



دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس یار: امیرعلی عابدینی
جلسه سیزدهم: قوانین کپلر
نیم سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

۱ مقدمه

در چارچوب مکانیک تحلیلی، قوانین کپلر در مورد حرکت سیارات فراتر از پایه تجربی اولیه خود، به عنوان نتایج ظریف اصول دینامیکی بنیادی ظهور می کنند. این سه قانون که مدارهای بیضی شکل با جرم مرکزی در یک کانون، جاروب کردن مساحت های برابر در زمان های برابر، و رابطه هارمونیکی بین دوره های مداری و نیم محورهای بزرگ را توصیف می کنند، قوانین کپلر را تشکیل می دهند. استنتاج این قوانین از گرانش نیوتنی، که از طریق روش های مکانیک لاگرانژی و تقلیل مسئله دو جسمی به دست می آید، وحدت بین هندسه و دینامیک را نشان می دهد.

۲ استخراج قوانین کپلر

دو جرم m_1 و m_2 از طریق یک نیروی مرکزی پایستار که از پتانسیل گرانشی زیر مشتق می شود با هم برهم کنش دارند:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

در این بخش از اصول اولیه، کاهش مسئله به یک مسئله تک جرمی را استخراج کرده و سپس معادله مدار را حل می کنیم و در مورد انتگرال های حرکت و هندسه مقاطع مخروطی بحث خواهیم کرد.

۱.۲ لاگرانژین در مختصات لخت

فرض کنید $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ به ترتیب موقعیت های جرم های m_1 و m_2 در یک چارچوب لخت باشند. نیروی گرانش در امتداد خط واصل بین آنها عمل می کند. لاگرانژین در چارچوب لخت به صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

تعریف می کنیم:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

۲.۲ مختصات مرکز جرم و مختصات نسبی

مختصات مرکز جرم را معرفی می کنیم:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2.$$

داریم:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}.$$

انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2}m_1 \left| \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}} \right|^2 + \frac{1}{2}m_2 \left| \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}} \right|^2.$$

با بسط دادن:

جمله اول:

$$\frac{1}{2}m_1 \left[\dot{\mathbf{R}}^2 + 2\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_2^2}{M^2}\dot{\mathbf{r}}^2 \right].$$

جمله دوم:

$$\frac{1}{2}m_2 \left[\dot{\mathbf{R}}^2 - 2\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_1^2}{M^2}\dot{\mathbf{r}}^2 \right].$$

با جمع کردن این دو: جمله های $\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ حذف می شوند زیرا:

$$m_1 \cdot \frac{m_2}{M} - m_2 \cdot \frac{m_1}{M} = 0.$$

جمله های $\dot{\mathbf{R}}^2$ جمع می شوند به $\frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2$ جمله های $\dot{\mathbf{r}}^2$

$$\frac{1}{2} \left[m_1 \frac{m_2^2}{M^2} + m_2 \frac{m_1^2}{M^2} \right] \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{M^2} \dot{\mathbf{r}}^2.$$

با توجه به $M = m_1 + m_2$ ، عبارت $\frac{m_1 m_2}{M}$ ظاهر می شود:

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\mathbf{r}}^2.$$

جرم کاهش یافته را تعریف می کنیم:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}.$$

بنابراین:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2.$$

پتانسیل فقط به r بستگی دارد:

$$U(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} = -\frac{GM\mu}{r}.$$

پس لاگرانژین در مختصات $(\mathbf{R}, \mathbf{r})$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{GM\mu}{r}.$$

۳.۲ جداسازی حرکت مرکز جرم

از آنجا که U به $\mathbf{R}$ وابسته نیست، مرکز جرم با سرعت یکنواخت حرکت می کند:

$$\frac{d}{dt}(M\dot{\mathbf{R}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{R}} = \text{const}.$$

می توانیم یک چارچوب لخت انتخاب کنیم که در آن $\dot{\mathbf{R}} = 0$ (چارچوب مرکز جرم). سپس $\mathbf{R} = \text{const}$ و دینامیک به طور کامل در مختصات نسبی $\mathbf{r}$ است. در چارچوب مرکز جرم:

$$\mathcal{L}_{rel} = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{GM\mu}{r}.$$

مسئله نیروی مرکزی تک جرمی برای یک "ذره" با جرم μ در پتانسیل:

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \quad k = GM\mu.$$

اما دقت کنید: معمولاً k برای قانون نیروی $F = -k/r^2$ بین دو جسم به شکل نیوتنی تعریف می شود. بررسی می کنیم:

قانون دوم نیوتن برای m_1 در چارچوب مرکز جرم: نیروی گرانش $F = -Gm_1 m_2 / r^2$ در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ (به سمت m_2). اما در کاهش تک جرمی: معادله برای $\mathbf{r}$:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

از آنجا که $Gm_1m_2 = GM\mu$ داریم:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

پس جرم کاهش یافته μ در معادله شتاب حذف می شود، اما در فرمول های تکانه زاویه ای و انرژی نسبت به لاگرانژین تک جسمی ظاهر می شود.

گاهی μ را در k جذب می کنند، اما در اینجا $k = Gm_1m_2$ (ثابت گرانشی فیزیکی بین جرم ها) یا $k' = GM$ برای شتاب را حفظ می کنیم. استاندارد سازی می کنیم:
فرض کنید:

$$\alpha = Gm_1m_2$$

تا داشته باشیم:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

سپس نیروی وارد بر $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

معادله حرکت:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

۴.۲ انتگرال های حرکت

از آنجا که $\mathbf{F}$ مرکزی است $(\propto \hat{\mathbf{r}})$ ، گشتاور نسبت به مبدأ $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ است، بنابراین تکانه زاویه ای بر واحد جرم کاهش یافته پایسته می ماند.
تعریف می کنیم:

$$\mathbf{L} = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$$

یا $\ell = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ (تکانه زاویه ای بر واحد جرم کاهش یافته)، پس $\mathbf{L} = \mu \ell$.
از معادله $\mu \ddot{\mathbf{r}} = -(\alpha/r^2) \hat{\mathbf{r}}$ ، اگر برای ℓ بنویسیم μ حذف می شود:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \left(-\frac{\alpha}{\mu r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) = \mathbf{0}.$$

پس $\ell = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ در زمان ثابت است.

بنابراین حرکت در صفحه‌ای عمود بر ℓ صورت می‌گیرد.
برای پایداری انرژی نیز داریم:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\alpha}{r} = \text{const.}$$

۵.۲ مختصات قطبی در صفحه مداری

مختصات (r, ϕ) را در صفحه حرکت در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\phi}\hat{\phi}.$$

مربع سرعت:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2.$$

بزرگی تکانه زاویه‌ای:

$$\ell = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = r^2\dot{\phi}.$$

انرژی:

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{\alpha}{r}.$$

با جایگذاری $\dot{\phi} = \ell/r^2$:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{\ell^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

۶.۲ پتانسیل مؤثر

تعریف می‌کنیم:

$$U_{eff}(r) = \frac{\mu\ell^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

سپس داریم:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff}(r).$$

این یک مسئله یک‌بعدی در r با انرژی E است.

ما می‌خواهیم $r(\phi)$ را پیدا کنیم. قرار می‌دهیم $u = 1/r$.
آنگاه:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi} \frac{\ell}{r^2} = -\ell \frac{du}{d\phi}.$$

همچنین $r^2 \dot{\phi} = \ell \Rightarrow \dot{\phi} = \ell u^2$
حال انرژی جنبشی:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = \ell^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{\ell^2}{r^2} = \ell^2 \left[\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 \right].$$

پس انرژی کل:

$$E = \frac{1}{2} \mu \ell^2 \left[\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 \right] - \alpha u.$$

ضرب در $(\mu \ell^2)^{-1}$:

$$\frac{2E}{\mu \ell^2} = \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 - \frac{2\alpha}{\mu \ell^2} u.$$

فرض کنید $\frac{\alpha}{\mu \ell^2} = \frac{1}{p}$ ، که معمولاً $p = \frac{\ell^2}{(\alpha/\mu)} = \frac{\mu \ell^2}{\alpha}$ تعریف می‌شود.
همچنین $\frac{2\alpha}{\mu \ell^2} = \frac{2}{p}$ ، بنابراین $p = \frac{\mu \ell^2}{\alpha}$.
تعریف می‌کنیم $B = \frac{2\alpha}{\mu \ell^2} = \frac{2}{p}$.
معادله ما:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 - Bu = \frac{2E}{\mu \ell^2}.$$

مشتق نسبت به ϕ بگیریم (تا یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به دست آید):

$$2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2 u}{d\phi^2} + 2u \frac{du}{d\phi} - B \frac{du}{d\phi} = 0.$$

تقسیم بر $2 \frac{du}{d\phi}$ (با فرض حرکت غیر شعاعی):

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{B}{2} = \frac{\alpha}{\mu \ell^2}.$$

پس:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p},$$

که در آن $p = \frac{\mu \ell^2}{\alpha}$

۸.۲ حل معادله

حل عمومی معادله:

$$u(\phi) = \frac{1}{p} + A \cos(\phi - \phi_0).$$

با انتخاب مناسب محورها، می توان $\phi_0 = 0$ قرار داد. آنگاه:

$$u(\phi) = \frac{1}{p} [1 + e \cos \phi],$$

اگر $Ap = e$ قرار دهیم.

بنابراین:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e \cos \phi},$$

که در آن $p = \frac{\mu \ell^2}{\alpha}$ و e خروج از مرکز است.

۹.۲ رابطه e با انرژی E

از معادله مرتبه اول قبلی:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \frac{2}{p}u = \frac{2E}{\mu \ell^2}.$$

مقادیر $u(\phi) = \frac{1+e \cos \phi}{p}$ و $\frac{du}{d\phi} = -\frac{e \sin \phi}{p}$ را جایگذاری می کنیم:
سمت چپ معادله:

$$\frac{e^2 \sin^2 \phi}{p^2} + \frac{1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi}{p^2} - \frac{2}{p} \cdot \frac{1 + e \cos \phi}{p}.$$

با ساده سازی: $e^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = e^2$

پس سمت چپ برابر است با:

$$\frac{e^2 + 1 + 2e \cos \phi}{p^2} - \frac{2 + 2e \cos \phi}{p^2} = \frac{e^2 - 1}{p^2}.$$

بنابراین:

$$\frac{e^2 - 1}{p^2} = \frac{2E}{\mu\ell^2}.$$

از آنجا که $p = \mu\ell^2/\alpha$ داریم $1/p^2 = \alpha^2/(\mu^2\ell^4)$ از رابطه $\frac{e^2-1}{p^2} = \frac{2E}{\mu\ell^2}$ در p^2 ضرب می کنیم:

$$e^2 - 1 = \frac{2E}{\mu\ell^2} \cdot p^2 = \frac{2E}{\mu\ell^2} \cdot \left(\frac{\mu\ell^2}{\alpha}\right)^2 = \frac{2E\mu\ell^2}{\alpha^2}.$$

پس:

$$E = \frac{\alpha^2(e^2 - 1)}{2\mu\ell^2}.$$

به طور معادل، با توجه به $\ell^2 = \alpha p/\mu$ می توان E را بر حسب e و p بیان کرد.
مدار $r = \frac{p}{1+e \cos \phi}$ یک مقطع مخروطی است:

□ $e = 0$ در نتیجه دایره.

□ $0 < e < 1$ در نتیجه بیضی.

□ $e = 1$ در نتیجه سهمی، $E = 0$.

□ $e > 1$ در نتیجه هذلولی، $E > 0$.