

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس یار: امیرعلی عابدینی
جلسه یازدهم: مقاطع مخروطی
نیم سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

۱ مقدمه

در مطالعه مکانیک تحلیلی، به ویژه در درک حرکت اجرام آسمانی تحت یک نیروی مرکزی، هندسه مقاطع مخروطی به عنوان بنیادی ریاضی عمل می کند. مقاطع مخروطی منحنی هایی هستند که از تقاطع یک صفحه با یک مخروط دوقلو و راست به دست می آیند. بسته به زاویه تقاطع نسبت به زاویه رأس مخروط، چهار نوع منحنی متمایز حاصل می شود: دایره، بیضی، سهمی و هذلولی. هر یک از این منحنی ها دارای ویژگی های هندسی منحصر به فردی هستند، اما همگی در یک چارچوب توصیفی مشترک سهیم اند، به ویژه هنگامی که در مختصات قطبی بیان می شوند. در مختصات دکارتی، این منحنی ها عموماً با معادلات درجه دوم در x و y نمایش داده می شوند. با این حال، در تحلیل مسائل نیروی مرکزی، مانند حرکت سیاره ای تحت گرانش، دستگاه مختصات قطبی (r, θ) طبیعی تر است. در فرم قطبی، همه مقاطع مخروطی را می توان با یک معادله واحد و ظریف توصیف کرد:

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + e \cos \theta}$$

یا معادل آن،

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - e \cos \theta}$$

که بستگی به جهت گیری انتخاب شده برای مستوی مُرشد (*directrix*) دارد.

در اینجا، پارامتر e نمایانگر خروج از مرکز است که نوع مقطع مخروطی را تعیین می کند.

ثابت l نیز نیمرأس المستقیم (*semi-latus rectum*) است، پارامتری مرتبط با اندازه و انرژی مدار.

در مکانیک سماوی، این منحنی ها صرفاً روابط هندسی انتزاعی نیستند؛ آن ها مسیرهای ممکن یک جسم متحرک تحت یک نیروی مرکزی با مربع معکوس، مانند گرانش، هستند. این ارتباط عمیق، که در قوانین کپلر گنجانده شده، آشکار می سازد که سیارات در مدارهای بیضوی حرکت می کنند که خورشید در یکی از کانون های آن قرار دارد،

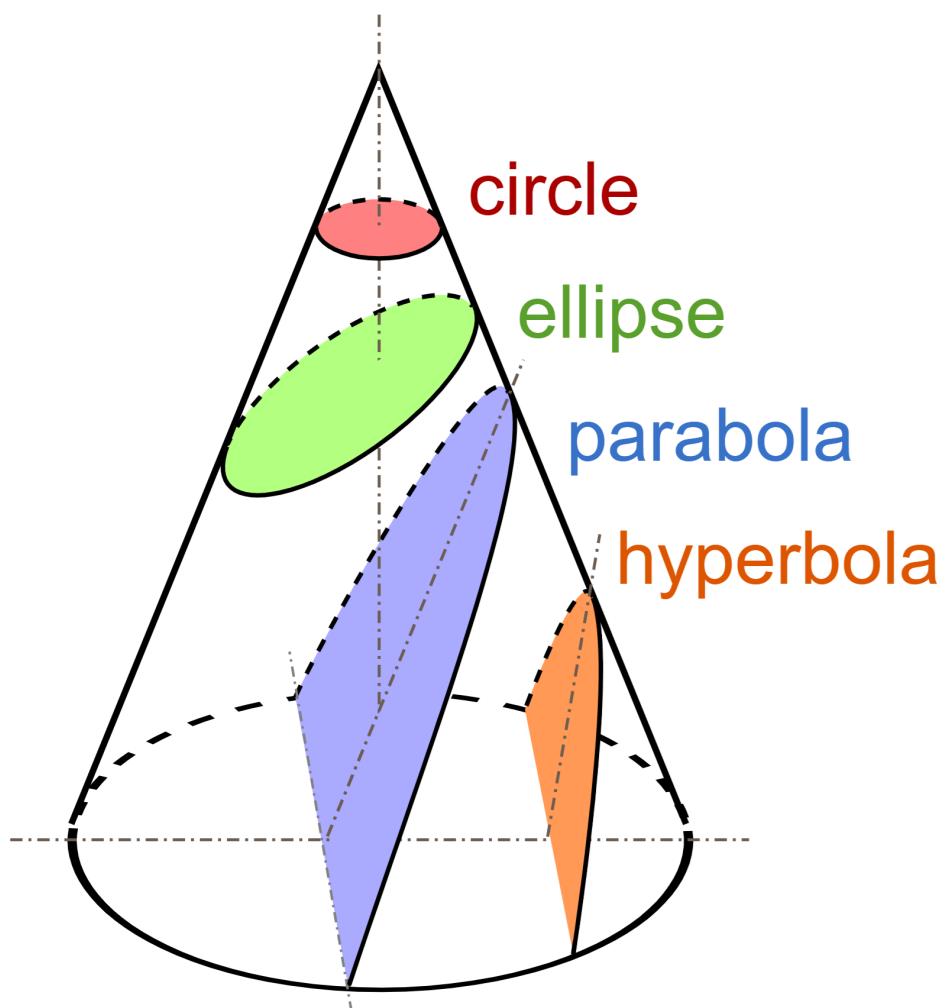
در حالی که دنباله‌دارها ممکن است مسیرهای سهموی یا هذلولی را دنبال کنند و برخی ماهواره‌ها نیز مدارهایی تقریباً دایره‌ای را می‌پیمایند.

بنابراین، تسلط بر نمایش قطبی مقاطع مخروطی ضروری است، چرا که پلی تحلیلی از هندسه به دینامیک می‌زند و صحنه را برای استخراج و درک قوانین کپلر در مورد حرکت سیاره‌ای و قوانین پایستگی حاکم بر آن‌ها آماده می‌سازد.

۲ معادله مقاطع مخروطی

یک مقطع مخروطی مجموعه نقاط $P = (x, y)$ در صفحه است که یک شرط هندسی مشخص را ارضا می‌کنند (فاصله از یک کانون و یک خط راهنما، یا تقاطع یک صفحه با یک مخروط دوطرفه).

اما از دید جبری، ساده‌ترین توصیف یکپارچه در مختصات کارتزین (x, y) یک معادله چندجمله‌ای است که در آن بالاترین توان کل x و y برابر با ۲ باشد.



شکل ۱: مقاطع مخروطی

برای دایره داریم:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

درجه ۲ در x و y .
برای بیضی نیز داریم:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

مجدداً جملاتی مانند x^2 ، y^2 و جمله ثابت؛ بدون جمله xy در صورتی که محورها با محوره‌های بیضی تراز باشند.
برای سهمی به عنوان مثال:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 - y + bx + c = 0$$

درجه دوم در x و خطی در y ، با مجموع درجه ۲.
و به طور مشابه برای هذلولی نیز داریم:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

درجه ۲ است.

۳ خروج از مرکز

یک مقطع مخروطی به عنوان مجموعه تمام نقاط P در صفحه تعریف می‌شود که نسبت فاصله از P تا یک نقطه ثابت F (کانون) و فاصله از P تا یک خط ثابت L (خط راهنما) ثابت باشد. این ثابت را خروج از مرکز می‌نامند و آن را با e نشان می‌دهند.

۱.۳ طبقه‌بندی مقاطع مخروطی توسط e

این پارامتر واحد e همه مقاطع مخروطی را طبقه‌بندی می‌کند:

□ اگر $e = 0$:

نسبت صفر است، یعنی فاصله تا کانون باید صفر باشد. این حالت خاص دایره است (در حد $e \rightarrow 0$ ، دایره‌ای با کانون در مرکز آن به دست می‌آید).

□ اگر $0 < e < 1$:

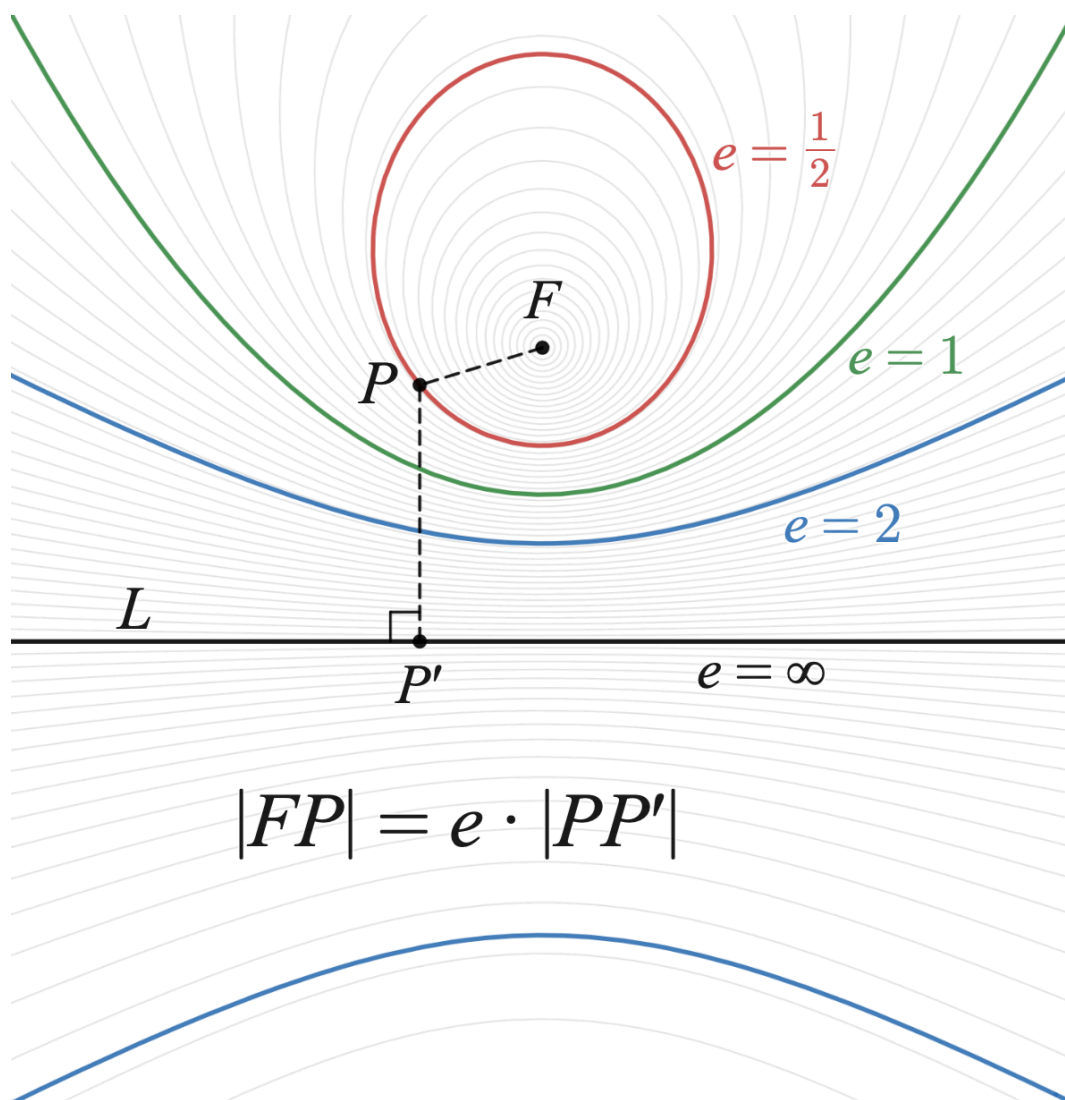
فاصله تا کانون کمتر از فاصله تا خط راهنما است.
در نتیجه این حالت یک بیضی را نتیجه می‌دهد.

□ اگر $e = 1$:

فاصله‌ها برابر هستند.
در نتیجه این حالت یک سهمی را نتیجه می‌دهد.

□ اگر $e > 1$:

فاصله تا کانون بیشتر از فاصله تا خط راهنما است.
در نتیجه این حالت یک هذلولی را نتیجه می‌دهد.



$$|FP| = e \cdot |PP'|$$

شکل ۲: خروج از مرکز

کانون F را در مبدأ $(0, 0)$ و خط راهنما را به صورت خط عمودی $x = d$ (که در آن $d > 0$) در نظر می گیریم. برای یک نقطه $P = (r, \theta)$ در مختصات قطبی:

□ فاصله از P تا F برابر است با r .

□ فاصله از P تا خط راهنما $x = d$ برابر است با $|d - r \cos \theta|$ (فاصله افقی).

از تعریف داریم:

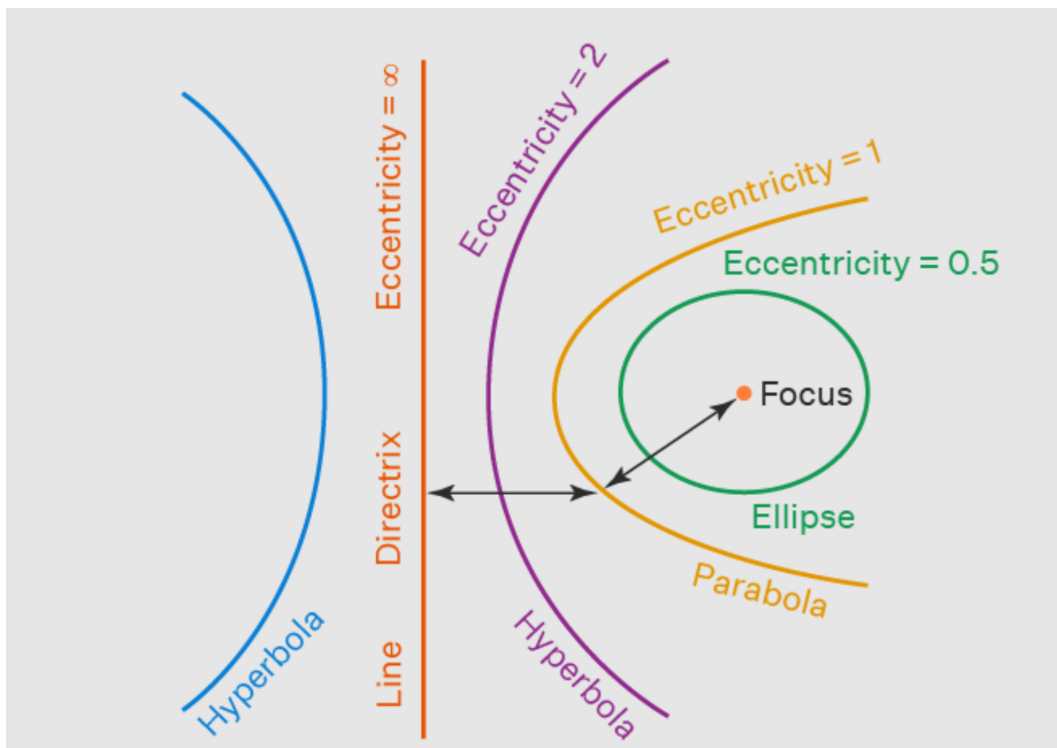
$$\frac{r}{|d - r \cos \theta|} = e$$

اگر $d - r \cos \theta > 0$ را در نظر بگیریم (نقاط سمت چپ خط راهنما برای شاخه اصلی)، خواهیم داشت:

$$r = e(d - r \cos \theta)$$

$$r + er \cos \theta = ed$$

$$r(1 + e \cos \theta) = ed$$



شکل ۳: مقایسه خروج از مرکز

اگر $l = ed$ (که آن را نیم‌رأس المستقیم می‌نامیم) قرار دهیم، آنگاه:

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}$$

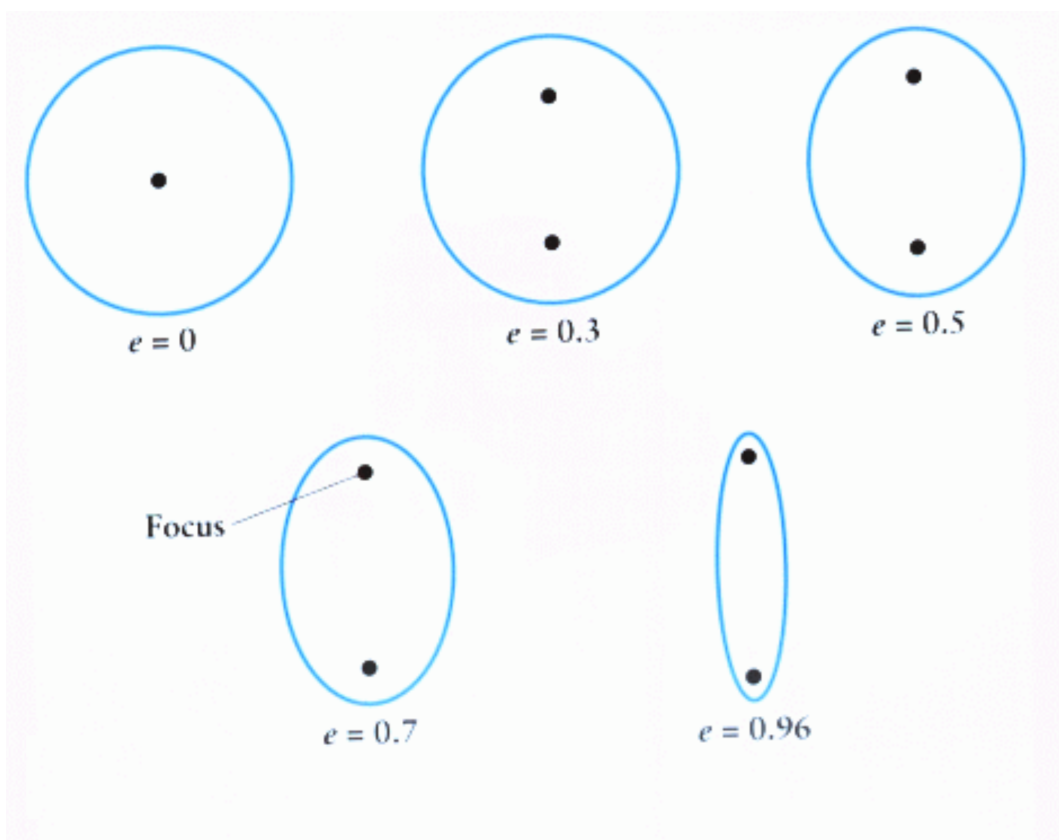
این همان معادله قطبی معروف برای یک مقطع مخروطی با کانون در قطب است.

۴ دایره

برای یک دایره با خروج از مرکز $e = 0$ داریم:

$$r = \frac{l}{1 + 0 \cdot \cos \theta} = l \quad (\text{ثابت})$$

یک دایره با مرکز در قطب و شعاع l .



شکل ۴: رابطه کانون و خروج از مرکز

۵ بیضی

برای بیضی با خروج از مرکز $0 < e < 1$ داریم:

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$$

از $r = \ell - er \cos \theta$ و با توجه به $x = r \cos \theta$

$$r = \ell - ex$$

بنابراین:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \ell - ex$$

با مربع کردن دو طرف:

$$x^2 + y^2 = \ell^2 - 2elx + e^2x^2$$

$$(1 - e^2)x^2 + 2elx + y^2 = \ell^2$$

با کامل کردن مربع برای x :

$$(1 - e^2) \left(x + \frac{el}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{\ell^2}{1 - e^2}$$

با تقسیم بر $\frac{\ell^2}{1-e^2}$:

$$\frac{(x + \frac{e\ell}{1-e^2})^2}{(\frac{\ell}{1-e^2})^2} + \frac{y^2}{\frac{\ell^2}{1-e^2}} = 1$$

این معادله یک بیضی با مرکز در $(-\frac{e\ell}{1-e^2}, 0)$ است که:

$$a = \frac{\ell}{1-e^2} \quad \square \text{ محور نیم قطر بزرگ:}$$

$$b = \frac{\ell}{\sqrt{1-e^2}} \quad \square \text{ محور نیم قطر کوچک:}$$

$$c = ae = \frac{e\ell}{1-e^2} \quad \square \text{ فاصله از مرکز تا کانون:}$$

$$\ell = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} \quad \text{توجه:}$$

۶ سهمی

به طور مشابه برای سهمی با خروج از مرکز $e = 1$ داریم:

$$r = \frac{\ell}{1 + \cos \theta}$$

$$\text{از } r = \ell - r \cos \theta$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \ell - x$$

با مربع کردن دو طرف:

$$y^2 = \ell^2 - 2\ell x = -2\ell \left(x - \frac{\ell}{2}\right)$$

این معادله یک سهمی با رأس در $(\frac{\ell}{2}, 0)$ و کانون در مبدأ است.

۷ هذلولی

همچنین برای هذلولی با $e > 1$ نیز داریم:

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$$

با استدلالی مشابه بیضی به دست می آوریم:

$$\frac{(x - \frac{e\ell}{e^2-1})^2}{(\frac{\ell}{e^2-1})^2} - \frac{y^2}{\frac{\ell^2}{e^2-1}} = 1$$

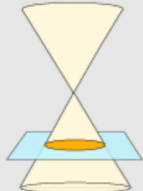
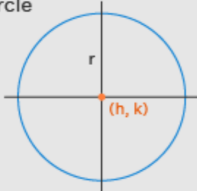
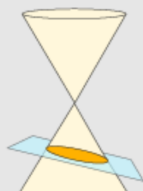
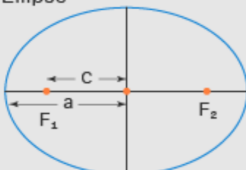
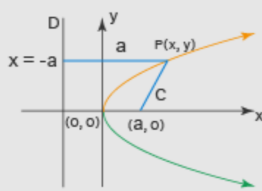
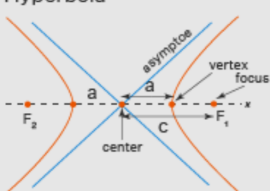
این معادله یک هذلولی با:

$$a = \frac{\ell}{e^2-1} \quad \square \text{ محور نیم قطر حقیقی:}$$

□ محور نیم قطر موهمی: $b = \frac{\ell}{\sqrt{e^2 - 1}}$

□ فاصله از مرکز تا کانون: $c = ae = \frac{e\ell}{e^2 - 1}$

توجه: $\ell = a(e^2 - 1) = \frac{b^2}{a}$

	<p>Circle</p> 	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	$e = 0$
	<p>Ellipse</p> 	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	<p>If $a > b$, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ If $b > a$, $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$</p>
	<p>Parabola</p> 	$y = a(x - h)^2 + k$	$e = 1$
	<p>Hyperbola</p> 	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

شکل ۵: خلاصه مقاطع مخروطی

۸ نسخه چرخیده شده (عمومی ترین فرم قطبی)

اگر مقطع مخروطی نسبت به محور قطبی به اندازه زاویه θ_0 چرخیده باشد، داریم:

$$r(\theta) = \frac{\ell}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

این فرم قطبی استاندارد برای هر مقطع مخروطی با یک کانون در قطب است.