

۱ چارچوب‌های نالخت (Non-Inertial Frames)

ما مدت‌ها پیش بیان کردیم که چارچوب‌های لخت (Inertial frames)، بستری برای مکانیک نیوتنی فراهم می‌کنند. اما اگر روزی خود را در چارچوبی بیابید که لخت نیست چه؟ برای مثال، فرض کنید هر ۲۴ ساعت یک‌بار دور محوری می‌چرخید که ۲۵۰۰ مایل با شما فاصله دارد. چه احساسی خواهید داشت؟ یا اگر هر سال دور محوری در ۳۶ میلیون مایلی بچرخید چه؟ آیا این موضوع تأثیری بر زندگی روزمره شما خواهد داشت؟

در این بخش بحث خواهیم کرد که معادلات حرکت نیوتن در چارچوب‌های نالخت چگونه به نظر می‌رسند. درست همان‌طور که راه‌های بسیاری وجود دارد که یک حیوان «سگ» نباشد، راه‌های بسیاری نیز وجود دارد که یک چارچوب مرجع، نالخت باشد. در اینجا ما فقط یک نوع را در نظر می‌گیریم: چارچوب‌های مرجعی که می‌چرخند. کار را با برخی مفاهیم اولیه آغاز می‌کنیم.

۱.۶ چارچوب‌های چرخان

بیابید با چارچوب لخت S که در شکل رسم شده است، با محورهای مختصات x, y و z شروع کنیم. هدف ما درک حرکت ذرات از دید ناظری در یک چارچوب نالخت S' است که دارای محورهای x', y' و z' بوده و نسبت به S در حال چرخش است. ما زاویه بین محور x در S و محور x' در S' را با θ نشان می‌دهیم. از آنجا که S' در حال چرخش است، واضح است که $\theta = \theta(t)$ و $\theta \neq 0$.

نخستین وظیفه ما یافتن راهی برای توصیف چرخش محورهاست. برای این کار، می‌توانیم از بردار سرعت زاویه‌ای ω استفاده کنیم که در بخش قبل برای توصیف حرکت ذرات معرفی کردیم. ذره‌ای را در نظر بگیرید که در چارچوب S' ساکن است. در این صورت، از دیدگاه چارچوب S ، به نظر می‌رسد که این ذره با سرعت زیر در حال حرکت است:

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

که در مورد حاضر، $\hat{z} = \hat{\theta}$ است. به یاد داشته باشید که به طور کلی، $|\omega|$ تندی زاویه‌ای (angular speed) است، در حالی که جهت ω محور چرخش است که طبق قاعده دست راست تعریف می‌شود.

ما می‌توانیم این توصیف را به چرخش خودِ محورهای S' تعمیم دهیم. فرض کنید e_i که $i = 1, 2, 3$ است، بردارهای یک‌ای باشند که در راستای جهت‌های x', y' و z' در S' اشاره می‌کنند. در این صورت، این بردارها نیز با سرعت زیر می‌چرخند:

$$\dot{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times e_i$$

این فرمول اصلی خواهد بود که به ما اجازه می‌دهد حرکت در چارچوب‌های چرخان را درک کنیم.

۱.۱.۶ سرعت و شتاب در یک چارچوب چرخان

حال ذره‌ای را در نظر بگیرید که دیگر در چارچوب S' ثابت نیست، بلکه روی مسیری حرکت می‌کند. می‌توانیم مکان ذره را در چارچوب لخت S اندازه بگیریم، که با استفاده از قرارداد جمع‌زنی (summation convention)، می‌نویسیم:

$$\mathbf{r} = r_i e_i$$

در اینجا بردارهای یکه e_i با $i = 1, 2, 3$ در امتداد محورهای S قرار دارند. به طور جایگزین، می‌توانیم مکان ذره را در چارچوب S' اندازه بگیریم، که در آن مکان برابر است با:

$$\mathbf{r} = r'_i \mathbf{e}'_i$$

توجه کنید که بردار مکان $\mathbf{r}$ در هر دو عبارت یکسان است؛ اما مختصات r_i و r'_i متفاوت هستند زیرا نسبت به محورهای متفاوتی اندازه گرفته شده‌اند. حال می‌توانیم عبارتی برای سرعت ذره محاسبه کنیم. در چارچوب S ، سرعت به سادگی برابر است با:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}_i \mathbf{e}_i \quad (۱.۶)$$

زیرا محورهای e_i با زمان تغییر نمی‌کنند. با این حال، در چارچوب چرخان S' ، سرعت ذره برابر است با:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}'_i \mathbf{e}'_i + r'_i \dot{\mathbf{e}}'_i \\ &= \dot{r}'_i \mathbf{e}'_i + r'_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i \\ &= \dot{r}'_i \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (۲.۶)$$

ما نمادگذاری کمی جدیدی را برای کمک به برجسته کردن فیزیک پنهان شده در این دو معادله معرفی می‌کنیم. سرعت ذره را آن‌گونه که توسط ناظری در چارچوب S دیده می‌شود به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_S = \dot{r}_i \mathbf{e}_i$$

به همین ترتیب، سرعتی که توسط ناظری در چارچوب S' دیده می‌شود برابر است با:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{S'} = \dot{r}'_i \mathbf{e}'_i$$

از معادلات (۱.۶) و (۲.۶)، می‌بینیم که دو ناظر سرعت‌های متفاوتی را اندازه می‌گیرند:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (۳.۶)$$

این کاملاً هم تعجب‌آور نیست: تفاوت صرفاً سرعت نسبی دو چارچوب است. در مورد شتاب چطور؟ می‌توانیم همین بازی را تکرار کنیم. در چارچوب S داریم:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}_i \mathbf{e}_i$$

در حالی که در چارچوب S' ، عبارت کمی پیچیده‌تر است. با مشتق‌گیری مجدد از (۲.۶)، داریم:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{r}'_i \mathbf{e}'_i + \dot{r}'_i \dot{\mathbf{e}}'_i + \dot{r}'_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i + r'_i \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}'_i + r'_i \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{e}}'_i \\ &= \ddot{r}'_i \mathbf{e}'_i + 2\dot{r}'_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + r'_i \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i) \end{aligned}$$

همانند سرعت‌ها، شتاب دیده‌شده توسط ناظر در S برابر $\ddot{r}_i \mathbf{e}_i$ است، در حالی که شتاب دیده‌شده توسط ناظر در S' برابر $\ddot{r}'_i \mathbf{e}'_i$ می‌باشد. برابر قرار دادن دو معادله فوق به ما می‌دهد:

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_S = \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{S'} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{S'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (۴.۶)$$

این معادله کلید درک حرکت ذرات در یک چارچوب چرخان است.

۲.۶ معادله حرکت نیوتن در یک چارچوب چرخان

با پشت سر گذاشتن بخش دشوار کار، بیایید ببینیم شخصی که در چارچوب چرخان S' نشسته است، قانون حرکت نیوتن را چگونه می بیند. می دانیم که در چارچوب لخت S ، داریم:

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_S = \mathbf{F}$$

بنابراین، با استفاده از (۴.۶)، در چارچوب S' داریم:

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{S'} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{S'} - m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (۵.۶)$$

به عبارت دیگر، برای توضیح حرکت یک ذره، ناظر در S' باید وجود سه جمله دیگر را در سمت راست معادله نیوتن دخیل کند. اینها نیروهای کاذب (fictitious forces) نامیده می شوند. از دیدگاه S' ، یک ذره آزاد در خط مستقیم حرکت نمی کند و این نیروهای کاذب برای توضیح این انحراف از حرکت یکنواخت ضروری هستند. در ادامه این بخش، مثالهای متعددی از این موضوع خواهیم دید. جمله $-2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ در معادله (۵.۶) نیروی کوریولیس (Coriolis force) است؛ جمله $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ (نیروی گریز از مرکز centrifugal force) نامیده می شود؛ و جمله $-m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ نیروی اوایلر (Euler force) نام دارد.

آشناترین چارچوب نالخت، اتفاقی است که در آن نشسته اید. این اتاق روزی یک بار حول محور شمال-جنوب زمین می چرخد. علاوه بر این، سالی یک بار به دور خورشید می چرخد که خود خورشید نیز به دور مرکز کهکشان در چرخش است. از این مقیاس های زمانی، می توانیم به آسانی $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ را محاسبه کنیم. شعاع زمین $R_{\text{Earth}} \approx 6 \times 10^3$ کیلومتر است. زمین با بسامد زاویه ای زیر می چرخد:

$$\omega_{\text{rot}} = \frac{2\pi}{1\text{day}} \approx 7 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

فاصله زمین تا خورشید $a_e \approx 2 \times 10^8$ کیلومتر است. بسامد زاویه ای مدار برابر است با:

$$\omega_{\text{orb}} = \frac{2\pi}{1\text{year}} \approx 2 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

جای تعجب نیست اگر بفهمیم که $\omega_{\text{rot}}/\omega_{\text{orb}} = T_{\text{orb}}/T_{\text{rot}} \approx 365$.

در آنچه در پی می آید، اثر نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس را بر زندگی روزمره خود خواهیم دید. ما در مورد نیروی اوایلر بحث نخواهیم کرد، که تنها زمانی پدیدار می شود که سرعت چرخش با زمان تغییر کند. اگرچه این نیرو در وسایل مختلف شهرسازی نقش ایفا می کند، اما در چارچوب زمین اهمیتی ندارد. (سرعت زاویه ای چرخش زمین، در واقع، دارای یک $\dot{\omega}$ کوچک اما غیرصفر به دلیل حرکت تقدیمی (precession) و رقص محوری (nutation) محور چرخش زمین است. با این حال، این مقدار بسیار ناچیز است، به طوری که $\omega^2 \ll \dot{\omega}$ و تا آنجا که من می دانم، نیروی اوایلر حاصل از آن هیچ پیامدی ندارد).

بازبینی جرم لخت در برابر گرانشی

توجه کنید که تمام نیروهای کاذب با جرم لخت m متناسب هستند. هیچ رازی در اینجا وجود ندارد: دلیل آن این است که همه آن‌ها از سمت « ma » در رابطه « $F=ma$ » سرچشمه گرفته‌اند نه از سمت « F ». اما، همان‌طور که در بخش ۲ اشاره کردیم، به نظر می‌رسد که نیروی گرانشی نیز از نظر تجربی با جرم لخت متناسب است. آیا این شاهدهی بر آن است که گرانش نیز یک نیروی کاذب است؟ در واقع همین‌طور است. نظریه نسبیت عام انیشتین، گرانش را به عنوان نیروی کاذبی بازتعریف می‌کند که ما به دلیل خمیدگی فضا و زمان تجربه می‌کنیم.

۳.۶ نیروی گریز از مرکز

نیروی گریز از مرکز به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{cent}} &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= -m(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} + m\omega^2\mathbf{r}\end{aligned}$$

ما می‌توانیم با نگاه کردن به شکل حسی از این نیرو پیدا کنیم. بردار $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ به سمت داخل صفحه اشاره دارد، که بدین معناست که $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ - همان‌طور که نشان داده شده، به سمت دور شدن از محور چرخش اشاره دارد. بزرگی این نیرو برابر است با:

$$|\mathbf{F}_{\text{cent}}| = m\omega^2 r \cos \theta = m\omega^2 d \quad (۶.۶)$$

که در آن d فاصله تا محور چرخش است. نیروی گریز از مرکز به سرعت ذره بستگی ندارد. در واقع، این نمونه‌ای از یک نیروی پایستار (con-servative force) است. می‌توانیم این را با نوشتن رابطه زیر ببینیم:

$$\mathbf{F}_{\text{cent}} = -\nabla V \quad \text{با} \quad V = -\frac{m}{2}|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2 \quad (۷.۶)$$

در یک چارچوب چرخان، V تعبیر انرژی پتانسیل مرتبط با یک ذره را دارد. پتانسیل V منفی است، که به ما می‌گوید ذرات تمایل دارند از محور چرخش دور شوند تا انرژی خود را با افزایش $|\mathbf{r}|$ کاهش دهند.

۱.۳.۶ یک مثال: گرانش ظاهری

تکه‌ای نخ را از سقف آویزان کنید. ممکن است انتظار داشته باشید که نخ مستقیماً به سمت مرکز زمین اشاره کند. اما اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از چرخش زمین به این معناست که قضیه این‌طور نیست. تصویری تا حدی اغراق‌آمیز از این وضعیت در شکل نشان داده شده است. سوالی که مایلیم به آن پاسخ دهیم این است: زاویه‌ای (ϕ) که نخ با خط واصل به مرکز زمین می‌سازد چقدر است؟ همان‌طور که اکنون نشان خواهیم داد، زاویه ϕ به عرض جغرافیایی θ که در آن قرار داریم بستگی دارد. شتاب مؤثر، که ناشی از ترکیب گرانش و نیروی گریز از مرکز است، برابر است با:

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

مفید است که این شتاب را با استفاده از بردارهای $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ در راستاهای شعاعی و جنوبی تجزیه کنیم. نیروی گریز از مرکز F به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= |\mathbf{F}| \cos \theta \hat{r} - |\mathbf{F}| \sin \theta \hat{\theta} \\ &= m\omega^2 r \cos^2 \theta \hat{r} - m\omega^2 r \cos \theta \sin \theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

که در خط دوم، از بزرگی نیروی گریز از مرکز محاسبه شده در (۶.۶) استفاده کرده‌ایم. توجه کنید که در قطب ($\theta = \pi/2$) نیروهای گریز از مرکز همان‌طور که انتظار می‌رفت صفر می‌شوند. این امر شتاب مؤثر را به دست می‌دهد:

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} = -g\hat{r} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (-g + \omega^2 R \cos^2 \theta)\hat{r} - \omega^2 R \cos \theta \sin \theta \hat{\theta}$$

که در آن R شعاع زمین است. نیروی $m\mathbf{g}_{\text{eff}}$ باید توسط نیروی کشش $\mathbf{T}$ در نخ خنثی شود. این نیرو نیز می‌تواند به صورت زیر تجزیه شود:

$$\mathbf{T} = T \cos \phi \hat{r} + T \sin \phi \hat{\theta}$$

در حال تعادل، نیاز داریم که $m\mathbf{g}_{\text{eff}} + \mathbf{T} = 0$ باشد، که به ما اجازه می‌دهد T را حذف کنیم تا معادله‌ای به دست آوریم که ϕ را به عرض جغرافیایی θ مربوط می‌سازد:

$$\tan \phi = \frac{\omega^2 R \cos \theta \sin \theta}{g - \omega^2 R \cos^2 \theta}$$

این همان پاسخی است که می‌خواستیم. بیایید بینیم زاویه ϕ در چه عرض جغرافیایی بیشترین مقدار را دارد. اگر $d(\tan \phi)/d\theta$ را محاسبه کنیم، به عبارت نسبتاً پیچیده‌ای می‌رسیم. با این حال، اگر این واقعیت را در نظر بگیریم که $g \ll \omega^2 R \approx 3 \times 10^{-2} \text{ms}^{-2}$ ، می‌توانیم از جمله‌ای که در آن از مخرج مشتق می‌گیریم صرف‌نظر کنیم. درمی‌یابیم که بیشترین انحراف از خط عمود کم‌وبیش زمانی رخ می‌دهد که $d(\cos \theta \sin \theta)/d\theta = 0$. یا به عبارت دیگر، در عرض جغرافیایی $\theta \approx 45^\circ$. با این حال، حتی در این نقطه نیز انحراف از خط عمود بسیار ناچیز است: مرتبه بزرگی آن $\phi \approx 10^{-4}$ است. زمانی که در استوا می‌نشینیم، با $\theta = 0$ ، آنگاه $\phi = 0$ می‌شود و نخ مستقیماً به سمت مرکز زمین آویزان می‌شود. با این حال، گرانش به دلیل نیروی گریز از مرکز اندکی ضعیف‌تر است. ما داریم:

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} \Big|_{\text{equator}} = g - \omega^2 R$$

بر این اساس، انتظار داریم در استوا $g_{\text{eff}} - g \approx 3 \times 10^{-2} \text{ms}^{-2}$ باشد. در واقعیت، نتیجه تجربی بیشتر شبیه به $5 \times 10^{-2} \text{ms}^{-2}$ است. دلیل این اختلاف نیز می‌تواند به نیروی گریز از مرکز ردیابی شود که باعث می‌شود زمین کروی نباشد، بلکه در نزدیکی استوا شکم داده (برآمده) باشد.

یک سطل چرخان

سطلی را پر از آب کنید و آن را بچرخانید. سطح آب شکلی مقعر (کاو) مانند آنچه در شکل نشان داده شده به خود می‌گیرد. این شکل چیست؟
ما فرض می‌کنیم که آب همراه با سطل می‌چرخد. انرژی پتانسیل یک مولکول آب در این صورت دو سهم دارد: یکی از گرانش و دیگری ناشی از نیروی گریز از مرکز داده شده در (۷.۶):

$$V_{\text{water}} = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

حال از یک استدلال فیزیکی نسبتاً زیرکانه استفاده می‌کنیم. یک مولکول آب را روی سطح مایع در نظر بگیرید. اگر این مولکول می‌توانست با حرکت در طول سطح انرژی خود را کاهش دهد، این کار را می‌کرد. اما ما به دنبال شکل تعادلی سطح هستیم، که به این معنی است که هر نقطه روی سطح باید انرژی پتانسیل برابری داشته باشد. این بدان معناست که شکل سطح یک سهمی است که توسط معادله زیر تعیین می‌شود:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{constant}$$

۴.۶ نیروی کوریولیس

نیروی کوریولیس به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

که در آن، از (۵.۶)، می‌بینیم که $\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/dt)_{S'}$ سرعت ذره اندازه‌گیری شده در چارچوب چرخان S' است. این نیرو وابسته به سرعت است: تنها توسط ذرات متحرک احساس می‌شود. علاوه بر این، مستقل از مکان است.

۱.۴.۶ ذرات، وان‌های حمام و طوفان‌ها

فرم ریاضی نیروی کوریولیس دقیقاً مشابه نیروی لورنتس است که ذره‌ای متحرک در یک میدان مغناطیسی را توصیف می‌کند. این بدان معناست که ما از قبل می‌دانیم اثر نیروی کوریولیس چه خواهد بود: باعث می‌شود ذرات متحرک روی دایره بچرخند.

ما به آسانی می‌توانیم بررسی کنیم که واقعاً چنین است. ذره‌ای را در نظر بگیرید که روی یک صفحه چرخان حرکت می‌کند، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، جایی که ω از صفحه بیرون می‌آید. در نمودار، سرعت‌های مختلف ذره را به همراه نیروی کوریولیس تجربه شده توسط ذره رسم کرده‌ایم. می‌بینیم که اثر نیروی کوریولیس این است که یک ذره آزاد که روی صفحه حرکت می‌کند، در جهت ساعت‌گرد منحرف خواهد شد.

نیروی مشابهی وجود دارد — حداقل در اصل — وقتی که درپوش چاهک وان حمام خود را می‌کشید. اما در اینجا تفاوت ظریفی وجود دارد که در واقع جهت حرکت را معکوس می‌کند!

سیالی را در نظر بگیرید که در آن ناحیه‌ای با فشار کم وجود دارد. این ناحیه می‌تواند در سینک ایجاد شود چون ما درپوش را کشیده‌ایم، یا می‌تواند در اتمسفر به دلیل نوسانات تصادفی آب‌وهوایی شکل بگیرد.

حال ذرات در سیال به صورت شعاعی به سمت ناحیه کم فشار حرکت خواهند کرد. همان طور که آن‌ها حرکت می‌کنند، توسط نیروی کوریولیس منحرف می‌شوند (مانند شکل زیر). جهت انحراف همانند جهت انحراف ذره‌ای است که روی صفحه حرکت می‌کند. اما اثر خالص این است که سیال در حال چرخش در جهت پادساعت‌گرد (خلاف عقربه‌های ساعت) حرکت می‌کند.

نیروی کوریولیس مسئول حرکت مقیاس بزرگ اقیانوس و اتمسفر است. (معادلات مربوطه در این زمینه را می‌توان در بخش ۳.۴ درس‌نامه مکانیک سیالات یافت.) این نیرو همچنین مسئول شکل‌گیری طوفان‌ها (گردبادها) است. این طوفان‌ها در نیم‌کره شمالی در جهت پادساعت‌گرد و در نیم‌کره جنوبی در جهت ساعت‌گرد می‌چرخند. با این حال، وقت زیادی را صرف خیره شدن به چرخش آب وان حمام خود نکنید. اگرچه این اثر می‌تواند در محیط‌های آزمایشگاهی بازتولید شود، در حمام شما نیروی کوریولیس بسیار ناچیز است: احتمال اینکه نیروی کوریولیس باعث تغییر جهت آب وان شما شود بیشتر از احتمال تغییر جهت سی‌دی (CD) شما نیست. (یک حاشیه: سی‌دی‌ها چیزهایی هستند که مردم قبل از تلفن‌ها استفاده می‌کردند. برخی شهرها موزه‌هایی دارند — که قبلاً به آن‌ها فروشگاه صفحه می‌گفتند — که نمونه‌هایی از قاب‌های سی‌دی را برای تماشای مردم نمایش می‌دهند.)

بحث ما در بالا فرض می‌کرد که اجسام روی صفحه‌ای حرکت می‌کنند که بر سرعت زاویه‌ای ω عمود است. اما این برای طوفان‌ها صادق نیست: آن‌ها در امتداد سطح زمین حرکت می‌کنند، که بدین معناست که سرعت آن‌ها مؤلفه‌ای موازی با ω دارد. در این حالت، بزرگی مؤثر نیروی کوریولیس یک ضریب هندسی می‌گیرد:

$$|F_{\text{cor}}| = 2m\omega v \sin \theta \quad (۸.۶)$$

ساده‌ترین حالت برای دیدن ضریب $\sin \theta$ ، در مورد ذره‌ای است که به سمت شمال حرکت می‌کند. در اینجا نیروی کوریولیس در جهت شرقی عمل می‌کند و کمی مثلثات نشان می‌دهد که بزرگی نیرو همان‌طور که ادعا شد $2m\omega v \sin \theta$ است. این موضوع به ویژه در استوا که $\theta = 0$ است واضح است. در اینجا ذره‌ای که به سمت شمال می‌رود، v موازی با ω دارد و بنابراین نیروی کوریولیس ناپدید می‌شود. دیدن ضریب $\sin \theta$ برای ذره‌ای که در جهت شرقی حرکت می‌کند کمی دشوارتر است. در این حالت، v بر ω عمود است، بنابراین بزرگی نیرو در واقع $2m\omega v$ است، بدون هیچ ضریب مثلثاتی. با این حال، جهت نیرو دیگر موازی با سطح زمین نیست: مؤلفه‌ای دارد که مستقیماً به سمت بالا اشاره می‌کند. اما ما به این مؤلفه علاقه‌ای نداریم؛ قطعاً آن قدر بزرگ نخواهد بود که با گرانش رقابت کند. با تصویر کردن روی مؤلفه‌ای که موازی سطح زمین است (در این حالت در جهت جنوبی)، ما دوباره یک ضریب $\sin \theta$ به دست می‌آوریم.

ضریب $\sin \theta$ در (۸.۶) یک پیامد هواشناختی مهم دارد: نیروی کوریولیس زمانی که $\theta = 0$ است ناپدید می‌شود، که تضمین می‌کند طوفان‌ها در فاصله ۵۰۰ مایلی استوا شکل نمی‌گیرند.

۲.۴.۶ توپ‌ها و برج‌ها

از برجی بالا بروید و توپی را رها کنید. توپ کجا فرود می‌آید؟ از آنجا که زمین در زیر برج می‌چرخد، ممکن است فکر کنید توپ پشت سر شما فرود می‌آید. در واقع، توپ در جلوی شما فرود می‌آید! بیایید ببینیم این نتیجه تا حدی غیرشهودی از کجا می‌آید.

معادله حرکت در یک چارچوب چرخان عبارت است از:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$$

ما قبلاً در بخش ۱.۳.۶ دیده‌ایم که اثر نیروی گریز از مرکز تغییر جهت مؤثر گرانش است. اما همچنین دیدیم که این اثر کوچک است. در آنچه در پی می‌آید، ما از جمله گریز از مرکز صرف‌نظر می‌کنیم. در واقع، ما تمام جملات از مرتبه $O(\omega^2)$ را نادیده خواهیم گرفت (یک جمله دیگر نیز به زودی خواهد آمد!). بنابراین معادله حرکت زیر را حل خواهیم کرد:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (۹.۶)$$

گام نخست آسان است: می‌توانیم یک‌بار از این انتگرال بگیریم تا به رابطه زیر برسیم:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

که در آن مکان اولیه $\mathbf{r}_0$ را به عنوان ثابت انتگرال‌گیری معرفی کرده‌ایم. اگر اکنون این را در معادله حرکت (۹.۶) جایگزین کنیم، به معادله‌ای شلوغ اما قابل‌مدیریت می‌رسیم. با این حال، بیایید کار خود را آسان‌تر کنیم و به یاد بیاوریم که توافق کردیم جملات مرتبه $O(\omega^2)$ را کنار بگذاریم. سپس، با جایگزینی، چیزی که باقی می‌ماند عبارت است از:

$$\ddot{\mathbf{r}} \approx \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}t$$

که می‌توانیم به راحتی یک‌بار دیگر انتگرال بگیریم تا بیابیم:

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 - \frac{1}{3}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}t^3$$

ما یک پایه برداری راست‌گرد انتخاب می‌کنیم به طوری که $\mathbf{e}_1$ به سمت شمال، $\mathbf{e}_2$ به سمت غرب و $\mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{r}}$ به صورت شعاعی رو به بیرون اشاره کند (طبق شکل). با این حال، ما باز هم کار را برای خود آسان‌تر می‌کنیم و فرض می‌کنیم برج در استوا قرار دارد. (این یعنی نیازی نیست نگران ضریب آزاردهنده $\sin \theta$ باشیم که در (۸.۶) دیدیم و در بخش بعدی دوباره خواهیم دید). در این صورت:

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_0 = (R+h)\mathbf{e}_3$$

که R شعاع زمین و h ارتفاع برج است. جواب ما به صورت زیر در می‌آید:

$$\mathbf{r} \approx \left(R+h - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{e}_3 - \frac{1}{3}\omega gt^3\mathbf{e}_2$$

جمله اول نتیجه آشنایی را به ما می‌گوید که ذره در زمان $t^2 = 2h/g$ به زمین برخورد می‌کند. جمله آخر جابجایی d را می‌دهد:

$$d = -\frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = -\frac{2\omega}{3} \sqrt{\frac{2h^3}{g}}$$

به یاد داشته باشید که e_2 به سمت غرب اشاره می‌کند، بنابراین منفی بودن d به این معناست که جابجایی در جهت شرقی است. اما زمین از غرب به شرق می‌چرخد. این بدان معناست که توپ همان‌طور که وعده داده شد در جلوی برج سقوط می‌کند.

در واقع، یک راه شهودی ساده برای درک این نتیجه وجود دارد. اگرچه ما آن را به عنوان پیامدی از نیروی کوریولیس ارائه دادیم، اما این نتیجه از پایداری تکانه زاویه‌ای ناشی می‌شود. هنگام رها شدن، تکانه زاویه‌ای (بر واحد جرم) ذره برابر است با:

$$l = \omega(R + h)^2$$

این مقدار هنگام سقوط توپ نمی‌تواند تغییر کند. این بدان معناست که سرعت نهایی توپ در جهت شرقی برابر است با:

$$Rv = (R + h)^2\omega \Rightarrow v = \frac{(R + h)^2\omega}{R} > v_{\text{Earth}} = R\omega$$

بنابراین سرعت مماسی آن بیشتر از سرعت سطح زمین است. این دلیل آن است که توپ در جلوی برج فرود می‌آید.

۳.۴.۶ آونگ فوکو

آونگی که در قطب شمال قرار داده شده است، در حالی که زمین در زیر آن می‌چرخد، هم‌راستا با صفحه لخت خود باقی می‌ماند. ناظری روی زمین این چرخش محور آونگ را به نیروی کوریولیس نسبت می‌دهد. اگر آونگ را در عرض جغرافیایی θ قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟

بیا باید طول آونگ را l بنامیم. همانند مثال قبل، ما با یک پایه یکان‌هنگار (orthonormal) راست‌گرد کار می‌کنیم به طوری که e_1 به سمت شمال، e_2 به سمت غرب و $\hat{r} = e_3$ به صورت شعاعی رو به بیرون از زمین اشاره کنند. ما مبدأ را به فاصله l در زیر نقطه اتکا قرار می‌دهیم، به طوری که وقتی آونگ مستقیماً رو به پایین آویزان است، وزنه (bob) در انتهای آن روی مبدأ قرار گیرد. در نهایت، از نیروی گریز از مرکز چشم‌پوشی می‌کنیم.

معادله حرکت برای آونگ، با لحاظ کردن نیروی کوریولیس، برابر است با:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}$$

توجه کنید که ما دوباره مکان ذره را به جای $\mathbf{r}$ ، با $\mathbf{x}$ نشان دادیم. این کار برای (امیدوارانه) جلوگیری از سردرگمی است: بردار پایه ما $\hat{r}$ به سمت ذره اشاره نمی‌کند؛ بلکه به صورت شعاعی از زمین به بیرون اشاره دارد. این جهتی متفاوت با $\mathbf{x} = xe_1 + ye_2 + ze_3$ است که مکان وزنه نشان داده شده در شکل می‌باشد. چون وزنه در انتهای آونگ قرار دارد، مختصات مشمول قید زیر هستند:

$$x^2 + y^2 + (l - z)^2 = l^2 \quad (۱۰.۶)$$

در عرض جغرافیایی θ ، بردار چرخش برابر است با:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \cos \theta \mathbf{e}_1 + \omega \sin \theta \hat{r}$$

در حالی که شتاب ناشی از گرانش $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{r}}$ است. ما همچنین به عبارتی برای کشش T نیاز داریم که در امتداد جهت آونگ اشاره می‌کند. با نگاه مجدد به شکل، می‌توانیم ببینیم که کشش با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{T} = -\frac{Tx}{l}\mathbf{e}_1 - \frac{T y}{l}\mathbf{e}_2 + \frac{T(l-z)}{l}\hat{\mathbf{r}}$$

تجزیه معادله حرکت در راستای محورها سه معادله به ما می‌دهد:

$$m\ddot{x} = -\frac{xT}{l} + 2m\omega\dot{y}\sin\theta \quad (11.6)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{yT}{l} + 2m\omega(\dot{z}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta) \quad (12.6)$$

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{T(l-z)}{l} - 2m\omega\dot{y}\cos\theta \quad (13.6)$$

این معادلات، همراه با قید (۱۰.۶)، نسبتاً ترسناک به نظر می‌رسند. برای پیشرفت، فرض می‌کنیم که $x/l \ll 1$ و $y/l \ll 1$ و تا مرتبه اول (leading order) این عدد کوچک کار می‌کنیم. این فرض آن‌قدرها که به نظر می‌رسد تصادفی نیست: آونگ اصلی فوکو که در پانتئون پاریس آویزان است ۶۷ متر طول دارد، در حالی که دامنه نوسان آن چند متر است. مزیت این تقریب زمانی آشکار می‌شود که دوباره به قید (۱۰.۶) نگاه کنیم که به ما می‌گوید z/l از مرتبه دوم است:

$$l-z = l\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l^2}} \approx l - \frac{x^2}{2l} - \frac{y^2}{2l} + \dots$$

این بدان معناست که تا مرتبه اول، می‌توانیم z و $\dot{z}$ را همگی صفر قرار دهیم. آخرین معادله از معادلات (۱۳.۶) سپس معادله‌ای فراهم می‌کند که به زودی به ما اجازه حذف T را می‌دهد:

$$T \approx mg + 2m\omega\dot{y}\cos\theta \quad (14.6)$$

در همین حال، ما دو معادله اول (۱۱.۶) و (۱۲.۶) را با استفاده از همان ترفندی که در مطالعه دایره‌های لارمور در بخش (۲.۴.۲) دیدیم بازنویسی می‌کنیم: متغیر $\xi = x + iy$ را معرفی می‌کنیم و (۱۱.۶) را با i برابر (۱۲.۶) جمع می‌کنیم تا به دست آوریم:

$$\ddot{\xi} \approx -\frac{g}{l}\xi - 2\omega i\dot{\xi}\sin\theta$$

در اینجا ما $T \approx mg$ را جایگزین کرده‌ایم زیرا جمله دوم در (۱۴.۶) تنها در مرتبه پایین‌تر (sub-leading) سهم دارد. این معادله حرکت برای یک نوسانگر هماهنگ میرا است، البته با یک متغیر مختلط. می‌توانیم آن را به همان روش حل کنیم: حدس $\xi = e^{\beta t}$ منجر به معادله درجه دوم زیر می‌شود:

$$\beta^2 + 2i\omega\beta\sin\theta + \frac{g}{l} = 0$$

که جواب‌های آن عبارت‌اند از:

$$\beta_{\pm} = -i\omega \sin \theta \pm i\sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 \sin^2 \theta + \frac{g}{l}} \approx -i\left(\omega \sin \theta \pm \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

از اینجا می‌توانیم جواب عمومی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\xi = e^{-i\omega t \sin \theta} \left(A \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

بدون در نظر گرفتن ضریب فاز کلی، $e^{-i\omega t \sin \theta}$ ، این معادله یک بیضی را توصیف می‌کند. نقش ضریب فاز این است که جهت‌گیری بیضی را به آرامی در صفحه $x - y$ بچرخاند. اگر از بالا نگاه کنیم، چرخش در نیم‌کره شمالی ساعت‌گرد و در نیم‌کره جنوبی پادساعت‌گرد است. توجه کنید که دوره تناوب چرخش ۲۴ ساعت نیست مگر اینکه آونگ در قطب‌ها آویزان باشد. در عوض دوره تناوب $24/\sin \theta$ ساعت است. در پاریس، این مقدار ۳۲ ساعت است.

۴.۴.۶ حرکت تقدیمی لارمور

تبدیل به چارچوب‌های چرخان همچنین می‌تواند به عنوان یک ترفند جالب برای حل مسائل خاص استفاده شود. برای مثال، یک ذره باردار را در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیروی کولن به دور ذره ثابت دومی می‌چرخد. حال یک میدان مغناطیسی ثابت B را به این اضافه کنید. معادله حرکت حاصل عبارت است از:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

که در آن $k = qQ/4\pi\epsilon_0$. وقتی $B = 0$ ، این همان مسئله نیروی مرکزی است که در بخش ۴ حل کردیم و می‌دانیم مدار ذره یک بیضی است. اما وقتی $B \neq 0$ چگونه؟
بیایید به مسئله در یک چارچوب چرخان نگاه کنیم. با استفاده از (۳.۶) و (۴.۶)، داریم:

$$m(\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + q(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}$$

که اکنون $\mathbf{r}$ مکان مختصات را در چارچوب چرخان توصیف می‌کند. حال کار هوشمندانه‌ای انجام می‌دهیم: سرعت زاویه‌ای چرخش $\boldsymbol{\omega}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که جملات $\dot{\mathbf{r}}$ در بالا حذف شوند. این کار برای مقدار زیر عملی است:

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{q\mathbf{B}}{2m}$$

آنگاه معادله حرکت به صورت زیر در می‌آید:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{q^2}{4m}\mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r})$$

این تقریباً به همان فرمی است که در بخش ۴ مطالعه کردیم. در واقع، برای میدان‌های مغناطیسی به اندازه کافی کوچک، می‌توانیم از جمله آخر چشم‌پوشی کنیم. این تا زمانی برقرار است که $B^2 \ll 4mk/q^2r^3$.

در این حد، می‌توانیم همان راه حل قدیمی حرکت بیضی‌وار خود را اتخاذ کنیم. با این حال، با تبدیل دوباره به چارچوب اصلی، به نظر می‌رسد که بیضی با تندی زاویه‌ای زیر می‌چرخد — یا حرکت تقدیمی انجام می‌دهد:

$$\omega = \frac{qB}{2m}$$

این به عنوان بسامد لارمور (Larmor frequency) شناخته می‌شود. این مقدار نصف بسامد سیکلوترون است که در ۲.۴.۲ با آن برخورد کردیم.