



دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس یار: امیرعلی عابدینی
جلسه دوازدهم: مسئله تعمیم یافته نیروی مرکزی
نیم سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

۱ مقدمه

مکانیک تحلیلی سیستم‌های دو-جرمی، یکی از عمیق‌ترین کاربردهای خود را در مسئله تعمیم یافته نیروی مرکزی می‌یابد که تحلیل گرانشی کلاسیک را به سطح وسیع‌تری از پتانسیل‌ها گسترش می‌دهد. مطالعه مسئله تعمیم یافته نیروی مرکزی چارچوب نظری ضروری را فراهم می‌کند و پتانسیل *Binet* را معرفی می‌کند که معادلات حرکت را به شکلی تبدیل می‌کند که به طور مستقیم هندسه مدار را آشکار می‌سازد. این بنیان زمانی حیاتی می‌شود که پتانسیل‌های خاص غیر نیوتونی، مانند آنچه در پایداری و تقدیم در یک پتانسیل نوع یوکاوا بررسی می‌شود، مورد تحلیل قرار می‌گیرند. در اینجا، پتانسیل یوکاوا که یک تغییر نمایی پوشیده از فرم کلاسیک $1/r$ است، به عنوان مدلی برای پدیده‌هایی از اخترفیزیک تا فیزیک هسته‌ای عمل می‌کند.

۲ معادله *Binet*

حرکت تحت یک نیروی مرکزی $F(r)$ را در نظر می‌گیریم که به سمت (یا از سمت) مبدأ ثابت O هدایت می‌شود. از مختصات قطبی (r, θ) استفاده می‌کنیم که:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

معادلات حرکت از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$m\mathbf{a} = F(r)\hat{\mathbf{r}}.$$

۱.۲ تکانه زاویه‌ای

گشتاور $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ (چون نیرو مرکزی است، بنابراین تکانه زاویه‌ای پایسته می‌ماند).

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}.$$

تعریف می کنیم:

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$$

پس:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}.$$

۲.۲ پایستگی انرژی

نیروی مرکزی پایستار را در نظر می گیریم که $F(r) = -\frac{dU}{dr}$ انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

انرژی کل:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r).$$

۳.۲ تغییر متغیر به $u(\theta)$ (روش Binet)

فرض می کنیم:

$$u = \frac{1}{r}.$$

پس $r = 1/u$

همچنین داریم:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m}u^2.$$

حال $\dot{r}$ را محاسبه می کنیم:

$$r = \frac{1}{u}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}.$$

مشتق:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = -r^2\frac{du}{d\theta}.$$

پس:

$$\dot{r} = \left(-r^2\frac{du}{d\theta}\right)\dot{\theta} = \left(-r^2\frac{du}{d\theta}\right)\left(\frac{L}{m}u^2\right).$$

از آنجا که $r^2u^2 = 1$ ، نتیجه می شود:

$$\dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}.$$

۴.۲ تبدیل شتاب شعاعی

برای استفاده از معادله $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$ نیاز به $\ddot{r}$ داریم، اما بهتر است مستقیماً معادله *Binet* را از معادله شعاعی استخراج کنیم:
معادله حرکت شعاعی:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r).$$

می‌توانیم $\ddot{r}$ را از رابطه $\dot{r} = -\frac{L}{m}u'$ محاسبه کنیم (که در آن $u' = \frac{du}{d\theta}$):

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = \frac{d}{d\theta}\dot{r} \cdot \dot{\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{L}{m}u' \right) \cdot \dot{\theta}.$$

پس:

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}u''\dot{\theta} = -\frac{L}{m}u'' \left(\frac{L}{m}u^2 \right).$$

بنابراین:

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{m^2}u^2u''.$$

همچنین:

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{u} \left(\frac{L}{m}u^2 \right)^2 = \frac{L^2}{m^2}u^3.$$

۵.۲ جایگذاری در معادله شعاعی

با جایگذاری مقادیر $\ddot{r}$ و $r\dot{\theta}^2$ در معادله شعاعی داریم:

$$m \left[-\frac{L^2}{m^2}u^2u'' - \frac{L^2}{m^2}u^3 \right] = F(r).$$

ضرب طرفین در m :

$$-\frac{L^2}{m} (u^2u'' + u^3) = F(r).$$

یا به شکل:

$$u'' + u = -\frac{m}{L^2u^2}F \left(\frac{1}{u} \right).$$

این همان معادله *Binet* است:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F \left(\frac{1}{u} \right).$$

۶.۲ فرم جایگزین بر حسب $F(r)$

از آنجا که $f(r) = F(r)/m$:

$$u'' + u = -\frac{1}{h^2 u^2} \cdot \frac{F(1/u)}{m}.$$

با استفاده از $L = mh$ و $h^2 = L^2/m^2$ می‌توانیم به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$u'' + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right).$$

این دو شکل معادل هستند، اما شکل تمیزتر بر حسب نیروی ویژه به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{h^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right).$$

۷.۲ حل برای مدارها

حل عمومی معادله:

$$u(\theta) = \frac{\mu}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_0).$$

با قرار دادن $e = Ah^2/\mu$ و $p = h^2/\mu$:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}.$$

این یک مقطع مخروطی با خروج از مرکز e و نیم‌رأس‌المستقیم p است.

۸.۲ انرژی بر واحد جرم

انرژی بر واحد جرم:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \Phi(r), \quad \Phi(r) = -\frac{\mu}{r} \quad (\text{gravity}).$$

با استفاده از $\dot{r} = -hu'$ و $\dot{\theta} = hu^2$:

$$E = \frac{1}{2}h^2(u'^2 + u^2) - \mu u.$$

از معادله $Binet$ برای گرانش داریم: $u'' + u = \mu/h^2$. این معادله را در u' ضرب کرده و انتگرال می‌گیریم:

$$u'u'' + uu' = \frac{\mu}{h^2}u'.$$

با انتگرال‌گیری:

$$\frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}u^2 = \frac{\mu}{h^2}u + \text{const.}$$

ضرب در h^2 :

$$\frac{1}{2}h^2(u'^2 + u^2) = \mu u + \frac{1}{2}h^2C.$$

با مقایسه با معادله انرژی $E + \mu u = \frac{1}{2}h^2(u'^2 + u^2)$ ، به دست می آوریم:

$$E = \frac{1}{2}h^2(u'^2 + u^2) - \mu u.$$

از انتگرال معادله *Binet*:

$$\frac{1}{2}h^2(u'^2 + u^2) - \mu u = \text{const} = E$$

پس:

$$E = \frac{h^2}{2}(u'^2 + u^2) - \mu u.$$

با جایگذاری $u = \mu/h^2 + A \cos \theta$ در این رابطه داریم:

$$E = \frac{\mu^2}{2h^2}(e^2 - 1),$$

که نشان می دهد $e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}$.

۳ پتانسیل یوکاوا

حرکت ذره‌ای با جرم m در یک پتانسیل مرکزی به فرم یوکاوا را در نظر می گیریم:

$$V(r) = -\frac{k}{r}e^{-\alpha r}, \quad k > 0, \quad \alpha > 0.$$

۱.۳ پتانسیل مؤثر و شعاع تعادل

برای یک پتانسیل مرکزی، لاگرانژین در مختصات قطبی (r, ϕ) به صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r)$$

تکانه زاویه‌ای $\ell = mr^2\dot{\phi}$ پایسته است. با استفاده از ℓ ، حرکت شعاعی را به یک بعد با پتانسیل مؤثر زیر کاهش

می دهیم:

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

در اینجا:

$$V_{eff}(r) = -\frac{k}{r}e^{-\alpha r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

۲.۳ شرط مدار دایره‌ای

یک مدار دایره‌ای در شعاع $r = r_0$ باید شرط $V'_{eff}(r_0) = 0$ را ارضا کند:

$$\frac{d}{dr} \left[-\frac{k}{r}e^{-\alpha r} \right] = -\frac{d}{dr} \left[\frac{k}{r}e^{-\alpha r} \right]$$

ابتدا مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(-\frac{k}{r}e^{-\alpha r} \right) &= -k \frac{d}{dr} (r^{-1}e^{-\alpha r}) \\ &= -k [-r^{-2}e^{-\alpha r} - \alpha r^{-1}e^{-\alpha r}] \\ &= ke^{-\alpha r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \right) \end{aligned}$$

مشتق جمله $\frac{\ell^2}{2mr^2}$ برابر است با $-\frac{\ell^2}{mr^3}$. بنابراین شرط $V'_{eff}(r_0) = 0$ به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} ke^{-\alpha r_0} \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{\alpha}{r_0} \right) - \frac{\ell^2}{mr_0^3} &= 0 \\ \frac{ke^{-\alpha r_0}(1 + \alpha r_0)}{r_0^2} &= \frac{\ell^2}{mr_0^3} \end{aligned}$$

ضرب در r_0^3 :

$$ke^{-\alpha r_0}(1 + \alpha r_0)r_0 = \frac{\ell^2}{m}$$

پس:

$$\ell^2 = mk r_0 e^{-\alpha r_0} (1 + \alpha r_0)$$

۳.۳ لاگرانژین در مختصات قطبی

برای حرکت در یک صفحه با پتانسیل مرکزی $V(r)$:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r)$$

برای مختصه ϕ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

پس:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0$$

این معادله می‌دهد:

$$mr^2\dot{\phi} = \text{const.} = \ell$$

که در آن ℓ تکانه زاویه‌ای پایسته (بزرگی) است.
از معادله اوایلر ۱- لاگرانژ برای r :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - V'(r)$$

پس:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = mr\dot{\phi}^2 - V'(r)$$

با جایگذاری $\dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2}$ ، معادله شعاعی می‌شود:

$$m\ddot{r} = mr \left(\frac{\ell}{mr^2} \right)^2 - V'(r)$$

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} - V'(r)$$

با بازآرایی:

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left[V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} \right]$$

زیرا:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\ell^2}{2mr^2} \right) = -\frac{\ell^2}{mr^3}$$

بنابراین:

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}V_{eff}(r)$$

که در آن:

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

۴.۳ تغییر متغیر $u(\phi) = 1/r$

می‌دانیم:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi} \frac{\ell}{mr^2}.$$

با $r = 1/u$:

$$\frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}.$$

پس:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \cdot \dot{\phi} = \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \right) \cdot \left(\frac{\ell u^2}{m} \right) = -\frac{\ell}{m} \frac{du}{d\phi}.$$

۵.۳ جایگذاری در انرژی E

$$\dot{r}^2 = \frac{\ell^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2, \quad \frac{\ell^2}{2mr^2} = \frac{\ell^2}{2m} u^2, \quad -\frac{k}{r} e^{-\alpha r} = -ku e^{-\alpha/u}.$$

پس:

$$E = \frac{1}{2}m \cdot \frac{\ell^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + \frac{\ell^2}{2m} u^2 - ku e^{-\alpha/u}.$$

با ضرب دو طرف در $\frac{2m}{\ell^2}$:

$$\frac{2mE}{\ell^2} = \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 - \frac{2mk}{\ell^2} u e^{-\alpha/u}.$$

۶.۳ معادله دیفرانسیل مدار

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \frac{2mk}{\ell^2} u e^{-\alpha/u} = \frac{2mE}{\ell^2}.$$

مشتق نسبت به ϕ بگیریم تا معادله دیفرانسیل درجه دو به دست آید:

$$2\frac{du}{d\phi}\frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u\frac{du}{d\phi} - \frac{2mk}{\ell^2} \left[e^{-\alpha/u} + u \cdot e^{-\alpha/u} \cdot \frac{\alpha}{u^2} \right] \frac{du}{d\phi} = 0.$$

از $\frac{du}{d\phi} \neq 0$ فاکتور بگیریم (غیر از مدار دایره‌ای $\frac{du}{d\phi} = 0$):

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{mk}{\ell^2} e^{-\alpha/u} \left[1 + \frac{\alpha}{u} \right] = 0.$$

۷.۳ معادله مدار (فرم دقیق)

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{mk}{\ell^2} e^{-\alpha/u} \left(1 + \frac{\alpha}{u} \right).$$

۸.۳ حالت نیوتنی ($\alpha = 0$)

در حالت نیوتنی $\alpha = 0$:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{mk}{\ell^2},$$

که جوابش $u = \frac{mk}{\ell^2} (1 + e \cos \phi)$ (مدارهای مخروطی) است.