مکانیک لاگرانژی: رویکردی مدرن

فهرست مطالب

۱ فرمالیسم لاگرانژی ۵
۱.۱ محدودیت‌های چارچوب نیوتنی ۵
۲.۱ مفاهیم اصلی مکانیک لاگرانژی ۵
۱.۲.۱ مختصات تعمیم‌یافته: زبانِ انتخاب ۵
۲.۲.۱ تابع لاگرانژی ۵
۳.۲.۱ اصل کمترین کنش و معادله اویلر–لاگرانژ ۶
۳.۱ دستورالعمل لاگرانژی در عمل ۶
۴.۱ مثال‌های حل شده: از ساده به پیچیده ۷
۵.۱ برهم‌کنش‌ها و قدرت تبدیلات مختصات ۹
۶.۱ مبانی نظری و مفاهیم پیشرفته ۱۰
۱.۶.۱ قوانین پایستگی و مختصات دوری ۱۰
۲.۶.۱ پایستگی انرژی ۱۰
۳.۶.۱ آزادی پیمانه‌ای لاگرانژی ۱۰
۷.۱ نیروهای قیدی و ضرایب لاگرانژ ۱۰
۱.۷.۱ روش ۱۱

فصل ۱

فرمالیسم لاگرانژی

۱.۱ محدودیت‌های چارچوب نیوتنی

صورت‌بندی نیوتنی مکانیک، با سنگ بنای اصلی آن $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، برای قرن‌ها به‌طور قابل‌توجهی موفق بوده است. این روش یک رویکرد شهودی و مبتنی بر بردار ارائه می‌دهد که در آن فرد تمام نیروها را شناسایی کرده، نمودار جسم آزاد را رسم می‌کند و بردارها را به مؤلفه‌ها تجزیه می‌کند تا حرکت را حل نماید. با این حال، این رویکرد برای سیستم‌های پیچیده به طور فزاینده‌ای دشوار می‌شود. یک مهره را در نظر بگیرید که روی یک سیم خمیده می‌لغزد یا یک آونگ دوگانه که در یک صفحه نوسان می‌کند. نیروهای قیدی (نیروی عمودی سطح از طرف سیم، کشش در میله‌های آونگ) اغلب به صورت پیشین a) (priori نامشخص هستند و باید هم‌زمان با معادلات حرکت حل شوند. علاوه بر این، این نیروها هیچ کاری انجام نمی‌دهند، اما در مجموع بردارهای نیوتنی ضروری هستند.

فرمالیسم لاگرانژی، که عمدتاً توسط ژوزف-لویی لاگرانژ در اواخر قرن هجدهم توسعه یافت، جایگزینی قدرتمند و زیبا ارائه می‌دهد. این روش تمرکز را از بردارها و نیروها به اسکالرها (کمیت‌های نرده‌ای) و انرژی‌ها تغییر می‌دهد. این تغییر دیدگاه چندین مزیت عمیق به همراه دارد:

- استقلال از مختصات: انرژی‌های اسکالر مستقل از سیستم مختصات هستند. ما آزادیم که مناسب‌ترین مختصات را برای مسئله مورد نظر انتخاب کنیم.
- حذف خودکار قیود: نیروهایی که حرکت را محدود می‌کنند اما کاری انجام نمی‌دهند (مانند کشش در میله صلب آونگ) معمولاً در لاگرانژی ظاهر نمی‌شوند. معادلات حرکت صرفاً از انرژی‌های جنبشی و پتانسیل استخراج می‌شوند.
- رویکرد یکپارچه: یک رویه بنیادی واحد تقریباً برای هر سیستم مکانیکی، از یک فنر ساده تا یک اتصال مکانیکی پیچیده، کاربرد دارد.
- ارتباط عمیق با تقارن‌ها: همان‌طور که خواهیم دید، این چارچوب پیوندی مستقیم بین تقارن‌های سیستم و قوانین پایستگی ایجاد می‌کند که یکی از سنگ بناهای فیزیک مدرن است.

۲.۱ مفاهیم اصلی مکانیک لاگرانژی

۱.۲.۱ مختصات تعمیم‌یافته: زبانِ انتخاب

اولین گام برای رهایی از یک سیستم مختصات ثابت، معرفی مختصات تعمیم‌یافته است.

تعریف ۱.۲.۱ (مختصات تعمیم‌یافته). مجموعه پارامترهای $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ که پیکربندی یک سیستم را نسبت به یک پیکربندی مرجع به‌طور منحصربه‌فرد تعریف می‌کنند، مختصات تعمیم‌یافته نامیده می‌شوند. تعداد n تا از این مختصات برابر با تعداد درجات آزادی سیستم است.

برخلاف مختصات دکارتی، مختصات تعمیم‌یافته می‌توانند هر پارامتر مناسبی باشند: فواصل، زوایا، طول کمان‌ها، یا حتی کمیت‌های انتزاعی‌تر. برای یک آونگ ساده، مختصات طبیعی زاویه θ است. برای ذره‌ای که محدود به حرکت روی سطح یک کره است، مختصات می‌تواند زوایای عرض و طول جغرافیایی (θ, ϕ) باشد. مشتقات زمانی این مختصات، $\dot{q}_i$، سرعت‌های تعمیم‌یافته نامیده می‌شوند.

۲.۲.۱ تابع لاگرانژی

کمیت مرکزی در این فرمالیسم، تابع لاگرانژی L است.

تعریف ۲.۲.۱ (لاگرانژی). برای یک سیستم پایستار ،(conservative) لاگرانژی L تابعی از مختصات تعمیم‌یافته q_i، سرعت‌های تعمیم‌یافته $\dot{q}_i$ و احتمالاً زمان t است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = T - V \tag{۱.۱}$$

که در آن T کل انرژی جنبشی و V کل انرژی پتانسیل سیستم است.

بسیار مهم است که توجه داشته باشید هم T و هم V باید بر حسب مختصات تعمیم‌یافته و سرعت‌های تعمیم‌یافته بیان شوند. فرم ساده $T - V$ برای نیروهای پایستار معتبر است؛ سیستم‌های دارای نیروهای اتلافی نیاز به توسعه‌هایی در این فرمالیسم دارند.

۳.۲.۱ اصل کمترین کنش و معادله اویلر–لاگرانژ

قانون بنیادی حرکت در مکانیک لاگرانژی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ نیست، بلکه یک اصل وردشی (variational) عمیق‌تر است: اصل همیلتون یا اصل کمترین کنش. این اصل بیان می‌کند که مسیری که یک سیستم بین دو پیکربندی در زمان‌های t_1 و t_2 طی می‌کند، مسیری است که برای آن کنش S مانا (معمولاً مینیمم) باشد.

کنش به عنوان انتگرال زمانی لاگرانژی در طول مسیر تعریف می‌شود:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{۲.۱}$$

الزام اینکه $\delta S = 0$ (یک تغییر کوچک در مسیر، کنش را در مرتبه اول تغییر ندهد) مستقیماً منجر به معادلات حرکت می‌شود که به معادلات اویلر–لاگرانژ معروف هستند.

قضیه ۱.۲.۱ (معادله اویلر–لاگرانژ). برای هر مختصات تعمیم‌یافته q_i، مسیر حرکت در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad \text{برای} i = 1, 2, \ldots, n. \tag{۳.۱}$$

تفسیر فیزیکی:

- عبارت $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ تکانه تعمیم‌یافته p_i مزدوج با مختصات q_i است. در مختصات دکارتی، این به همان تکانه خطی آشنا تقلیل می‌یابد.
- عبارت $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ نیروی تعمیم‌یافته است. برای یک نیروی پایستار، این مربوط به گرادیان انرژی پتانسیل است.
- بنابراین معادله $\frac{d}{dt}(p_i) - F_i = 0$ بیان تعمیم‌یافته‌ای از قانون دوم نیوتن است: نرخ تغییر تکانه برابر است با نیروی اعمال شده.

۳.۱ دستورالعمل لاگرانژی در عمل

قدرت روش لاگرانژی در روند سیستماتیک آن نهفته است. برای یافتن معادلات حرکت هر سیستم، این مراحل را دنبال کنید:

۱. شناسایی درجات آزادی: تعداد n مختصات مستقل مورد نیاز برای تعیین پیکربندی سیستم را تعیین کنید.

۲. انتخاب مختصات تعمیم‌یافته: مجموعه‌ای $\{q_1, \ldots, q_n\}$ را انتخاب کنید که سیستم را به راحتی توصیف کند.

۳. بیان انرژی جنبشی (T): سرعت هر جزء سیستم را بر حسب مختصات و سرعت‌های تعمیم‌یافته پیدا کنید، سپس T کل را بنویسید.

۴. بیان انرژی پتانسیل (V): V کل را بر حسب مختصات تعمیم‌یافته بنویسید.

۵. ساختن لاگرانژی: تابع $L = T - V$ را تشکیل دهید.

۶. اعمال معادلات اویلر–لاگرانژ: برای هر q_i، مشتقات $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ و $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ را محاسبه کرده و سپس معادله $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ را تشکیل دهید.

۴.۱ مثال‌های حل شده: از ساده به پیچیده

مثال ۱.۴.۱ (نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی). جرمی به اندازه m به فنری با ثابت نیرو k روی یک میز افقی بدون اصطکاک متصل شده است. معادله حرکت آن را بیابید.

راه حل:

۱. درجات آزادی: جرم فقط می‌تواند در یک بعد حرکت کند. $n = 1$.

۲. مختصات تعمیم‌یافته: جابجایی از تعادل، x، انتخاب طبیعی است. بنابراین $q_1 = x$.

۳. انرژی‌ها:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$
$$V = \frac{1}{2}kx^2.$$

۴. لاگرانژی:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

۵. معادله اویلر-لاگرانژ: برای $q_i = x$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}.$$

با جایگذاری در معادله اویلر-لاگرانژ:

$$m\ddot{x} - (-kx) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}.$$

این همان معادله استاندارد نوسانگر هماهنگ ساده است که صحت روش لاگرانژی را برای این سیستم ساده تأیید می‌کند.

مثال ۲.۴.۱ (آونگ ساده). یک جرم نقطه‌ای m توسط یک میله صلب و بدون جرم به طول l از یک تکیه‌گاه ثابت آویزان شده است. این جرم تحت تأثیر گرانش نوسان می‌کند. معادله حرکت آن را بیابید.

راه حل:

۱. درجات آزادی: جرم محدود به حرکت روی دایره‌ای به شعاع l است. $n = 1$.

۲. مختصات تعمیم‌یافته: زاویه θ نسبت به خط عمود انتخاب طبیعی است.

۳. انرژی‌ها: باید T و V را بر حسب θ و $\dot{\theta}$ بیان کنیم.

- سرعت جرم برابر است با $v = l\dot{\theta}$.
- انرژی جنبشی: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$.
- انرژی پتانسیل: با قرار دادن صفر انرژی پتانسیل در تکیه‌گاه، ارتفاع جرم $y = -l\cos\theta$ است. بنابراین، $V = mgy = -mgl\cos\theta$.

۴. لاگرانژی:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta.$$

۵. معادله اویلر–لاگرانژ: برای $q_i = \theta$:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}.$$

با جایگذاری در معادله اویلر–لاگرانژ:

$$ml^2\ddot{\theta} - (-mgl\sin\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0.$$

با ساده‌سازی، معادله معروف آونگ را به دست می‌آوریم:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}.$$

توجه کنید که کشش در میله، که یک نیروی قیدی است، هرگز در محاسبات ما ظاهر نشد.

مثال ۳.۴.۱ (ذره روی مخروط: سیستمی با دو درجه آزادی). ذره‌ای به جرم m بدون اصطکاک روی سطح داخلی یک مخروط قائم با نیم‌زاویه رأس α، تحت گرانش ثابت g می‌لغزد. محور مخروط عمودی است. معادلات حرکت را بیابید.

راه حل:

۱. درجات آزادی و قیود: ذره محدود به یک سطح دوبعدی در فضای سه‌بعدی است. $n = 3 - 1 = 2$.

۲. مختصات تعمیم‌یافته: مختصات استوانه‌ای (r, ϕ) ایده‌آل هستند. قید $z = r\cot\alpha$ مختص z را به r مربوط می‌کند.

۳. انرژی‌ها: به مربع سرعت نیاز داریم، $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$.

- از معادله قید داریم: $\dot{z} = \dot{r}\cot\alpha$.
- بنابراین، $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2\cot^2\alpha = \dot{r}^2(1 + \cot^2\alpha) + r^2\dot{\phi}^2$.
- با استفاده از اتحاد $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$، داریم:

$$v^2 = \frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot{\phi}^2.$$

- انرژی جنبشی: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot{\phi}^2\right)$.
- انرژی پتانسیل: $V = mgz = mgr\cot\alpha$.

۴. لاگرانژی:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot{\phi}^2\right) - mgr\cot\alpha.$$

۵. معادلات اویلر–لاگرانژ:

- برای $q_i = r$:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - mg\cot\alpha,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m\dot{r}}{\sin^2\alpha},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{m\ddot{r}}{\sin^2\alpha}.$$

معادله E–L می‌دهد:

$$\frac{m\ddot{r}}{\sin^2\alpha} - \left(mr\dot{\phi}^2 - mg\cot\alpha\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\ddot{r}}{\sin^2\alpha} - r\dot{\phi}^2 + g\cot\alpha = 0}.$$

- برای $q_i = \phi$:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 2mr\dot{r}\dot{\phi} + mr^2\ddot{\phi}.$$

معادله E–L می‌دهد:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0}.$$

این نشان می‌دهد که $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ یک ثابت حرکت است. این همان پایستگی تکانه زاویه‌ای حول محور عمودی است. مختصه ϕ یک مختصه دوری (cyclic) است.

این مثال نشان می‌دهد که چگونه مکانیک لاگرانژی به طور طبیعی قیود را مدیریت کرده و قوانین پایستگی را آشکار می‌کند.

۵.۱ برهم‌کنش‌ها و قدرت تبدیلات مختصات

در مکانیک نیوتنی، برهم‌کنش‌ها توسط بردارهای نیرو توصیف می‌شوند. در مکانیک لاگرانژی، آنها در تابع انرژی پتانسیل V کدگذاری می‌شوند. این امر به ویژه برای سیستم‌های چنددرجه‌ای قدرتمند است.

مثال ۱.۵.۱ (مسئله دو جسم با نیروی مرکزی). دو جرم m_1 و m_2 را در نظر بگیرید که از طریق یک پتانسیل مرکزی پایستار V که فقط به فاصله بین آنها بستگی دارد ($V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$)، برهم‌کنش دارند. معادلات حرکت را بیابید.

راه حل: این مسئله به نظر یک مسئله با ۶ درجه آزادی می‌رسد (۳ مختصه برای هر ذره). با این حال، می‌توانیم از مختصات تعمیم‌یافته‌ای استفاده کنیم که از تقارن‌ها بهره می‌برند.

۱. تبدیل مختصات: به جای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$، استفاده می‌کنیم از:

- مرکز جرم: $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$.
- مختصه نسبی: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

۲. لاگرانژی در مختصات جدید: لاگرانژی در مختصات اولیه عبارت است از:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(|\mathbf{r}|).$$

پس از یک محاسبه غیربدیهی اما سرراست، این عبارت تبدیل می‌شود به:

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2}_{L_{\text{CM}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)}_{L_{\text{rel}}}.$$

که در آن $M = m_1 + m_2$ جرم کل و $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ جرم کاهش‌یافته است.

۳. معادلات حرکت:

- برای $\mathbf{R}$: مختصات X, Y, Z همگی دوری هستند ($\frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = 0$). بنابراین، تکانه‌های مزدوج آنها پایسته هستند: $\frac{d}{dt}(M\dot{\mathbf{R}}) = 0$. مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند.
- برای $\mathbf{r}$: حرکت نسبی توسط L_{rel} اداره می‌شود، که لاگرانژی برای یک تک ذره فرضی به جرم μ است که در پتانسیل مرکزی $V(r)$ حرکت می‌کند. این یک ساده‌سازی عظیم است.

این مثال قدرت روش لاگرانژی را در جداسازی (decouple) حرکت‌های پیچیده از طریق انتخاب هوشمندانه مختصات تعمیم‌یافته نشان می‌دهد.

۶.۱ مبانی نظری و مفاهیم پیشرفته

۱.۶.۱ قوانین پایستگی و مختصات دوری

یکی از زیبایی‌های عمیق فرمالیسم لاگرانژی، ارتباط مستقیم آن بین تقارن‌ها و قوانین پایستگی است که در قضیه نوتر خلاصه شده است. نمود ساده‌ای از این امر، مفهوم مختصات دوری است.

تعریف ۱.۶.۱ (مختصه دوری). یک مختصه تعمیم‌یافته q_i که به‌طور صریح در لاگرانژی ظاهر نمی‌شود ($\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$)، مختصه دوری یا نادیدنی (ignorable) نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۶.۱ (پایستگی تکانه مزدوج). تکانه تعمیم‌یافته $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ مزدوج با یک مختصه دوری q_i، یک ثابت حرکت است.

اثبات: معادله اویلر-لاگرانژ برای q_i برابر است با $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$. اگر q_i دوری باشد، $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$، بنابراین $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$، به این معنی که p_i ثابت است. ■

مثال‌ها:

- در مسئله مخروط (مثال ۳.۴.۱)، ϕ دوری بود که منجر به پایستگی تکانه زاویه‌ای $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ شد.
- در مسئله دو جسم (مثال ۱.۵.۱)، $\mathbf{R}$ دوری بود که منجر به پایستگی تکانه خطی کل شد.

۲.۶.۱ پایستگی انرژی

کمیت پایسته بنیادی دیگر، انرژی کل است. ما تابع انرژی h (که انتگرال ژاکوبی نیز نامیده می‌شود) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \tag{۴.۱}$$

قضیه ۲.۶.۱ (پایستگی انرژی). اگر لاگرانژی L به‌طور صریح به زمان وابسته نباشد ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$)، آنگاه تابع انرژی h پایسته است، یعنی $\frac{dh}{dt} = 0$. برای اکثر سیستم‌هایی که پتانسیل V مستقل از سرعت است و انرژی جنبشی T تابعی همگن از درجه دو از سرعت‌هاست، h برابر با کل انرژی مکانیکی $T + V$ است.

۳.۶.۱ آزادی پیمانه‌ای لاگرانژی

لاگرانژی برای یک سیستم فیزیکی معین، یک تابع منحصربه‌فرد نیست. معادلات حرکت تحت تبدیلات زیر بدون تغییر باقی می‌مانند:

۱. ضرب در یک ثابت: $L' = cL$، که در آن c یک ثابت است.

۲. افزودن مشتق زمانی کامل: $L' = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$، که در آن $F(q,t)$ تابعی دلخواه از مختصات و زمان است.

این «آزادی پیمانه‌ای» گاهی اوقات می‌تواند برای ساده‌سازی لاگرانژی مورد استفاده قرار گیرد.

۷.۱ نیروهای قیدی و ضرایب لاگرانژ

تا کنون، ما از روش لاگرانژی برای حذف نیروهای قیدی استفاده کرده‌ایم. اما اگر بخواهیم آنها را پیدا کنیم چه؟ به عنوان مثال، ممکن است لازم باشد کشش در میله آونگ را بدانیم تا اطمینان حاصل کنیم که نمی‌شکند. روش ضرایب لاگرانژ به ما اجازه می‌دهد تا قیود را وارد کرده و این نیروها را حل کنیم.

۱.۷.۱ روش

فرض کنید سیستمی با n درجه آزادی و m قید هولونومیک به شکل $f_j(q_1,\dots,q_n,t)=0$ برای $j=1,\dots,m$ داریم. به جای کاهش به $n-m$ مختصه، ما با تمام n مختصه کار می‌کنیم و لاگرانژی را تغییر می‌دهیم:

$$L' = L(q,\dot{q},t) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) f_j(q,t). \tag{۵.۱}$$

مقادیر $\lambda_j(t)$ همان ضرایب لاگرانژ هستند. معادلات اویلر-لاگرانژ اکنون به صورت زیر می‌شوند:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}, \qquad \text{برای } i=1,\dots,n. \tag{۶.۱}$$

سمت راست، $Q_i = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$، به عنوان نیروی قیدی تعمیم‌یافته مرتبط با مختصه q_i تفسیر می‌شود.

مثال ۱.۷.۱ (یافتن کشش در یک آونگ ساده). برای آونگ ساده مثال ۲.۴.۱، از ضرایب لاگرانژ برای یافتن نیروی کشش در میله استفاده کنید.
راه حل:

۱. مختصات و قید: اکنون از دو مختصه استفاده می‌کنیم: فاصله شعاعی r و زاویه θ. قیدی که بیان می‌کند میله طول ثابت l دارد عبارت است از $f(r)=r-l=0$.

۲. لاگرانژی با ضریب:

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta + \lambda(r-l).$$

۳. معادلات اویلر-لاگرانژ:

- برای $q_i = r$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + \lambda,\\
\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}}\right) &= m\ddot{r}.
\end{aligned}$$

معادله E-L عبارت است از:

$$m\ddot{r} - (mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + \lambda) = 0. \tag{۷.۱}$$

- برای $q_i = \theta$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \theta} &= -mgr\sin\theta,\\
\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}}\right) &= 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}.
\end{aligned}$$

معادله E-L عبارت است از:

$$2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + mgr\sin\theta = 0. \tag{۸.۱}$$

۴. اعمال قید: قید $r=l$ است که مستلزم $\dot{r}=0$ و $\ddot{r}=0$ است.

- معادله (۸.۱) می‌شود:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

که همان معادله استاندارد آونگ است.

- معادله (۷.۱) می‌شود:

$$0 - (ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta.$$

۵. تفسیر فیزیکی: نیروی تعمیم‌یافته مرتبط با r برابر است با $Q_r^{constraint} = \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = \lambda$. این نیرو در جهت شعاعی عمل می‌کند. علامت منفی نشان می‌دهد که جهت آن به سمت داخل، به طرف تکیه‌گاه است. بزرگی کشش T در میله، منفی این نیروی شعاعی است (چرا که کشش با حرکت شعاعی به سمت خارج مقابله می‌کند):

$$T = -Q_r^{constraint} = -\lambda = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta.$$

این نتیجه کاملاً توجیه فیزیکی دارد: کشش دارای یک مؤلفه $mg\cos\theta$ برای خنثی کردن مؤلفه شعاعی گرانش، به علاوه یک جمله مرکزگرا $ml\dot{\theta}^2$ است که برای نگه داشتن جرم در حرکت دایره‌ای لازم است.

خلاصه فصل

فرمالیسم لاگرانژی چارچوبی قدرتمند و زیبا برای مکانیک کلاسیک فراهم می‌کند که اغلب نسبت به رویکرد نیوتنی برتری دارد، به‌ویژه برای سیستم‌های پیچیده دارای قید. ویژگی‌های کلیدی آن عبارتند از:

- بر اساس کمیت‌های اسکالر انرژی جنبشی و پتانسیل بنا شده است.
- به‌طور خودکار نیروهای قیدی که کار انجام نمی‌دهند را حذف می‌کند.
- هم‌ورد (covariant) است، یعنی معادلات حرکت در هر سیستم مختصاتی شکل یکسانی دارند.
- پیوندی مستقیم بین تقارن‌ها (مختصات دوری) و قوانین پایستگی فراهم می‌کند.
- روش ضرایب لاگرانژ کاربرد آن را برای یافتن نیروهای قیدی گسترش می‌دهد.

این چارچوب صرفاً یک ابزار محاسباتی نیست؛ بلکه پایه‌ای است که نظریه‌های فیزیکی پیشرفته‌تر، از جمله مکانیک کوانتومی و نظریه میدان، بر آن بنا شده‌اند.