنابراین از قسمت قبل داریم:

* قسمت دوم:

$$\left(\int_{S'} + \int_{S''} \right) \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{S} \rightarrow 0$$

کوچک است. $\Rightarrow S''$



$$dA = R^2 d\Omega$$

$$4\pi R^2 = R^2 \Omega$$

$$\Omega = 4\pi$$

$$\oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = + \int_{S'} \frac{r \cdot r \cdot \delta^2 d\Omega}{r^3} = \int_{S'} d\Omega = 4\pi$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \text{برای هر سطح بسته یک قانون}$$

$$q = \int_V \rho d\tau \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \int_V \rho d\tau \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

طبق قضیه ماکسول داریم:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \Rightarrow \text{میدان پتانسیل} \Rightarrow \text{میدان خازنی}$$

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi$$

میدان خازنی

$$* F_G = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_G = -m G \vec{P}_{mass}$$

$$\phi = \frac{G m_1 m_2}{r}$$

S:  $dA = R^2 d\theta d\phi$
 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$

S: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$
 θ, ϕ



$$dA = \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\int dA = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi$$

1.15 Helmholtz's theorem

* قضیه هلمهولتز

و اگر هر دو خاصیت از غف:

۱- گرادیان مشخص

۲- دیورژانس مشخص

بوجود می آید

۳- مساحت محدود به دراز سطح مشخص باشد.

Proof:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}_1 = \vec{C}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1 = S$$

$$V_{in} = 1$$

* از بهمان خلف استفاده می کنیم یعنی V_r نیز در شرایط فوق صدق می کند.

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{V}_1 = \vec{C}$$

$$\Rightarrow \vec{W} = \vec{V}_1 - \vec{V}_r$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{W} = \nabla \cdot \vec{V}_1 - \nabla \cdot \vec{V}_r = 0 \quad (a)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{W} = \vec{\nabla} \times \vec{V}_1 - \vec{\nabla} \times \vec{V}_r$$

$$\vec{W} = -\vec{\nabla} \phi \Rightarrow W_n = V_{in} - V_{rn} = 1 - 1 = 0$$

$$\int_S u \vec{\nabla} v \cdot \vec{dS} = \int_V \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v d\tau + \int_V u \vec{\nabla}^2 v d\tau$$

* طبق قضیه گرین

$$u = v = \varphi \Rightarrow \int_S \varphi \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi d\tau + \int_V \varphi \nabla^2 \varphi d\tau$$

$$\Rightarrow - \int_V \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{c} d\tau = \int_V \vec{c} \vec{\nabla}^2 \varphi d\tau + \int_V \varphi \nabla^2 \varphi d\tau$$

$$\hookrightarrow B \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\Rightarrow - \int_V \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{w} d\tau = \int_V \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \varphi d\tau + 0 \Rightarrow \int_V \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \varphi d\tau = 0 \Rightarrow \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}'$$

* تابع در لغت تحریر است :

در یک جلد :

$$\begin{cases} \delta(x-a) = 0, & x \neq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \\ |x-a| < \epsilon \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x) \delta(x-a) dx$$

* هر سه یکسان

$$\begin{cases} \delta(\vec{r} - \vec{a}) = 0, & \vec{r} \neq \vec{a} \\ \int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) d\tau = f(\vec{a}) \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \text{ که هر یک از حجم و نقطه و دایره به هم دارد}$$

* یکفرد برای $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

$$\nabla^2 g(r) = \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{d^2 g}{dr^2}$$

از مثال 1.9.1 خارج :

$$g(r) = r^n \Rightarrow \nabla \cdot r^n = n(n+1)r^{n-1}$$

$$n = -1, r \neq 0 \Rightarrow \nabla \cdot \frac{1}{r} = 0 \quad 1$$

$$\Rightarrow \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r} d\tau = \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r} d\tau = - \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} d\tau = - \oint_S \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr = 4\pi$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r} d\tau = 1 \quad (2)$$

* از تعریف تابع δ :

$$\vec{a} = 0, f(\vec{r}) = 1$$

$$\Rightarrow \int_V \delta(\vec{r}) d\tau = 1 \quad (3)$$

* از مقایسه ① ② ③

$$\delta(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -4\pi \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

* حاصل می‌گیریم:

از میدان برداری $\vec{A}(\vec{r})$ جواب زیر صحت کند.

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}), \quad \vec{A}(\infty) = 0$$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{C}(\vec{r}), \quad \vec{C}(\infty) = 0$$

* اگر $\vec{A}$ و $\vec{C}$ را به حسب یک نسبت غیر جبری و یک نسبت سولوفیتسکی نوشت:

$$\vec{A} = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{V}$$

* به دنبال ϕ و $\vec{V}$ جواب زیر هستیم:

برای $\vec{A}$ درجه یک α و $\vec{C}$ درجه یک β آن را می‌توانیم

⑧ داده شود در آن ϕ و $\vec{A}$ به حسب α و β

جواب می‌دهد و α و β داده شده است.

$$\phi(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2$$

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2$$

$r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = -\nabla^2 \phi$$

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

الاجابة :

$$\nabla_i \phi(r_i) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r_i) \nabla_i \frac{1}{r_{ij}} d\tau$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r_i) [-\epsilon_0 \delta(r_i - r_j)] d\tau = -\sum \rho(r_i)$$

نفسه

$$\vec{A} = \hat{j} \int_{x_0}^x b_y(x, y, z) dx + \hat{k} \left[\int_{y_0}^y b_x(x, y, z) dy - \int_{x_0}^x b_z(x, y, z) dx \right]$$

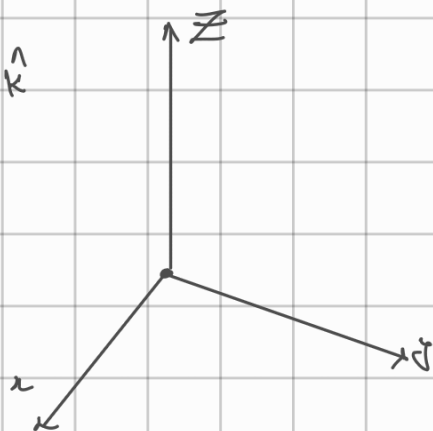
$$q_1 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{بذلك}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\text{Ex) } \vec{B} = B_1 \hat{i} + B_2 \hat{j} + B_3 \hat{k}$$

$$\vec{A} = A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}$$

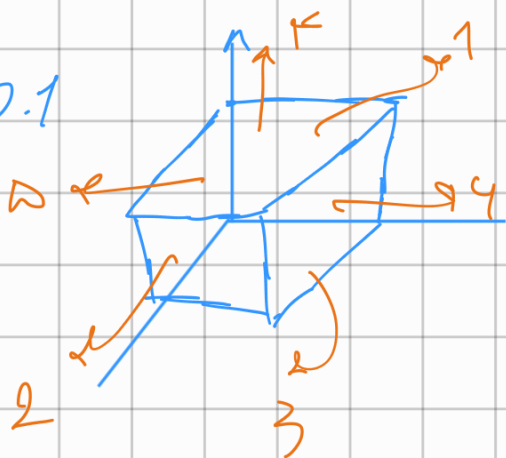
$$\vec{B} = B_3 \hat{k}$$



$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} =$$

$$\frac{1}{3} \int \vec{r} \cdot d\vec{\sigma}$$

Ex) 5.10.1



$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_S \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_1 \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} + \int_2 \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} + \int_3 \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} + \int_4 \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} + \int_5 \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} + \int_6 \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 1: \int (y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (-\hat{i} dy dz) & \quad 5: \int (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (\hat{k} da dy) \\
 2: \int (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (x\hat{i} dy dz) & \quad 6: \int (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (y\hat{j} dz da) \\
 3: \int (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot (-\hat{k} da dy) & \\
 4: \int (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (\hat{k} da dy) & \Rightarrow \mu
 \end{aligned}$$

$$Ex) 2.11.1 \quad \frac{1}{\mu} \int \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} = V \Rightarrow \frac{1}{\mu} \int \vec{r} \cdot \vec{r} dv = \frac{1}{\mu} \times \mu V \int dv = V$$

$$Ex) \vec{V} = iV(x,y) - \hat{j} V(x,y)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(iV(x,y) - \hat{j} V(x,y) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\vec{r} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V(x,y) & -V(x,y) & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$Ex) 3.11.1 \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

$$Ex) 9.12.1 \quad \oint \vec{a} \cdot d\vec{r} = - \oint \vec{r} \cdot d\vec{a}$$

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int \vec{\nabla} \times (u \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma} \Rightarrow \int [\vec{\nabla} u \times \vec{v} + u \vec{\nabla} \times \vec{v}] \cdot d\vec{\sigma}$$

$$= - \int_S (\vec{\nabla} v \times \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\sigma} = - \int_S [\vec{\nabla} \times (v \vec{\nabla} u) - v \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u] \cdot d\vec{\sigma} =$$

$$= \int \vec{\nabla} \times (v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\sigma} = - \oint v \vec{\nabla} u \cdot d\vec{r}$$

Ex) $\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$B_x = - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{x}{r^3}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{y}{r^3}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{z}{r^3}$$

$$A_y = - \int \frac{x}{r^3} dz = - \int \frac{x dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -x \int \frac{dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$= x \int \frac{a(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{(a^2 + a^2 \tan^2 \theta)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$z = a \tan \theta$$

$$dz = a \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{x}{a^2} \int \frac{(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} = \frac{-x}{a^2} \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

$$\frac{z}{a} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{z}{a} = \frac{\sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \Rightarrow$$

$$\frac{z}{a} = \frac{1}{1 - \sin^2 \theta}$$

line elements in curved ^{linear} coordinates

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad i=1,2,3$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j$$

$$= \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^3 \left[\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k \right) \right]$$

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial x}{\partial q_j} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_j} \frac{\partial y}{\partial q_k} \Rightarrow \sum_{j,k} \left[\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) dq_j dq_k \right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} = g_{ij} \Rightarrow g_{ij} = \text{metric on } ds^2$$

$$* g_{jk}$$

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j$$

$$g_{ij} = 0, i \neq j$$

* g_{ij} هي قيم متبادلة

$$h_1, h_2, h_3 = 0$$

$$g_{ii} = h_i^2, i=1,2,3$$

$$ds^2 = g_{11} (dq_1)^2 + 2g_{12} dq_1 dq_2 + 2g_{13} dq_1 dq_3 + g_{22} (dq_2)^2 + 2g_{23} dq_2 dq_3 + g_{33} (dq_3)^2$$

$$g_{11} (dq_1)^2 + g_{22} (dq_2)^2 + g_{33} (dq_3)^2 = \sum_{i=1}^3 g_{ii} (dq_i)^2 = h_1^2 (dq_1)^2 + h_2^2 (dq_2)^2 + h_3^2 (dq_3)^2$$

هنا سنعمل على

* انشغال خلية CLE:

$$\begin{cases} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ d\vec{r} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz \end{cases}$$

$$\vec{r} = \hat{e}_1 u + \hat{e}_2 v + \hat{e}_3 w$$

$$CLE \Rightarrow \begin{cases} ds^2 = h_1^2 (dq_1)^2 + h_2^2 (dq_2)^2 + h_3^2 (dq_3)^2 \\ d\vec{r} = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{e}_3 h_3 dq_3 \end{cases} \quad (P)$$

$$\Rightarrow \int \vec{r} \cdot d\vec{r} = \int (v_1 h_1 dq_1 + v_2 h_2 dq_2 + v_3 h_3 dq_3) \quad (Q)$$

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i h_i dq_i \xrightarrow{\div h_i dq_i} \hat{e}_i \quad (1)$$

$$\frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \frac{e_i \cdot h_i}{h_j} \left(\frac{dq_i}{dq_j} \right) \rightarrow \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \hat{e}_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{1}{h_j} \left[\hat{i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right]$$

$$d\vec{r} = \hat{e}_1 ds_1 + \hat{e}_2 ds_2 + \hat{e}_3 ds_3 = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{e}_3 h_3 dq_3$$

che $\rightarrow$ متداخل سطحی φ $\left[\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}^* \right]$

$$d\vec{r} = \hat{e}_1 ds_1 + \hat{e}_2 ds_2 + \hat{e}_3 ds_3 = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{e}_3 h_3 dq_3$$

$$d\vec{r} = \hat{e}_1 ds_1 + \hat{e}_2 ds_2 + \hat{e}_3 ds_3 = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{e}_3 h_3 dq_3$$

$$d\vec{r} = \hat{e}_1 ds_1 + \hat{e}_2 ds_2 + \hat{e}_3 ds_3 = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{e}_3 h_3 dq_3$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = (ds_1, ds_2, ds_3)$$

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

$$d\tau = \sqrt{|g|} d^3q = \sqrt{h_1^2 h_2^2 h_3^2} dq_1 dq_2 dq_3$$

che $\rightarrow$ متداخل سطحی φ

$$(g) = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{A} = \hat{e}_1 A_1 + \hat{e}_2 A_2 + \hat{e}_3 A_3 \\ \vec{B} = \hat{e}_1 B_1 + \hat{e}_2 B_2 + \hat{e}_3 B_3 \end{cases}$$

che $\rightarrow$ متداخل سطحی φ

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\begin{matrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \hat{e}_2 & \hat{e}_3 & \hat{e}_1 \\ \hat{e}_3 & \hat{e}_1 & \hat{e}_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} =$$

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} =$$

Differential operators in che

*

Vector

- Gradient

$$\psi = \psi(q_1, q_2, q_3)$$

$$ds_i = h_i dq_i, \quad \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial s_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

$$\nabla \psi = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{e}_i}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} = \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3}$$

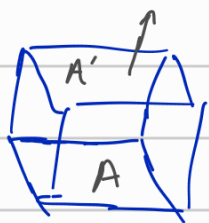
Divergence:

$$\vec{V} = \vec{V}(q_1, q_2, q_3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\int \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}}{\Delta \tau}$$

خارج از محدوده فضای

Proof:



$$d\vec{\sigma}_1 = \hat{e}_1 d\sigma_x d\sigma_y$$

فلاکس

$$\text{از طریق سطح } A' \text{ و } A = \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} \Big|_A - \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} \Big|_{A'}$$

$$\left[\vec{V} \cdot d\vec{\sigma} \Big|_A + dq_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (\vec{V} \cdot d\vec{\sigma}) \right]$$

$$dq_1 \frac{\partial}{\partial q_1} [V_1 h_1 h_2 h_3] dq_2 dq_3$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3$$

$$\text{مجموع} = \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2 h_3) \right] dq_1 dq_2 dq_3 \times \frac{1}{h_1 h_2 h_3} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2 h_3) \right]$$

$$\vec{V} = V_1 \hat{e}_1 + V_2 \hat{e}_2 + V_3 \hat{e}_3 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2 h_3) \right]$$

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right]$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 h_1 & \hat{e}_2 h_2 & \hat{e}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ v_1 h_1 & v_2 h_2 & v_3 h_3 \end{vmatrix}$$

→ $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ اگرچه به است آسان حذف می شود

$$* \quad h_i^r = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^r + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^r + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^r$$

2.3 Special coordinate systems (Ar, Ar-vec)

Rectangular cartesian system:

$$\begin{cases} x = q_1, y = q_2, z = q_3 \\ \hat{e}_1 = \hat{i}, \hat{e}_2 = \hat{j}, \hat{e}_3 = \hat{k} \\ h_1 = h_x = 1, h_2 = h_y = 1 \\ h_3 = h_z = 1 \end{cases}$$

⇒ در اینجا 1-5 به دست می آید
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}, \vec{\nabla} \times \vec{V}, \vec{\nabla} \phi$ و ϕ در اینجا به دست می آید

2.4 Circular cylindrical coordinates

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 = \rho \\ q_2 = \varphi \\ q_3 = z \end{cases}$$

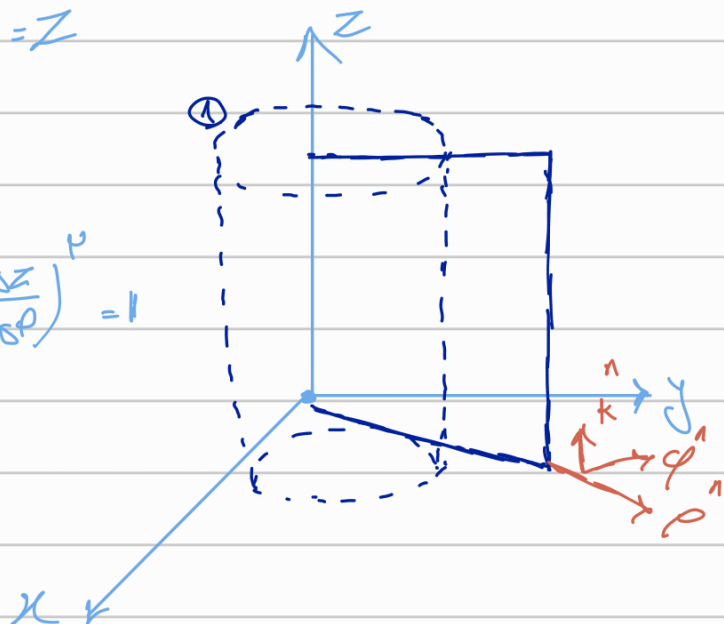
در اینجا $\rho = r, \varphi = \theta$ به دست می آید
 $z = z$

$$h_1^r = h_2^r = h_3^r \quad \textcircled{1}$$

$$* \quad h_1^r = h_2^r = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^r + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^r + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^r = 1$$

$$h_2^r = h_3^r = \rho$$

$$h_3^r = h_z = 1$$



$$\star d\vec{r} = \hat{r} h_\rho d\rho + \hat{\phi} h_\varphi d\varphi + \hat{k} h_z dz = \hat{r} d\rho + \hat{\phi} \rho d\varphi + \hat{k} dz$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 (\hat{e}_i h_i dq_i)$$

یعنی سمت و رخ

$$\hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{e}_3 h_3 dq_3$$

$$d\vec{r} = d\vec{G} + d\vec{A} + d\vec{C} \Rightarrow$$

(7)

$$\hat{e}_1 h_1 h_2 dq_1 d\rho + \hat{e}_2 h_1 h_2 dq_1 dq_2 + \hat{e}_3 h_1 h_2 dq_1 dq_3$$

$$d\vec{r} = \hat{r} \rho d\varphi dz + \hat{\phi} d\rho dz + \hat{k} \rho d\rho d\varphi$$

یعنی دوری و ...

$$d\tau = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$$

*

$$\nabla \phi = \hat{r} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} V_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right]$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{r} & \rho \hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix}$$

$$\star \hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

$$= \frac{1}{h_i} \left[\hat{r} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \hat{\phi} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right]$$

$$\vec{\nabla} \vec{V} = \vec{\nabla}^T \left(\hat{\rho} V_{\rho} + \hat{\varphi} V_{\varphi} + \hat{k} V_z \right)$$

کاملاً: $\vec{\nabla} \vec{V}$ ، اسقاطی:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$$

$$\vec{\nabla} \vec{V} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$$

$$\vec{\nabla} V_{\rho} = \vec{\nabla} V_{\rho} - \frac{1}{\rho} V_{\rho} - \frac{r}{\rho^2} \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla} V_{\varphi} = \vec{\nabla} V_{\varphi} - \frac{1}{\rho^2} V_{\varphi} + \frac{r}{\rho^2} \frac{\partial V_{\rho}}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla} V_z = \vec{\nabla} V_z$$

EN) 2.24.1 Navier-Stokes term:

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] \rightarrow \vec{\nabla} = \hat{k} r \hat{\rho} \quad V_{\varphi} = V_{\rho} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & V(\rho) \end{vmatrix} = -\hat{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \rho} = \vec{\omega}$$

$$\vec{V} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{k} \\ 0 & 0 & V(\rho) \\ 0 & -\frac{\partial V}{\partial \rho} & 0 \end{vmatrix} = \hat{\rho} V(\rho) \frac{\partial V}{\partial \rho} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{0} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V \frac{\partial V}{\partial \rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

2.5 Spherical polar coordinate

$$q_1 = r \quad q_2 = \theta \quad q_3 = \phi$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$h_i = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2$$

$$\begin{cases} h_r = h_\theta = h_\phi = r \\ h_r = h_\theta = r \\ h_r = h_\phi = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} e_r = \hat{r} \\ e_\theta = \hat{\theta} \\ e_\phi = \hat{\phi} \end{matrix}$$

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i} \left[\frac{\partial x}{\partial q_i} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \hat{k} \right]$$

$$d\vec{r} = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{e}_3 h_3 dq_3$$

$$d\vec{r} = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\phi} r \sin \theta d\phi \quad (2)$$

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$dr = \hat{r} dr + r d\hat{r}$$

$$d\hat{r} = \hat{\theta} d\theta + \hat{\phi} \sin \theta d\phi$$

* نشان برادران متعامد بودن است و هر دو:

جایگزینی کنیم:

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow (\sin \theta \cos \phi)(r \cos \theta \cos \phi) + (\sin \theta \sin \phi)(r \cos \theta \sin \phi) - (\cos \theta)^2$$

$$r \sin \theta \cos \theta [\cos^2 \phi + \sin^2 \phi - 1] = 0 \quad (2)$$

شرط دیگر: $g_{rr} = g_{r\theta} = g_{r\phi} = 0$
 $g_{\theta\theta} = g_{\phi\phi} = 0$
 و چون $g_{rr} = g_{\theta\theta} = g_{\phi\phi} = 0$ است پس g_{ij} و g_{ji} (ماتریس) ...
 نتیجه میگیریم متعامد بودن.

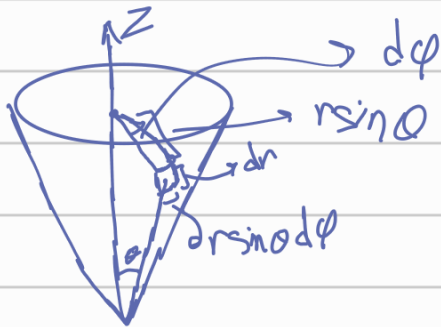
$$d\vec{S} = \hat{r} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi - \hat{r} r^2 d\theta$$

* اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ (پول) $\Rightarrow d\vec{S} = 0$

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi \Rightarrow \int d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi$$

کلیه

* اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ (پول) $\Rightarrow d\vec{S} = 0$



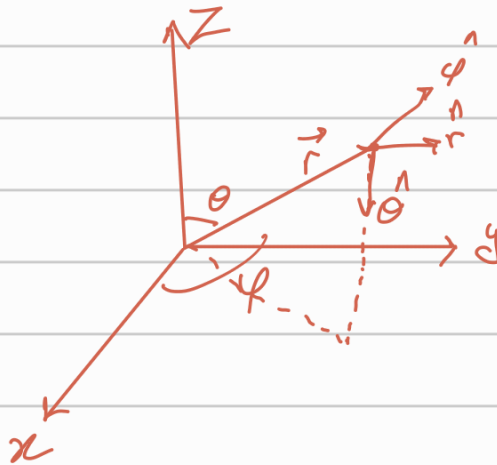
$$d\vec{S} = \hat{r} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$d\vec{S} = \hat{r} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

کلیه

* Unit Vectors:

$$\hat{e}_r = \hat{r}, \quad \hat{e}_\theta = \hat{\theta}, \quad \hat{e}_\phi = \hat{\phi}$$



* $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ in terms of $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

$$\hat{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{i} \frac{\partial x}{\partial r} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial r} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial r} = \hat{i} \sin\theta \cos\phi + \hat{j} \sin\theta \sin\phi + \hat{k} \cos\theta$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r} \left[\hat{i} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] = \hat{i} \cos\theta \cos\phi + \hat{j} \cos\theta \sin\phi - \hat{k} \sin\theta$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\hat{i} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \hat{j} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \hat{k} \frac{\partial z}{\partial \phi} \right] = \frac{1}{\sin\theta} \left[-\hat{i} \sin\theta \sin\phi + \hat{j} \sin\theta \cos\phi + \hat{k} 0 \right]$$

$$= -\hat{i} \sin\phi + \hat{j} \cos\phi$$

$$\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \cdot \vec{V}, \vec{\nabla} \times \vec{V}, \vec{V}$$

* اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ (پول) $\Rightarrow d\vec{S} = 0$

$$\Rightarrow \vec{V} = \hat{r} V_r + \hat{\theta} V_\theta + \hat{\phi} V_\phi \rightarrow \text{سرکټر ټولې ازموږه صولنه خوښه.}$$

$$\vec{\nabla} \psi = \hat{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{1}{r \sin \alpha}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin \alpha} \left[\sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \alpha V_\theta) + r \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right] \quad \text{خا اموانه د ټولې صولنه خوښه.}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin \alpha} \left[\sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin \alpha} \left[\sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin \alpha} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \alpha \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ V_r & r V_\theta & r \sin \alpha V_\phi \end{vmatrix}$$

* د ټولې صولنه خوښه، ټولې صولنه خوښه، ټولې صولنه خوښه

$$\nabla^2 \vec{V} = \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{V})$$

Ex) 2.5

$$\psi = \vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla} f(r) = r^n \frac{df(r)}{dr}$$

$$\vec{V} = r^n f(r)$$

$$V_r = f(r) = V_\theta = V_\phi = 0$$

$$\vec{V} = r^n f(r) \Rightarrow V_r = f(r) \Rightarrow V_\theta = V_\phi = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f(r)) = \frac{r}{r} f(r) + \frac{df(r)}{dr}$$

$$\psi = f(r) \Rightarrow \nabla^2 \psi = \nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = \frac{r}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}$$

$$\nabla^2 r^n f(r) = V_r = f(r), V_\theta = V_\phi = 0 \Rightarrow \nabla^2 \chi V = 0$$

Ex) 25.2 Magnetic vector potential

$$\vec{A} = \varphi^n A_\phi(r, \theta)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 [\vec{r}_1 (\varphi^n A_\phi(r, \theta))]$$

$$A_r = A_\theta = 0, \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r \sin \theta} \left[r^n \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\phi) - \theta^n r \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\phi) \right] = r^n B_r + \theta^n B_\theta$$

$$\vec{r} = \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \begin{vmatrix} r^n & r \theta^n & r \sin \theta \phi^n \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ B_r & r B_\theta & r \sin \theta B_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \phi^n \left[\nabla^2 A_\phi(r, \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} A_\phi(r, \theta) \right]$$

* Separation of Variables

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

- Cartesian:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi(x, y, z) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

جوابه متعلق به

$$\Rightarrow Y Z \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + Z X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + X Y \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 X Y Z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

$$\frac{1}{n} \frac{\delta \chi}{\delta x^r} = - \frac{1}{\gamma} \frac{\delta \gamma}{\delta y^r} - \frac{1}{z} \frac{\delta z}{\delta z^r} - K^r = -L^r \Rightarrow \frac{1}{x} \frac{d\chi}{dz^r} = -L^r$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{Z, \gamma, \chi^r}$

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = X_l(x) Y_m(y) Z_n(z)$$

فرض کنیم l, m, n و χ متغیرهای مستقل باشند

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = \sum_{l, m, n} a_{lmn} X_l Y_m Z_n$$

Linear operator

$$L(a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2) = a_1 L(\psi_1) + a_2 L(\psi_2)$$

$\hookrightarrow L$ is Linear operator

$$L = \nabla^2 + K^r = \gamma (\nabla^2 + K^r) \psi = (\nabla^2 + K^r) \left(\sum_{l, m, n} a_{lmn} X_l Y_m Z_n \right)$$

$$\Rightarrow a_{lmn} \sum_{l, m, n} (\nabla^2 + K^r) (\psi_{lmn}) = 0$$

* نشان دهیم که این معادله برقرار است:

$$[\nabla^2 + P(x) + Q(y) + R(z) + K^r] \psi_{lmn}(x, y, z) = 0$$

* ضرایب اقلیدس:

$$(\nabla^2 + K^r) \psi(P, Q, Z) = 0$$

$$\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial P} \left(P \frac{\partial \psi}{\partial P} \right) + \frac{1}{P^r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + K^r \psi = 0 \Rightarrow \psi(P, Q, Z) = P \Phi(P) \Theta(Q) Z \chi(Z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial P} \left(P \frac{\partial P}{\partial P} \right) + \frac{1}{P^r} P Z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + P \Theta \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + K^r P \Theta Z = 0$$

$$\frac{1}{P P} \frac{\partial}{\partial P} \left(P \frac{\partial P}{\partial P} \right) + \frac{1}{P^r} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + K^r = 0$$

$$\frac{1}{\rho\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial \rho}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -k^r - \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\tilde{k}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + (n^r - k^r) Z = 0 \Rightarrow Z = Z_n(z)$$

$$\frac{\rho}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \frac{d\rho}{d\rho}) + n^r \rho^r - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^r$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} - m^r \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \Phi_m(\varphi)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} (\rho \frac{d\rho}{d\rho}) + (n^r \rho^r - m^r) \rho = 0 \Rightarrow \rho = \rho_{mn}$$

$$\psi_{mn}(\rho, \varphi, z) = \rho_{mn}(\rho) \Phi_m(\varphi) Z_n(z)$$

$$\nabla^r + k^r \rightarrow \text{is linear}$$

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m,n} a_{mn} \rho_{mn} \Phi_m Z_n$$

* ملاحظات كروية :

$$(\nabla^r + k^r) \psi(\rho, \varphi, z) = 0$$

$$\frac{1}{r^r \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^r \frac{\partial \psi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] = -k^r \psi$$

$$\psi(\rho, \varphi, z) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = k^r \sin \theta \left[-k^r - \frac{1}{r^r R} \frac{d}{dr} (r^r \frac{dR}{dr}) - \frac{1}{r^r \sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) \right] = -m^r$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^r \Phi = 0 \Rightarrow \Phi_m(\varphi)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^r \frac{dR}{dr}) + k^r r^r =$$

تقسيم بـ $\sin \theta$

$$= - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + \frac{m^r}{\sin^2 \theta} = Q$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (kr^2 - Q) R = 0 \Rightarrow R(r)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \left(\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - Q \right) \Theta = 0 \quad \Theta_{mq}$$

$$\psi_{mq} = R_q(r) \Theta_{mq} \Phi_m \Rightarrow \psi(r, \theta, \phi) = \sum_{qm} a_{qm} R_q(r) \Theta_{mq} \Phi_m$$

* نشان دهنده m و q در سطح فوق معادله زیر جوابی بوده است:

$$E_r) \left[\nabla^2 + f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} h(\phi) + h' r^2 \right] \psi(r, \theta, \phi) = 0$$

* فعلی معادله: $\nabla^2 \psi = 0$ است

$$J_i = \sigma E_i$$

* اگر J_i و E_i همسانگر باشند:

$$J_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j$$

* اگر J_i و E_i همسانگر نباشند:

در اینجا σ_{ij} یک ماتریس مرتبه دوم است.

* اگر بردارها $\vec{A}$ و $\vec{C}$ موازی نباشند:

$$\vec{A} = B \vec{C}$$

$$\Rightarrow A_i = \sum_j B_{ij} C_j$$

قانون یک سطح را می توان به صورت تغییرات مختصات
مکانی برداشته و انتقال مبداء مختصات مولفه ها همان
طبق قانون خاص تبدیل شعاعه.

هر از اندازه اندیشه مختصات باشد: x^i

مورد دوم:

$$A^i \rightarrow A^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} A^j$$

اندیشه جدید

$$B_i \rightarrow B_i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} B_j$$

* مبداءات مختصات $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}$ بنابراین هر دو برابر هستند.

$$B_j^i \rightarrow B_j'^i = \sum_{m,n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} B_{mn} \quad \text{rank}=r \quad \text{type}=(b,1)$$

$$A^{ij} \rightarrow A'^{ij} = \sum_{m,n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} A^{mn} \quad \text{rank}=r \quad \text{type}=(1,2)$$

$$C_{ij} \rightarrow C'_{ij} = \sum_{m,n} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} C_{mn} \quad \text{rank}=r \quad \text{type}=(0,2)$$

$$A^{i_1, \dots, i_m} \rightarrow A^{j_1, \dots, j_m} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j_m}}{\partial x^{i_m}} A^{i_1, \dots, i_m}$$

$$1.1.2 \quad g_{ij} =$$

TA*

$$d\vec{r} = \sum_i h_i dq_i \hat{e}_i \xrightarrow{dq_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \sum_i h_i \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_j} = h_j \hat{e}_j \rightarrow \hat{e}_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$$

$$\frac{1}{h_i} \left[\frac{\partial x}{\partial q_j} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_j} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_j} \hat{k} \right] \Rightarrow A \cdot B = AB \cos \theta_{AB}$$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = |\hat{e}_i| |\hat{e}_j| \cos \theta_{ij} \Rightarrow \frac{1}{h_i} \frac{1}{h_j} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial q_j} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial q_j} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial q_j} \right) \right] = \cos \theta_{ij}$$

g_{ij}

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}} g_{ij} = \cos \theta_{ij} \Rightarrow g_{ij} =$$

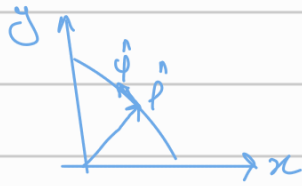
$$2.2.2 \quad \vec{\nabla} \cdot \hat{e}_i = \frac{1}{h_i h_r h_p} \frac{\partial (h_r h_p)}{\partial q_i}$$

$$\vec{A} = \hat{e}_i + \alpha \hat{e}_j + \beta \hat{e}_k$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_i h_r h_p} \left[\frac{\partial}{\partial q_i} (A_i h_r h_p) + \frac{\partial}{\partial q_r} (A_r h_i h_p) + \frac{\partial}{\partial q_p} (A_p h_i h_r) \right]$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{e}_i = \frac{1}{h_i h_r h_p} \frac{\partial (h_r h_p)}{\partial q_i}$$

7.4.2



$$x = \rho \cos \varphi$$

$$h_1 = 1$$

$$q_1 = \rho$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$h_2 = \rho$$

$$q_2 = \varphi$$

$$z = z$$

$$h_3 = 1$$

$$q_3 = z$$

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i} \left[\frac{\partial x}{\partial q_i} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \hat{k} \right]$$

rank $m+n$

type (m, n)

$$T^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{l_n}}{\partial x^{j_n}} T^{k_1 \dots k_m}_{l_1 \dots l_n}$$

Covariance (در بردار)

تغییرات متغیرها است

این بردار به بردارهای دیگر تبدیل می شود

$$F^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} = C^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n}$$

$$\Rightarrow (x^1, \dots, x^n): F^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} = C^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n}$$

$$A \pm B = C$$

جمع و تفریق متغیرها :

$$A^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} \pm B^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} = C^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n}$$

Is δ^i_j a tensor

$$\text{proof} \Rightarrow \delta^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} \delta^l_j$$

$$\text{if } \Rightarrow \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^L}{\partial x'^j} g^k_L$$

$$\sum_{k=1}^d \sum_{L=1}^d \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^L}{\partial x'^j} g^k_L \Rightarrow \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \delta^i_j$$

* انیسوی و با 8 مت و مت 8 با 8 مت :

$$S^{mn} = S^{nm} \Rightarrow S = S^T \text{ Symmetric}$$

$$A^{mn} = -A^{nm} \Rightarrow \text{Anti-Symmetric}$$

(e جاد و متقابل)

$$T^{mn} = \frac{1}{2} (T^{mn} + T^{nm}) + \frac{1}{2} (T^{mn} - T^{nm})$$

$S^{mn} \quad A^{mn}$

Contraction, Direct product:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B^i$$

عمل Contraction تعداد 11 نیست از 8 یا

اندیس از پایین مسئله و حتی می گیرند و این

$$A_i B^j = \text{a second rank tensor}$$

1 اندیس متراکم جمع می شوند.

$$i=j \Rightarrow A_i B^i = \text{rank} = \text{zero scalar}$$

اند rank برای 2 سورا اولی R به سوره از این

$$B'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^L}{\partial x'^j} B^k_L$$

فون rank 2 R می شود.

$$A = A_i dx^i$$

C (3.1)

$$C = C^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$$

$$B = B^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$(C, 0) \quad D = D^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$(C, 2) \quad E = E_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

$$(C, n): \quad T = T^{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_n}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_n}$$

Direct Product
ضرب مستقیم

$$A(CP), B(CP) \Rightarrow A(CP) \otimes B(CP) = C_{CP+CP}$$

$$a^i = 1 \quad \text{مردم} \quad \text{نفع} = (C, 0)$$

$$b_j = 1 \quad \text{مردم} \quad \text{نفع} = (C, 0)$$

$$a^i b_j = \text{مردم} \quad \text{نفع} = (C, 0)$$

$$\text{proof} \quad \int a^i \frac{\partial x^i}{\partial x^k} a^k$$

$$b_j = \frac{\partial x^k}{\partial x^j} b_k$$

$$a^i b_j = a^i \frac{\partial x^k}{\partial x^j} b_k = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k} a^k \right) \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^j} b_k \right) \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} a^k b_k$$

(3.1)

$$2(1) \quad A^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x^j} A^m_n$$

$$(1, 0) \quad B^{kl} = \frac{\partial x^k}{\partial x^p} \frac{\partial x^l}{\partial x^q} B^{pq}$$

$$A^i_j B^{KL} = C^i_j{}^{KL} \quad , C^{(3,1)}$$

$$\Rightarrow C^i_j{}^{KL} = A^i_j B^{KL} = \frac{\partial x^i}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^K}{\partial x^p} \frac{\partial x^L}{\partial x^q}$$

$$T_{(m+n)} Q^{(K+S)} \quad T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} Q_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s}$$

$$(m+r, n+s) \quad \text{لفع}$$

$$m+r+n+s \quad \text{موضوع}$$

$$A^i = (A^{\bar{0}}, A^1, A^r, A^{\bar{s}}) \rightarrow \text{هم فدا}$$

* TA غا ئاسو رها .

$$A_j = (A_0, A_1, A_r, A_s) \rightarrow \text{خا خوردا}$$

$$d\tilde{S} = dx^{\bar{0}} + dy^{\bar{1}} + dz^{\bar{r}} + c(dt)^{\bar{s}} = dx^{\bar{0}} + dy^{\bar{1}} + dz^{\bar{r}} - c dt^{\bar{s}}$$

$$A^i = (A^{\bar{0}}, A^1, A^r, A^{\bar{s}}) = (\vec{A}^{\bar{0}}, \vec{A})$$

$$A_j = (A_0, A_1, A_r, A_s) = (-A_0, \vec{A})$$

$$\sum_{p=0}^3 A^p \gamma_{p,\bar{p}} = A_{\bar{p}}$$

$$A^{\bar{0}} \gamma_{\bar{0},\bar{p}} + A^1 \gamma_{1,\bar{p}} + A^r \gamma_{r,\bar{p}} + A^{\bar{s}} \gamma_{\bar{s},\bar{p}} = A_{\bar{p}}$$

$$\underbrace{A^{\bar{0}} \gamma_{\bar{0},\bar{p}} + A^1 \gamma_{1,\bar{p}} + A^r \gamma_{r,\bar{p}}}_{A_0} + A^{\bar{s}} \gamma_{\bar{s},\bar{p}} = A_{\bar{p}} \Rightarrow A_0 = A_{\bar{p}}$$

$$* \quad A^i \rightarrow A_i$$

$$A^{\bar{0}} \gamma_{\bar{0},\bar{p}} = A_{\bar{p}}$$

$$\underbrace{A^{\bar{0}} \gamma_{\bar{0},\bar{p}} + A^1 \gamma_{1,\bar{p}} + A^r \gamma_{r,\bar{p}}}_{A_0} + A^{\bar{s}} \gamma_{\bar{s},\bar{p}} = A_{\bar{p}} \Rightarrow A^i = A_i$$

Dual Tensors

$d=3$ فضا ۳ بعدی تخت

$$C_{ij} = C_{ji}$$

$$C_i = \frac{1}{3!} \sum_{j,k} C_{ijk} \otimes \begin{cases} C_1 = C_{123} \\ C_2 = C_{231} \\ C_3 = C_{312} \end{cases}$$

اسکیلر $\rightarrow$ Scalar

$$L = \frac{1}{3!} \sum_{ijk} T_{ijk}$$

L and T_{ijk} are Hodge dual

$$\varphi = \varphi = |\varphi| \varphi$$

If C_{ij} is Pseudo tensor $\Rightarrow C_i$ is polar vector.

Proof:

$$C'_i = \frac{1}{r} \epsilon'_{ijk} C'_{jk} = \frac{1}{r} \left[|\alpha| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \epsilon_{pqr} \right] \left[|\alpha| a_{jm} a_{kn} C_{mn} \right]$$

$$C_{mn} \Rightarrow a_{ip} C_p \Rightarrow$$

C_i = Polar vector.

If C_{ij} is Polar, Then C_i is in a Pseudovector.

$$\text{Proof: } C'_i = \frac{1}{r} \epsilon'_{ijk} C'_{jk} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r} (|\alpha| a_{ij} a_{jk} a_{kr} \epsilon_{pqr}) (a_{jm} a_{kn} C_{mn}) =$$

$$\sum_{pqr} \sum_{m} a_{ip} C_p = |\alpha| a_{ip} \left(\frac{1}{r} \epsilon_{pqr} C_{qr} \right)$$

$$\frac{1}{r} |\alpha| \epsilon_{pqr} C_{qr} = |\alpha| a_{ip} \left(\frac{1}{r} \epsilon_{pqr} C_{qr} \right)$$

$$\epsilon_p \Rightarrow |\alpha| a_{ip} C_p \Rightarrow C_i \text{ is polar vector.}$$

اگر C_{ij} قطبی باشد ∇ سیم استیلر است
سیم استیلر باشد ∇ استیلر قطبی است.

* $\vec{V} = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} V_{ijk}$ | if V_{ijk} is Polar tensor $\Rightarrow \vec{V}$ is سیم استیلر

$$\text{Proof: } \vec{V}' = \frac{1}{3!} \epsilon'_{ijk} V'_{ijk} = \frac{1}{3!} \left[|\alpha| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \epsilon_{pqr} \right] \left[a_{jm} a_{kn} a_{lt} V_{mnl} \right]$$

$$\sum_{pqr} \sum_{m} \sum_{n} a_{ip} C_p \Rightarrow \vec{V}' = \vec{V}$$

$$L = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} T_{ijk}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

جابجایی ۳ مرتبه $\rightarrow$ جابجایی ۳ مرتبه $\rightarrow$ جابجایی ۳ مرتبه

* $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{jki} = -\epsilon_{kij} = +1$

* Hodge dual of H_{ijkl} = totally anti-symmetric $\rightarrow$

اگر H_{ijkl} استیلر باشد
حاصل شود تغییر ۲ مرتبه

$$H_{ijkl} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i & D_i \\ A_j & B_j & C_j & D_j \\ A_k & B_k & C_k & D_k \\ A_l & B_l & C_l & D_l \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{4!} \epsilon_{ijkl} H_{ijkl} \Rightarrow$$

Rank 2

anti-symmetric

= Li

$$\tilde{L}_{ij} = \frac{1}{2!} \epsilon_{ijk} L_{kl}$$

$$\text{Rank 3} = \epsilon_{ijk}$$

anti-symmetric

$$d=5 \rightarrow \epsilon_{ijklm}$$

$$a) A_i, b) B_{ij}$$

$$c) \epsilon_{ijk}, d) \epsilon_{ijkl}$$

$$e) \epsilon_{ijklm}$$

$$d = \text{تعداد ابعاد} = d$$

یا همگی

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_d} = \begin{cases} +1 & \text{اگر } i_1, \dots, i_d \text{ جایگشت زوج} \\ -1 & \text{اگر } i_1, \dots, i_d \text{ جایگشت فرد} \\ 0 & \text{اگر ۲ اعداد تکرار شوند} \end{cases}$$

$$\text{Hodge dual of } A_{i_1 \dots i_p} = \tilde{A}_{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{(d-p)!} \epsilon^{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{d-p}} A_{j_1 \dots j_{d-p}}$$

Atiyah
Singer

3.5 Dyadics

$$\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \vec{B}, \vec{A} \cdot \vec{B} \quad \epsilon_{ijk}, jkz \text{ dyad}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{i} \vec{j}) = (\vec{A} \cdot \vec{i}) \vec{j} = A_x \vec{j}$$

$$(\vec{i} \vec{j}) \cdot \vec{A} = \hat{i} (\hat{j} \cdot \vec{A}) = A_y \hat{i} \Rightarrow \vec{i} \vec{j} + \vec{j} \vec{i}$$

$$T = \vec{A} \vec{B} = (\hat{i} \hat{i} A_x B_x + \hat{i} \hat{j} A_x B_y + \hat{i} \hat{k} A_x B_z) + (\hat{j} \hat{i} A_y B_x + \hat{j} \hat{j} A_y B_y + \hat{j} \hat{k} A_y B_z) + (\hat{k} \hat{i} A_z B_x + \hat{k} \hat{j} A_z B_y + \hat{k} \hat{k} A_z B_z)$$

$$\vec{A} = \sum_i \hat{u}_i A_i, \vec{B} = \sum_j \hat{u}_j B_j, \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i \sum_j (\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j) A_i B_j = \sum_j \hat{u}_j \cdot \sum_i \hat{u}_i A_i B_j = \sum_j \hat{u}_j \cdot \vec{A} B_j = \vec{A} \cdot \sum_j \hat{u}_j B_j = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = \sum_i \hat{u}_i C_i \cdot \sum_j \hat{u}_j A_j = \sum_{ij} \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j C_i A_j \Rightarrow \sum_{ij} \hat{u}_j \cdot \hat{u}_i C_i A_j \quad (1)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = \sum_i \hat{u}_i A_i \cdot \sum_j \hat{u}_j C_j = \sum_{ij} \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j A_i C_j \stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \sum_{ij} \hat{u}_j \cdot \hat{u}_i A_j C_i \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \text{if } T_{ij} \neq T_{ji} \Rightarrow \vec{C} \cdot \vec{A} \neq \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$\text{if } T_{ij} = T_{ji} \Rightarrow \vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{C} \Rightarrow \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} \Rightarrow (\vec{C} \cdot \vec{A}) \cdot \vec{B} =$$

$$\vec{A} (\vec{B} \cdot \vec{C}) \Rightarrow \vec{B} = \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{\vec{C} \cdot \vec{A}} \right) \vec{A} \Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{A}$$

$$\text{if } T_{ij} = -T_{ji} \Rightarrow T_{ij} \text{ is anti symmetric.}$$

* اوصافیں جن کا لحاظ رکھنا ہے:

$$T_{xx} T_{xx} + T_{yy} T_{yy} + T_{zz} T_{zz}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 T_{xx} + y^2 T_{yy} + z^2 T_{zz}$$

$$\text{if } \vec{r} \cdot \vec{r} = 1, T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{بیضی کی شکل}$$

$$A'_{ij} = \sum_{KL} \frac{\partial x'_i}{\partial x_K} \frac{\partial x'_j}{\partial x_L} A^{KL} \rightarrow B'_{ij} = \sum_{KL} \frac{\partial x'_i}{\partial x_K} \frac{\partial x'_j}{\partial x_L} B^{KL}$$

معمولا به تنوعها: $\rightarrow$ دورددا. $\rightarrow$ به هورددا.

مقادیر مورد نیاز از تعداد مستقل هر چیزی یکی است.
مقادیر قبلی برابر مولد میر به تنوعها = مستقل از دستگاه مختصات است.

$$A^{KL} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}$$

مجموع و تفاضل خاصهها:

مقادیر عناصر متناظر را با هم جمع می‌کنیم. $A^{ij} + B^{ij} = C^{ij}$ خاصهها هم چنین.
مقدار داده جمع:

$$B'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_K} \frac{\partial x'_j}{\partial x_L} B^{KL}$$

$$\delta'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j}$$

مقدار یکتا به ترتیب: δ^{ij} در مرتبه دوم. δ^{ij} و δ_{ij} = سلف به تنوعها (همچنین وجود دارد).

تقابل: $A^{mn} = A^{nm}$ و $A_{mn} = A_{nm}$. $\Leftarrow$ فضا همسانگرد.

$$A \cdot B = A_i B_i$$

مقدار (مجموع) ضرب مستقیم:

قضیه خارج قسمت:

$$x_{(ij)} A_i = B_j, \quad x'_{ij} A'_i = B_j$$

$$x'_{(ij)} A'_i = \frac{\partial x'_j}{\partial x_m} B_m \Rightarrow x'_{(ij)} A'_i = \frac{\partial x'_j}{\partial x_m} B_m = \frac{\partial x'_j}{\partial x_m} x_{(km)} A_k$$

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_m} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} A'_i x_{(km)}$$

Determinant, Matrices and Group theory

* فصل ۱۱ :

Minor: C_{ij}

وزن در ضرایب را به حساب
بدست می آوریم

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_n & b_n & c_n & \dots \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

حجم مرتبه $(n-1) \times (n-1)$

Ex) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{ij} a_i b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^2 (\sum_{j=1}^2 \epsilon_{ij} a_i b_j) = \sum_{i=1}^2 a_i (b_1 - b_2)$

$(-1)^{i+j}$ Minor, Co-factor

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

* Ex) $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \sum_{j,k} a_1 b_j c_k \epsilon_{1jk} + \sum_{j,k} a_2 b_j c_k \epsilon_{2jk} + \sum_{j,k} a_3 b_j c_k \epsilon_{3jk}$

$$\Rightarrow \left[\sum_{j,k} \epsilon_{1jk} a_1 b_j c_k \right] + \left[\sum_{j,k} \epsilon_{2jk} a_2 b_j c_k \right] + \left[\sum_{j,k} \epsilon_{3jk} a_3 b_j c_k \right]$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{j,k} \epsilon_{1jk} a_1 b_j c_k \right] + \left[\sum_{j,k} \epsilon_{2jk} a_2 b_j c_k \right] + \left[\sum_{j,k} \epsilon_{3jk} a_3 b_j c_k \right] =$$

$$a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \Rightarrow$$

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \Rightarrow a_1 M_{11} - a_2 M_{21} + a_3 M_{31} = \sum_{i=1}^3 a_i M_{i1}$$

این را به این شکل می توان نوشت (جمع شود مرتبه $(n-1) \times (n-1)$ محض نمی شود)

proof: $\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_n + kb_n & b_n & c_n & \dots \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} (a_i + kb_i) b_j c_k \Rightarrow$

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k + \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} k b_i b_j c_k = D + 0$$

مقتضای است

* Solution of a set of homogeneous equation:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \quad z=x=y=0 \quad \text{پس} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$x \Delta = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} x \Delta &= 0 \\ y \Delta &= 0 \\ z \Delta &= 0 \end{aligned}$$

و اگر $\Delta \neq 0$ تنها جواب $x=y=z=0$ است.
و اگر $\Delta = 0$ ، حرایضات x, y, z می توانند حلال باشند.

* Solution of a set of inhomogeneous equation:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow x \Delta = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} x \Delta &= \Delta_x \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y \Delta &= \Delta_y \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \\ z \Delta &= \Delta_z \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \end{aligned}$$

اگر $\Delta = 0$ ، $\Delta_x \neq 0$ ، $\Delta_y \neq 0$ ، $\Delta_z \neq 0$
حرایضات معادلات جواب ندارند.

* از معادلات $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

و اگر $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ ، حرایضات معادلات جواب می تواند.

و اگر $\Delta = 0$ ، $\Delta_x \neq 0$ ، $\Delta_y \neq 0$ ، $\Delta_z \neq 0$ معادلات جواب می تواند (B) دارد.

4.2 Matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{if } \vec{v} = A\vec{u}$$

اگر $\vec{v}$ ، $\vec{u}$ طبق تعریف و سیرفته بردار باشند،
آنگاه A تانسور مرتبه 2 است (اثبات کنید)

$$A'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} A_{kl}$$

* representation (نمایش):

به عناصر ماتریس برای دستگاه کوئیر
و با تغییر مختصات عناصر عوض می شوند
یعنی به نمایش خطی می رود.

$$* A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$$

$$A+B=C \iff a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$$

$$A+B=B+A$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C, \quad (\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}, \quad \alpha A = A\alpha, \quad \alpha = \text{عدد}$$

$$AB=C \Rightarrow C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \quad AB \neq BA, \quad A(BC) = (AB)C$$

$$A(B+C) = AB+AC$$

* Direct product:

$$A_{m \times m}, B_{n \times n}$$

$$A \otimes B = C, \quad C_{m \times m, n \times n}$$

manipulation

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{12} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ a_{21} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{22} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

* $|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ ستون $\rightarrow$ Row vector , $A|x\rangle = |x\rangle$, $m \times n$ ماتریس $m \times n$
 $\langle x| = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\langle x'| = \langle x|A^T$
 $AB=BA$ فقط باشد B, A $n \times n$

- Diagonal matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{nn} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

* Trace $A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} , \text{Tr}(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_k A_{ik} B_{ki}$$

$$\Rightarrow \sum_k \left(\sum_i B_{ki} A_{ik} \right) = \sum_k (BA)_{kk} = \text{Tr}(BA)$$

* Inverse matrix

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$\text{Ex) } A^{-1} = \frac{C^T}{|A|} \rightarrow \neq 0$$

دترمینان

* $\rightarrow$ $\langle x|A|x\rangle$ مقادیر A

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$r' = Ar , \tilde{r}' = \tilde{r} \tilde{A} \Rightarrow \tilde{r}' r' = \tilde{r} \tilde{A} A r$$

$$\tilde{r}' r' = \tilde{r} \tilde{A} A r \Rightarrow \tilde{A} A = I \rightarrow \text{یعنی ماتریس متعامد}$$

$\rightarrow$ حفظ حقیقی طول بردار را ثابت نگه می‌دارد.

* $\rightarrow$ $\langle x|A|x\rangle$ مختلف :

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} , V' = UV$$

$$V'^+ V' = V'^+ U^+ U V = V^+ V$$

یعنی تبدیل بردار به طول بردار واحد، فقط مختصات آن‌ها می‌جاری

ماتریس متعامد:

$$\vec{i} = \vec{i} a_{11} + \vec{j} a_{12} + \vec{k} a_{13}$$

$$\vec{j} = \vec{i} a_{21} + \vec{j} a_{22} + \vec{k} a_{23}$$

$$\vec{k} = \vec{i} a_{31} + \vec{j} a_{32} + \vec{k} a_{33}$$

ماتریس متعامد
به دو ستون هر خط به دو
مربوط به دو خط دیگر

$$a_{ij} = \cos \alpha_{ij}$$

$$A^{-1} = \frac{C^T}{|A|}$$

$$\vec{r} = \vec{r}$$

$$x_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ماتریس متعامد:

$$A \tilde{A} = I$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\sum_i (a_{ij} a_{ik}) = \delta_{jk}$$

$$\Rightarrow \sum_i A_{ij} A_{ik} = \delta_{jk}$$

$$\tilde{A}_{ji} (A \tilde{A})_{jk}$$

$A^{-1} A = I$ ماتریس متعامد
بین دو به دو متعامد.

$$\sum_i x_i^2 \leq x_i^2 \Rightarrow \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) \left(\sum_k a_{ik} x_k \right)$$

$$\sum_{j,k} x_j x_k \geq a_{ij} a_{ik}$$

زمانی که است به شرط

$$\delta_{jk}$$



Inverse Matrix, A^{-1}

$$|x\rangle, |x'\rangle = A|x\rangle, |x\rangle = A^{-1}|x'\rangle$$

$$|x\rangle = A|x'\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |x\rangle = A^{-1}(A|x\rangle) \Rightarrow A^{-1}A = I \quad |x\rangle = |x\rangle$$

* دوران هر مقدار و ضرب ماتریس:

$$|x'\rangle = A|x\rangle \quad \text{جرفش اول}$$

$$|x''\rangle = B|x'\rangle \quad \text{جرفش دوم}$$

$$|x''\rangle = (BA)|x\rangle \Rightarrow x''_i = \sum_k (BA)_{ik} x_k$$

$$x''_i = \sum_j b_{ij} x'_j \rightarrow \text{مصفی ماتریس B}$$

$$\Rightarrow x''_i = \sum_j b_{ij} a_{jk} x_k$$

* زوایا به اولی:

$$I = A\tilde{A} \Rightarrow \sum_i A\tilde{A}$$

$$A^{-1} \tilde{A} \Rightarrow \text{ماتریس متقابل است.} \quad \sum_i (A\tilde{A})$$

$\Rightarrow$

$$\sum_i \sum_j \Rightarrow \text{متقابل}$$

$$\Rightarrow \sum_i A\tilde{A} = A\tilde{A} = I \Rightarrow \text{ماتریس خودش}$$

بالترا خودش برابر است با 1

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = 0$$

$$= 1 \Rightarrow \text{که صفت می شوند}$$

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 1$$

Ex)

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

مجموعه Cyclic است: $a=i, b=-1, c=-i$

$$C_4 = [1, i, -1, -i]$$

اولین نمایش:

از به همان اسین یک عنصر
بقیه عناصر پیدای شوند.

* فضاه حقیقی :

* در فضای حقیقی

Unitary transformation

$$U^\dagger = U^{-1}$$

$$A \rightarrow A' = UAU^{-1} = UAU^\dagger$$

معمولاً U و $U^\dagger$ جانشین یکدیگر هستند
یعنی $U^\dagger = U^{-1}$

اثبات:

$$\begin{aligned} (U_1 U_2)^\dagger &= [(U_1 U_2)^*]^T = [U_1^* U_2^*]^T = U_2^{*T} U_1^{*T} = U_2^\dagger U_1^\dagger \\ \Rightarrow (U_1 U_2 \dots U_n)^\dagger &= U_n^\dagger U_{n-1}^\dagger \dots U_1^\dagger \\ \Rightarrow (U_1 U_2)^\dagger (U_1 U_2) &= U_2^\dagger U_1^\dagger U_1 U_2 = U_2^\dagger U_2 = I \\ (U_1 U_2) (U_1 U_2)^\dagger &= I \end{aligned}$$

$U_1 U_2 = \text{Unitary}$

* Pauli matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}, \quad \vec{\sigma} = i\sigma_1 + j\sigma_2 + k\sigma_3$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$2) \sigma_i \sigma_j = i \sigma_k \quad (\text{cyclic}), \quad \begin{matrix} \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \\ \sigma_2 \rightarrow \sigma_3 \\ \sigma_3 \rightarrow \sigma_1 \end{matrix}$$

$$3) (\sigma_i)^2 = I_{2 \times 2}$$

* مجموعه $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, I_{2 \times 2}\}$ یک مجموعه کامل است یعنی هر ماتریس 2×2

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2} (M_{11} - M_{22})$$

$$M = C_0 I + C_1 \sigma_1 + C_2 \sigma_2 + C_3 \sigma_3$$

$$\begin{cases} M_{11} = C_0 + C_3 \\ M_{12} = C_1 - iC_2 \\ M_{21} = C_1 + iC_2 \\ M_{22} = C_0 - C_3 \end{cases} \Rightarrow$$

و میتوان به حسب این نوشت

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{2} (M_{11} + M_{22}) \\ C_1 = \frac{1}{2} (M_{12} + M_{21}) \\ C_2 = \frac{i}{2} (M_{12} - M_{21}) \end{cases}$$

* Hypermatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots \end{pmatrix} = (e \vec{a} \vec{b} \vec{c} \dots)$$

- Dirac matrices:

$$A \otimes B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} B & a_{12} B \\ a_{21} B & a_{22} B \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{j, \text{Dirac}}^i = I \otimes \sigma_{i, \text{Pauli}}^j$$

$$\sigma_{i, \text{Dirac}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{j, \text{Dirac}} = \sigma_{j, \text{Pauli}}^i \otimes I_{2 \times 2}$$

$$\rho_{1, D} = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & i I_{2 \times 2} \\ i I_{2 \times 2} & -I_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* خواص ماتریس های دیراک:

$$1) [\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{ij} I_{4 \times 4}$$

$$\rho_i \rho_j + \rho_j \rho_i = 2 \delta_{ij} I_{4 \times 4}$$

$$2) \sigma_i \sigma_j = i \sigma_k \text{ (cyclic)}$$

$$\rho_i \rho_j = i \rho_k \text{ (cyclic)}$$

$$3) (\sigma_i)^2 = (\rho_i)^2 = I_{4 \times 4}$$

$$4) \rho_i \sigma_j = \sigma_j \rho_i, E_{ij} = \rho_i \sigma_j$$

* ماتریس های دیراک در مکانیک کوانتوم:

$$\sum_{N=0}^{D-1} i \hbar \delta'' \frac{\delta}{\delta \psi^N} - m \frac{\delta}{\delta \psi^N} \Big| \psi(x_0^0, x_1^0, \dots, x_{D-1}^0) = 0$$

$$(\delta'')_{n \times n}, n=2 \quad [D/2]$$

$$D=2 \Rightarrow n=2$$

$$D=4 \Rightarrow n=4$$

$$D=10 \Rightarrow n=32$$

* $A^\dagger = A$, $A|r\rangle = \lambda|r\rangle \rightarrow$ Eigen value equation

$\lambda = \text{eigen-value} \rightarrow$ مقدار ویژه

$|r\rangle = \text{eigen-vector, eigen kate}$

eigen-value

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ |r_1\rangle & |r_2\rangle & \dots & |r_n\rangle \end{bmatrix}$$

- قضیه: اگر A هرمیتی باشد
 ① مقادیر ویژه حقیقی هستند ② به ازای هر مقدار ویژه λ_i یک بردار ویژه وجود دارد ③ به ازای هر مقدار ویژه λ_i یک بردار ویژه متعامد وجود دارد

$$\begin{cases} A|r_i\rangle = \lambda_i|r_i\rangle \\ A|r_j\rangle = \lambda_j|r_j\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle r_i|A|r_i\rangle = \lambda_i \langle r_i|r_i\rangle \quad (A) \\ \langle r_i|A|r_j\rangle = \lambda_j \langle r_i|r_j\rangle \quad (B) \end{cases}$$

* طیف B و A در هر دو برابر است

$$(\langle r_i|)^\dagger = |r_i\rangle \Rightarrow \langle r_i|A^\dagger|r_i\rangle = \lambda_i^* \langle r_i|r_i\rangle \Rightarrow \langle r_i|A|r_i\rangle = \lambda_i^* \langle r_i|r_i\rangle \quad (A)$$

$$(A), (B) \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j^*) \langle r_j|r_i\rangle = 0$$

$$i=j \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_i^*) \underbrace{\langle r_i|r_i\rangle}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i^* \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n = \text{real}$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) \langle r_j|r_i\rangle = 0$$

$$i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \langle r_j|r_i\rangle = 0 \Rightarrow \vec{r}_i \perp \vec{r}_j$$

- حالتی که دو یا چند مقدار ویژه مساوی باشند و حالت

degenerate (تبدیل) گویند

- $\lambda_i = \lambda_j$ باشد حالت تبدیل (تبدیل)

در این صورت هر ترکیب خطی $|r_i\rangle$ و $|r_j\rangle$ به ازای مقدار ویژه $\lambda_i = \lambda_j$

- اثبات:

$$|\varphi\rangle = \alpha|r_i\rangle + \beta|r_j\rangle$$

$$A|\varphi\rangle = \alpha A|r_i\rangle + \beta A|r_j\rangle$$

$$= \alpha \lambda_i |r_i\rangle + \beta \lambda_j |r_j\rangle = \lambda_i (\alpha |r_i\rangle + \beta |r_j\rangle) = \lambda_i |\varphi\rangle$$

Anti-Hermitian

هر آنی که مقادیر ویژه صاف باشد

$$A^\dagger = -A$$

محض حقیقی و به ازای هر مقدار ویژه

برای مقادیر ویژه متعامد هستند

اثبات

$$\begin{cases} A|r_j\rangle = \lambda_j |r_j\rangle \\ A|r_i\rangle = \lambda_i |r_i\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle r_j | A | r_i \rangle = \lambda_i \langle r_j | r_i \rangle \quad (w) \\ \langle r_i | A | r_j \rangle = \lambda_j \langle r_i | r_j \rangle \quad (p) \end{cases} \xRightarrow{\text{Hermitian}} \Rightarrow$$

$$\langle r_j | A^\dagger | r_i \rangle = \lambda_j^* \langle r_j | r_i \rangle \Rightarrow \langle r_j | A | r_i \rangle = \lambda_j^* \langle r_j | r_i \rangle \quad (p)$$

$$(w) + (p) \Rightarrow 0 = (\lambda_i + \lambda_j^*) \langle r_j | r_i \rangle = 0 \Rightarrow i=j \Rightarrow (\lambda_i + \lambda_i^*) \langle r_i | r_i \rangle = 0$$

$$\lambda_i^* = -\lambda_i \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n = \text{موهوم} \Rightarrow Z = iY \Rightarrow \text{موهوم حقیقی}$$

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle r_j | r_i \rangle = 0$$

$$i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \langle r_j | r_i \rangle = 0 \Rightarrow \vec{r}_i \perp \vec{r}_j$$

میتوانیم متانوارها را به هم عمود کنیم

$$A_{n \times n} \quad A|r\rangle = \lambda|r\rangle \quad |r\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\left[A - \lambda I_{n \times n} \right] |r\rangle = 0$$

* باید به این دقت کنیم

$$n=2 \quad \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

* برای حل این معادله باید به این دقت کنیم که جواب غیر تریو باشد
یعنی متانوارها را به هم عمود کنیم

$$\left[A - \lambda I_{n \times n} \right] = 0 \quad (c)$$

$$n=2 \quad \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

مکاندها را به هم عمود کنیم

$$\lambda_1 |r_1\rangle, \lambda_2 |r_2\rangle$$

مکاندها را به هم عمود کنیم
از جمله حالت خاص
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
 $|r_1\rangle, \dots, |r_n\rangle$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

برای $n=3$ مکاندها را به هم عمود کنیم و Secular Determinant

Ex)

$$A^\dagger = A, A|r\rangle = \lambda|r\rangle$$

$$\Rightarrow \left[A - \lambda I_{3 \times 3} \right] |r\rangle = 0 \Rightarrow |A - \lambda I_{3 \times 3}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda (\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, 0, 1$$

$$|r\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad * \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow |r_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تحقق من كبر $|r_1\rangle$ نرماليزه و اورتونمال

$$\langle r_1 | r_1 \rangle = 1$$

$$\Rightarrow (x - x \cdot 0) \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ z \neq 0 \end{cases} \Rightarrow |r_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \langle r_2 | r_2 \rangle = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1 \Rightarrow |r_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |r_3'\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|r_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = +1 \xrightarrow{(7)} \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow |r_3\rangle = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|r_3'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle r_3 | r_3 \rangle = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |r_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |r_3'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle r_1 | r_2 \rangle = \langle r_1 | r_3 \rangle = \langle r_2 | r_3 \rangle = 0$$

$$\langle r_1' | r_3' \rangle = \langle r_1' | r_2' \rangle = \langle r_2' | r_3' \rangle = 0$$

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |r_1\rangle + \alpha_2 |r_2\rangle + \alpha_3 |r_3\rangle = \beta_1 |r_1'\rangle + \beta_2 |r_2'\rangle + \beta_3 |r_3'\rangle$$

$$|r_2\rangle, |r_3\rangle, |r_1\rangle \text{ موجوده نه}$$

$$Ex) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\dagger = A, \quad A|r\rangle = \lambda|r\rangle,$$

$$[A - \lambda I] |r\rangle = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow |r\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{نرماليزه به دلازل}}$$

$$|r_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = +1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow |r_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{نرمالیزه نمودن}} |r_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

یک جواب به ازای

$$x=0, y=1$$

انتخاب $|r_1\rangle$

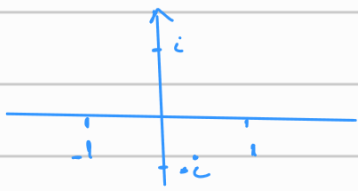
$$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|r_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Generators, 4-11 و جابجایی آخر
ملاحظه.

ب

فر



$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

* نمایش نو: چرخش به دور

$$\Rightarrow R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1$$

ماتریس A, B

$$R(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow i$$

$$\Rightarrow C_{\varphi} [1, A, B, c]$$

$$R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -1$$

$$\Rightarrow \{A^n | n=0, A, B, c\} \rightarrow \text{cycle}$$

$$R(\frac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -i$$

* Homomorphism Isomorphism: هم ریختی یک ریختی

Homomorphism:
 دو مجموعه را به دو مجموعه دیگر (یا بین یک مجموعه به خودش) نگاشت می‌دهد.
 هر یک از عناصر مجموعه مقصد، تصویر یک یا چند عنصر از مجموعه مبدأ است.
 بعضی از عناصر مجموعه مقصد، تصویر هیچ‌کدام از عناصر مجموعه مبدأ نیستند.

Isomorphism:
 اگر تناظر یک به یک باشد و هر دو مجموعه مبدأ و مقصد، اکساکسیان باشند و هر دو
 مجموعه مبدأ و مقصد، یک ریختی باشند.

* نمایش نو C و C' یک ریختی هستند.

Vierergrope:

	I	v_1	v_2	v_3
I	I	v_1	v_2	v_3
v_1	v_1	I	v_3	v_2
v_2	v_2	v_3	I	v_1
v_3	v_3	v_2	v_1	I

بین این گروه و C یا C' هیچ تناظر وجود ندارد و هر دو هم متفاوت هستند.

Matrix representation, reducible, irreducible:

$$A \rightarrow \tilde{A} = A U U^+, \quad U^+ = U^{-1}$$

تبدیل یک ماتریس A :

$$\tilde{A}^+ = (U^+)^+ A^+ U^+ = U A^+ U^+ = U A^{-1} U^{-1}$$

اگر A یک ماتریس همبستگی A' باشد:

$$(U A^{-1} U^{-1})^{-1} \Rightarrow (U A U^+)^{-1} = A^{-1} \Rightarrow A = \text{unitary}$$

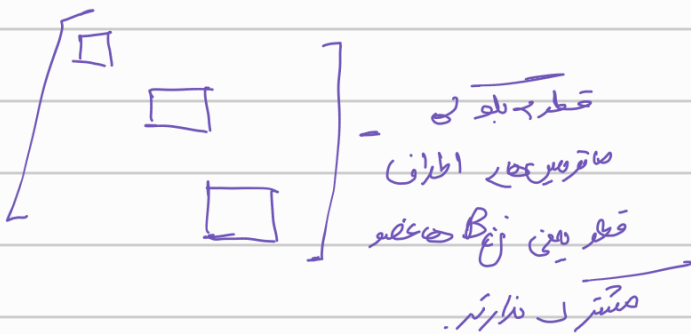
: Reducible

* اگر تبدیل $\tilde{A}$ یک ماتریس همبستگی باشد، این ماتریس اولیه از دو ماتریس همبستگی و قطریه تشکیل می‌دهد.

هر یک از این دو ماتریس همبستگی، این ماتریس اولیه را کاهش می‌دهد.

$$\tilde{A} = U A U^+, \quad \text{ماتریس قطریه و همبستگی}$$

ب A کاهش می‌دهد



$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

این ماتریس همبستگی است.

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{R' = U R U^+} R' = \begin{bmatrix} P_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & Q_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

$U^+ U = I$

$R = P \oplus Q$

این ماتریس همبستگی P و Q است.

$R^{-1} = U R U^+ = \begin{bmatrix} P^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_n^{-1} \end{bmatrix}$

$U^+ U = I$

$$R = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k$$

این ماتریس همبستگی P_i است.

* Irreducible:

* اگر تبدیل $\tilde{A}$ یک ماتریس همبستگی باشد، این ماتریس اولیه از دو ماتریس همبستگی و قطریه تشکیل می‌دهد.

ب این ماتریس اولیه کاهش می‌دهد.

class and character^۰:

$$G = \{x, y, g_1, g_2, \dots\}$$

اگر وجود داشته باشد $g \in G$

$$g x g^{-1} = y = y x y^{-1}$$

$$[y \text{ is conjugate to } x] \Rightarrow x \text{ هم ارز } y$$

و اگر x و y آنگاه $y x y^{-1}$

$$y x y^{-1} = y = g x g^{-1} \rightarrow g^{-1} y g = x$$

- اثبات:

$$g^{-1} \in G \Rightarrow g^{-1} = g' \Rightarrow g y g^{-1} = x \Rightarrow x y x^{-1}$$

* رابطه هم ارز $y = g x g^{-1}$ در حقیقت یک تبدیل تشابه از x است، g می باشد

* تعریف کلاس:

یک زیر مجموعه از گروه است که هر دو عنصر در آن با هم هم ارز هستند:

$$\forall x, y \in G, \exists g \in G : y = g x g^{-1}$$

* مجموعه کلاس هم ارزیت
* کلاس یک عضو از آن کلاس است
* همه عناصر در آن
* اگر گروه آبلی (جابجایی باشد) هر کلاس فقط یک عضو دارد.

- اثبات:

$$g_1 g_2 \in G$$

$$g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = x$$

$$\Rightarrow g x g^{-1} = x g g^{-1} = x$$

یعنی x هم ارز خودش $\Rightarrow x x x^{-1} = x$
باشد، یعنی هر عضو یک کلاس است.

* قضیه: هر عضو از گروه فقط متعلق به یک کلاس است.

- اثبات: فرض کنید x در کلاس C_1 و C_2 است.

$$x \in C_1 \Rightarrow x \sim \forall y_1 \in C_1, \exists g \in G : yg^{-1} = x \quad (1)$$

$$x \in C_2 \Rightarrow x \sim \forall y_2 \in C_2, \exists g' \in G : g'y_2^{-1} = x \quad (2)$$

$$(1), (2) \quad yg^{-1} = g'y_2^{-1} \Rightarrow g^{-1}g'y_2 = y_1$$

$$g^{-1}g = g'' \Rightarrow g'' = g'y_2^{-1}g = y_1 \Rightarrow y_1 = y_2 \quad \text{فرض کنید که کلاسها همبسته باشند}$$

* character: به هر عضو گروه character گفته می شود، تحت تبدیلات χ که زیرگروه است.

$$x \rightarrow x' = gxg^{-1} = gxg^{-1} \Rightarrow \text{Tr } x' = \text{Tr}(gxg^{-1}) = \text{Tr}[xg^{-1}g] \Rightarrow \text{Tr } x$$

تعداد عنصر هر گروه

$$N_G = kN_C, \quad k \in \mathbb{N}$$

↖

تعداد عنصر هر کلاس

* قضیه: تعداد اعضاء یک کلاس از مرتبه n باشند.

$$C_4, \bar{C}_4$$

$$\{G, *\}$$

$$1) \forall a, b \in G, a * b \in G$$

$$2) \forall a, b \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$3) \exists e \in G : e * a = a * e = a, \forall a \in G$$

$$4) a \in G, \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Isomorphism

بجایگاه یک گروه:

$$G = \{g_i | i=1, 2, \dots, n\}$$

① تناظر است

$$G' = \{g'_i | i=1, 2, \dots, n, g'_i = h g_i h^{-1}, h \in G\}$$

$$g_i \rightarrow g'_i$$

$$g_i g_j = g_k$$

$$\Rightarrow g'_i g'_j = (h g_i h^{-1})(h g_j h^{-1}) \\ = h (g_i g_j) h^{-1}$$

$$\Rightarrow h g_i h^{-1} = g'_k \quad \text{همه درون مجموعه حاصل، جایگزینی هستند}$$

$\Rightarrow G$ و G' یک ساختارند.

Sub group:

اگر یک زیرمجموعه از مجموعه G باشد که خودی $(*)$ گروه G باشد و به گروه حاصل زیرگروه گفته می‌شود.

$$\{\mathbb{R}, +\} = \{G, *\}$$

$$① \forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$$

$$\{\mathbb{Z}, +\} \quad ② \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$$

③ $a \in \mathbb{Z}, a+0=0+a=a, \forall a \in \mathbb{Z}$

④ $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists (-a) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \{ \mathbb{Z}, + \} \subset \{ \mathbb{R}, + \}$

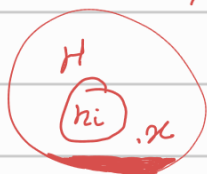
زیر مجموعه

1 ≠

$H \subset G, h_i \in H, x \in G, x \notin H$ قضیه *

$xh_i \notin H$

$h_ix \notin H$



اثبات: برهان خلف

$xh_i \in H \Rightarrow xh_i = h'_i$

عرض کنید

* xH, H عضو مستتر ندارند

$\Rightarrow xh_i h'_i = h'_i h'_i$

چون $h'_i \in H$ پس h'_i را می توان از دو طرف حذف کرد

$\Rightarrow x = h'_i h'_i$

$\Rightarrow x \in H$

خلاف فرض

هم میگویند که

$H \subset G, x \in G, x \notin H$

$C_R^* = \{ xh_i | h_i \in H \} = xH, C_L^* = \{ h_ix | h_i \in H \} = Hx$

$N_H = N_{Hx} = N_{xH}$

همچنین می توانیم بگوییم که N_H و N_{Hx} و N_{xH} همگی برابرند

$G = H + x_1H + x_2H + \dots + x_nH$

$G = H + x_1H + x_2H + \dots + x_nH$ (چون $x_i \notin H$)

$x_1, \dots, x_n \notin H$

و یا

$G = H + Hx_1 + Hx_2 + \dots + Hx_n$

$N_G = (n+1)N_H$ چون عضو مستتر ندارند

Hx_i و H عضو مستتر ندارند

H و Hx_i عضو مستتر ندارند

$\Rightarrow N_G \subset m N_H$, $m = \text{index of } H$

$H = G$ $H = [e]$ N_H می تواند 1 یا 0 باشد

* e و G زیرگروه های جدایی از گروه G گویند

$$N_G = 9 \cdot 1 \cdot 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 G $\{e\}$

Normal Subgroup

$$Ex) \quad x \in G$$

$$x H x^{-1} \subset G \quad \text{شکل}$$

Invariant Subgroup

$$x H x^{-1} = H \quad \text{اذا}$$

Self-Conjugate subgroup

$$\forall x \in G$$

H می شود

برای خود H می شوند

$$x H x^{-1} = H \quad \forall x \in G$$

همه اعضا H در $x H x^{-1}$ هستند
 (اما داخل G باقی می ماند)
 جای هم اعضا H در این رابطه می ماند

* اگر گروه G یک بار جای H داشته باشد، هر زیرگروه آن فصل است.

$$x h_i x^{-1} = x x^{-1} h_i = e h_i = h_i$$

$$x H x^{-1} = H$$

اثبات -

4.9 Discrete Groups.

مستقیم

$$\{Z, +\} \Rightarrow Z = \{\dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$$

Two fold symmetric axis:

اگر سیستم (نه حتماً به اندازه n حول محور Z چرخیده شود) مستقیم
 محورین من بعد به این n یک محور تقارن n وجهی است.

$$G = [R_2(0), R_2(\pi)] = [1, R_2(\pi)]$$

$$G = \{I, R_x(\pi), R_y(\pi), R_z(\pi)\}$$

$$R_z(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, R_y(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

* Three objects - threefold symmetry axis C_3

4.10 ω_k , Continuous:

- Infinite groups $\{ \mathbb{R}, + \}$ and $\{ \mathbb{Z}, + \}$

$$C_4 = \{1, i, -1, -i\}$$

نو لروہ سے مست خارا ایک عنصر کہو ہے اس کے ان عنصر

به یک و چایند چارمتر و استیج است و این کارمترها

$$C_4 = \{1, A, B, C\}$$

در بازدهی به طور متوسط متغیر هست

$$U(n) = \{ e^{i\phi} \} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

تعلیل (مستحق فیه از حد و سبب)

- Lie group:

نکته است که هرگاه عنصر حامل فتن تابع از خداوند است و هر دو عنصر جامد

U(1): $g_1 = e^{i\varphi}, g_r = e^{i\varphi_r}$

$$g_1 g_2 = e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

عقبر φ_1 و φ_p نسبت به دایره φ_1 و

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_p^2$$

تعریف بیشترفته Lie : اگر منظمه G از مجموعه $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}$ است، داریم خواص گروه باشد، بد گروه Lie

$$e^{i\varphi} = \overset{x}{\cos \varphi} + i \overset{y}{\sin \varphi} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad \{ g = e^{i\varphi} \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

است.

- Compact Group :

در دایره ها و حلقه ها و گروه های یوسه عرضی ها به دست می آید
گروه را فشرده می گویند

* مثلاً گروه (1) را $U(1)$ می گویند گروه فشرده است

- The Group $O(n)$:

$$O(n) = \left[\begin{array}{c} A \\ n \times n \end{array} \mid A^T = -A, A^T A = 1 \right] \text{ \& } \frac{n(n-1)}{2} \text{ - Parameters}$$

orthogonal

مستقیم بودن

$$1) \text{ If } A, B \in O(n) \Rightarrow (AB)^T = (B^T A^T) = (-A^T)(-B^T) = A^T B^T = (BA)^T = 1$$

$$A, B \in O(n)$$

برای ماتریس ها همیشه
برقرار است.

$$2) A, B, C \in O(n) \Rightarrow A(BC)^T = (A^T A^T) B^T C^T = 1$$

$$3) 1^T = 1^T \Rightarrow 1 \in O(n) \text{ عنصر خنثی دارد}$$

$$4) A \in O(n), A^{-1} = (A^T)^{-1} = A^{-1} (A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = 1^{-1} = 1 \Rightarrow A^{-1} = A^T \Rightarrow A \in O(n)$$

$$A = \begin{pmatrix} n \times n \end{pmatrix} \text{ (تعداد مقادیر از 1 تا 2)}$$

* اگر n باشد تعداد عناصر مستقل A ، $O(n)$ می باشد

$$A^T A = 1$$

$$A^T A = S \Rightarrow S = (A^T A) \Rightarrow S = (A^T A) \Rightarrow A^T A = A^T A = S$$

بیشتر متقارن است، این مثلث با S به مثلث S برابر است

* همان است ماتریس A $n \times n$
موجود در آن باشد که مقادیر جابجایی

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$S = \begin{bmatrix} \times & & \\ & \times & \\ & & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n-1$ رابطه از قطر، $\frac{n(n-1)}{2}$
رابطه هم از مثلث باقی می ماند

با $O(n)$ جابجایی
بلکه همان $O(n)$ جابجایی

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

مجموع عناصر

وقتی ماتریس ها $n \times n$ باشند آنوقت تعداد پارامترها هم $\frac{n(n-1)}{2}$ است. بیشتر گروه های بنیادی (fundamental representation)

$$[A \mid \tilde{A}A = A\tilde{A} = 1, \text{ متغیرها}] = O_{(20)} \quad \text{20x20}$$

چون تعداد پارامترها $\frac{20 \times (20-1)}{2} = 190$ است. $O_{(20)}$ است. $\frac{1}{2}$ نسبت به 190 می باشد.

The Group $SO(n) = O^+(n)$
 $\hookrightarrow$ Special orthogonal.
 $\hookrightarrow A\tilde{A} = \tilde{A}A = 1$
 $\det A = +1$

$$SO(n) = \left\{ A_{n \times n} \mid A\tilde{A} = \tilde{A}A = 1, \det A = +1, \frac{n(n-1)}{2} \text{ parameters} \right\} \quad [5.2]$$

* نشان می دهد $SO(n)$ یک گروه است.

$$A\tilde{A} = 1 \Rightarrow \det(A\tilde{A}) = \det 1 \Rightarrow \det A \det \tilde{A} = 1 \xrightarrow{\det \tilde{A} = \det A} \det A = \pm 1 \xrightarrow{\text{فقط } +1 \text{ را می گیریم.}}$$

حالت خاص $\Rightarrow n=3 \quad SO(3) = O^+(3):$

$P_3 = \frac{3 \times 2}{2} = 3$ پارامتر، $A \in SO(3) \Rightarrow A(a, b, \varphi) = R_z(\varphi) R_y(b) R_z(a)$

$$A(a, b, \varphi) \tilde{A}(a, b, \varphi) = [R_z(\varphi) R_y(b) R_z(a)] [R_z(a) R_y(b) R_z(\varphi)]$$

$\tilde{A}A = 1 \rightarrow A(a, b, \varphi) = 1$ 1

- The Group $U(n)$:

Unitary $n \times n$ matrices. $U(n) = \left\{ U_{n \times n} \mid UU^\dagger = U^\dagger U = 1, n^2 \text{ parameters} \right\}$

$$1) U_1, U_2 \in U_n \Rightarrow (U_1 U_2) (U_1 U_2)^{\dagger} = (U_1 U_2) (U_1^{\dagger} U_2^{\dagger}) = U_1 U_1^{\dagger} = I \\ (U_2 U_2^{\dagger}) = I$$

$$2) U_1, U_2, U_3 \in U_n \Rightarrow U_1 (U_2 U_3) = (U_1 U_2) U_3$$

$$3) I^{\dagger} I = I I^{\dagger} = I \Rightarrow I \in U_n$$

$$4) U \in U_n \longrightarrow U^{\dagger} (U^{\dagger})^{\dagger} = U^{\dagger} (U^{\dagger})^{-1} = (U^{\dagger} U)^{-1} = I^{-1} = I \\ (U^{-1})^{\dagger} (U^{\dagger}) = I \longrightarrow U^{\dagger} \in U_n \longrightarrow \text{Unitary}$$

$$U_{ij} = a_{ij} + i b_{ij} \quad (*) \\ P_n = 2n^2 - (2n-1) \quad \text{اقدامات مربوط به حذف}$$

شماره مشخصات آمار و احتمال - مستقل - عنصر مجموع

$$M = M = U U^{\dagger} \Rightarrow M^{\dagger} = M \Rightarrow M = \text{هرمیت}$$

$$M = \begin{bmatrix} \text{مصفوفه} \end{bmatrix}$$

* اگر ماتریس هرمیتی، اعداد قطری آن حقیقی باشند:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M^{\dagger} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

مصفوفه از قطر

$$a = a^* \\ d = d^*$$

$$\frac{n(n-1)}{2} (2) = n(n-1) \quad \text{تعداد روابط حذفی}$$

(*)

$$P_n = 2n^2 - [n(n-1) + n] = n^2$$

SU(n) Group
Special Unitary

$SU(n) = \{ U_{n \times n} \mid U U^{\dagger} = U^{\dagger} U = I, \det U = 1, n^2 - 1 \text{ Parameters} \} \rightarrow$ حالت هفتم SU(n) یکتا شود
استو، متقارن، امتره، مستقل، عضو مجموع را به دست آورد (n^2 - 1)

* جلد آخر ، H-11 Generators, مولدات

$$U_{n \times n} = e^{i\alpha H}$$

$\alpha = \text{real}$

H : متعلق

$$e^A = \sum \frac{A^n}{n!} \Rightarrow 1 + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots$$

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2!}[A,B] + \frac{1}{3!}[A,[A,B]] + \dots}$$

* قییمہ اگر U کا H سے متعلق ہے، تو H کے متعلق ہے، ورنہ نہیں۔

$$U^\dagger = e^{-i\alpha H^\dagger} \quad \text{اثبات:}$$

$$U^{-1} = e^{-i\alpha H}$$

$$U^\dagger U^{-1} \Rightarrow H^\dagger = H \quad \text{فرض}$$

* $U = e^{i\alpha H}$, $H = \text{generator}$
 $\alpha = \text{parameter}$

$$\det U = e^{i\alpha \text{Tr} H} \quad \text{*, } \det e^A = \det^{\text{Tr} A}$$

$$H \ln \gamma = \lambda \ln \gamma$$

* اثبات

$$\Rightarrow H^n \ln \gamma = \lambda H \ln \gamma$$

$$U \ln \gamma = e^{i\alpha H} \ln \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} H^n \ln \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} \lambda \ln \gamma = e^{i\alpha \lambda} \ln \gamma = e^{i\alpha \text{Tr} H} \ln \gamma$$

$$H' = R^\dagger H R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tr} H' = \text{Tr}(R^\dagger H R) = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \text{Tr}(R R^\dagger H) = \text{Tr} H$$

$$\Rightarrow \det \prod_{i=1}^N e^{i\alpha \lambda_i} = e^{i\alpha \sum_{i=1}^N \lambda_i} = e^{i\alpha \text{Tr} H}, \det U = e^{i\alpha \text{Tr} H} \quad (1)$$

$$U = e^{i\alpha H} \Rightarrow \ln U = i\alpha H \Rightarrow \text{Tr} \ln U = i\alpha \text{Tr} H \quad (2) \Rightarrow (1) \Rightarrow \ln \det U = i\alpha \text{Tr} H \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \ln \det U = \text{Tr} \ln U$$

* چونکہ $\ln$ کا U کا متعلق ہے، لہذا U کا متعلق ہے۔

- Rotation and angular momentum

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

محول Z کے گرد

$$R_z(\varphi_1) R_z(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \\ -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi_1) R_z(\varphi_2) = R_z(\varphi_1 + \varphi_2) \Rightarrow \text{یعنی تابع یکدفعه‌ای است}$$

هراد، بنابراین $R_z(\varphi)$ فوق ماتریس خواهد بود.

$$|\delta\varphi| \ll 1, R_z(\delta\varphi) \xrightarrow{\text{ماتریس تیلور}} \begin{bmatrix} 1 & \delta\varphi & 0 \\ -\delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta\varphi \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + i\delta\varphi \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R_z(\delta\varphi) \approx 1 + i\delta\varphi M_z$$

$$\Rightarrow M_z(\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2 + \dots + \delta\varphi_N) = R_z(\delta\varphi_1) R_z(\delta\varphi_2) \dots R_z(\delta\varphi_N)$$

$$\Rightarrow [1 + i\delta\varphi_1 M_z] [1 + i\delta\varphi_2 M_z] \dots [1 + i\delta\varphi_N M_z]$$

$$\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = \dots = \delta\varphi_N = \frac{\varphi}{N} \Rightarrow R_z(\varphi) \approx [1 + i\frac{\varphi}{N} M_z]^N$$

$$R_z(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} [1 + i\frac{\varphi}{N} M_z]^N = e^{i\varphi M_z}, R_z(\varphi) = e^{i\varphi M_z}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$$

φ : زاویه دوران حول z
 M_z : مولد دوران

$$* \det R_z(\varphi) = +1, U = e^{i\varphi H}$$

$$U^\dagger = U^{-1} \Rightarrow H^\dagger = H$$

$$\text{Tr} M_z = 0$$

$$: R_z(\varphi) \text{ : فوق ماتریس}$$

$$R_z^\dagger R_z = 1$$

$$: \text{مولد } M_z \text{ : فوق ماتریس} \Rightarrow R_z = \text{فوق ماتریس} \Rightarrow M_z$$

$$M_z^\dagger = M_z$$

از دوران صفحات به اندازه زاویه φ حول محور Z ، ماتریس انتقال به دست می آید:

زاویه φ حول محور Z .

ماتریس دوران حول محور Z به صورت زیر است:

$$* M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A, B] = AB - BA$$

$$[M_x, M_y] = i M_z$$

$$[M_y, M_z] = i M_x$$

$$[M_z, M_x] = i M_y$$

* جمع اندک از 1 تا 3

$$[M_i, M_j] = i \epsilon_{ijk} M_k$$

جبر لیه (Soc)

محاسبه ساختار جبر لیه.

$$U = e^{i\varphi M}$$

$$\frac{1}{i} \frac{dU}{d\varphi} \bigg|_{\varphi=0} = M$$

$$R_z(\varphi) = e^{i\varphi M_z}$$

ساختار

$$\frac{1}{i} \frac{dR_z(\varphi)}{d\varphi} \bigg|_{\varphi=0} = M_z$$

$$A_\mu(x, y, z, t) \rightarrow A_0 = \varphi$$

$$\rightarrow A^1, A^2, A^3$$

عبارت جبر = مجموع ماتریس ها در جبر لیه.

$$[A] = [M_x, M_y, M_z] / [M_i, M_j] = i \epsilon_{ijk} M_k$$

* ماتریس دوران از $e^{i\varphi M_z}$ به صورت $R_z(\varphi)$ به رسم

$$e^{i\varphi M_z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} M_z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} M_z^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{(2n)!} M_z^{2n} +$$

$$i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} M_z^{2n+1}$$

$$\Rightarrow M_z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_z^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_z^{2n+1} = M_z$$

$$e^{i\varphi M_z} = 1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{(2n)!} + iM_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{i\varphi M_z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\cos\varphi - 1) + i \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin\varphi$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_z(\varphi)$$

$$\ast \vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}, \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad / \quad M_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hbar=1 \Rightarrow \vec{M} = -\vec{r} \times \vec{\nabla} \quad / \quad M_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$M_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$M_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$, M_y = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$, M_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

