



دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس یار: امیرعلی عابدینی
جلسه دهم: ضرایب لاگرانژ
نیم سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

۱ آونگ ساده

یک جرم نقطه‌ای m به میله‌ای صلب و بدون جرم به طول l متصل شده که حول یک نقطه ثابت لولاست. این آونگ تحت اثر گرانش g در صفحه قائم نوسان می‌کند.

(الف) با استفاده از مختصات کارتزین (x, y) و یک ضریب لاگرانژ، معادلات حرکت را با قید $x^2 + y^2 = l^2$ به دست آورید.

(ب) ضریب را حذف کنید تا نشان دهید متناظر با نیروی کشش (تنش) در میله است.

(پ) به مختصات بدون قید θ تبدیل کنید (به طوری که $x = l \sin \theta$ و $y = -l \cos \theta$) و نشان دهید که همان معادله θ حاصل می‌شود.

یک قید هولونومیک رابطه‌ای بین مختصات (و احتمالاً زمان) به شکل

$$\phi(q_1, q_2, \dots, t) = 0$$

است که باید در تمام لحظات برقرار باشد.

در اینجا، قید به صورت

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

است، یعنی جرم مجبور است روی دایره‌ای به شعاع l و مرکز محور (مبدأ مختصات) بماند.

در روش ضرایب لاگرانژ، به جای جایگزینی مستقیم قید (که درجه‌های آزادی را کاهش می‌دهد)، x و y را به عنوان مختصات مستقل در نظر می‌گیریم اما قید را با استفاده از $\lambda(t)$ به لاگرانژین اضافه می‌کنیم. این ضریب در نهایت به نیروی قید مرتبط خواهد شد.

ایده فیزیکی به صورت زیر است که:

$$S = \int (T - V) dt$$

به صورت

$$S' = \int [L + \lambda(t) \phi(x, y)] dt$$

اصلاح می شود.

با ورودش مستقل x ، y و λ ، معادلاتی به دست می آیند که شامل نیروی قید (حاصل از λ) و خود قید هستند. فرض کنید محور آونگ در مبدأ مختصات $(0, 0)$ باشد، محور y به سمت بالا باشد و گرانش به سمت پایین اثر کند.

انرژی جنبشی و پتانسیل به این صورت است:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = mgy.$$

بنابراین لاگرانژین بدون در نظر گرفتن قید برابر است با:

$$L_0 = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy.$$

و قید به شکل زیر بیان می شود:

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0.$$

به این ترتیب برای لاگرانژین با لحاظ شدن قید داریم:

$$L = L_0 + \lambda(t) \phi(x, y) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(t)(x^2 + y^2 - l^2).$$

در اینجا $\lambda(t)$ ضریب لاگرانژ است (یک تابع مجهول اضافی از زمان).

با اعمال معادلات اوایلر-لاگرانژ به ازای x و y داریم:

برای x :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 + \lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \lambda \cdot (2x).$$

پس:

$$m\ddot{x} - 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = 2\lambda x. \quad (1)$$

برای y :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg + \lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} = -mg + \lambda \cdot (2y).$$

پس:

$$m\ddot{y} + mg - 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} + mg = 2\lambda y. \quad (2)$$

برای λ : با وردش نسبت به λ به سادگی داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(x, y) = 0,$$

یعنی:

$$x^2 + y^2 = l^2. \quad (3)$$

اکنون معادلات حرکت با ضرایب بدست می آیند:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2\lambda x, \\ m\ddot{y} + mg = 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 = l^2. \end{cases}$$

این سه معادله، $x(t)$ ، $y(t)$ و t را تعیین می کنند. از رابطه (3) داریم:

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

اولین مشتق زمانی:

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad x\dot{x} + y\dot{y} = 0. \quad (4)$$

مشتق دوم زمانی:

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0. \quad (5)$$

با جایگزینی $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ از معادلات (1) و (2) در (5):
از (1):

$$\ddot{x} = \frac{2\lambda}{m}x.$$

از (2):

$$\ddot{y} = \frac{2\lambda}{m}y - g.$$

در (5) جایگذاری می کنیم:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x \left(\frac{2\lambda}{m}x \right) + y \left(\frac{2\lambda}{m}y - g \right) = 0.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{2\lambda}{m}(x^2 + y^2) - gy = 0.$$

با استفاده از (۳): $x^2 + y^2 = l^2$ ، پس:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{2\lambda}{m}l^2 - gy = 0.$$

حل برای λ :

$$\frac{2\lambda}{m}l^2 = gy - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

$$\lambda = \frac{m}{2l^2} [gy - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)]. \quad (۴)$$

مفهوم فیزیکی این موضوع بسیار مهم است؛ در فیزیک، مفهوم قید به محدودیتی اطلاق می‌شود که حرکت یک سیستم مکانیکی را به شکل خاصی محدود می‌کند؛ مانند میله‌ای صلب که یک جرم را مجبور می‌کند تنها روی مسیری دایره‌ای با شعاع مشخص حرکت کند.

در مسئله آونگ ساده، اگرچه می‌توان مستقیماً از زاویه (θ) برای توصیف حرکت استفاده کرد، اما در رویکرد کلی‌تر، موقعیت جرم را با دو مختصات کارتزین x و y بیان کرده و سپس قید هندسی $x^2 + y^2 = l^2$ (یعنی ثابت بودن فاصله از مرکز) را با روش ضریب لاگرانژ اعمال می‌کنیم.

در این روش، ضریب لاگرانژ (λ) در واقع نیروی نامعلوم اعمال‌شده از سوی میله را نمایندگی می‌کند، نیرویی که برای حفظ طول ثابت میله لازم است و به صورت کشش (یا در موارد دیگر فشار) در راستای شعاع ظاهر می‌شود. با حل همزمان معادلات حاصل، هم حرکت آونگ $(x(t)$ و $y(t))$ و هم مقدار این نیروی قید به دست می‌آید.

سرانجام، با تبدیل معادلات به مختصات زاویه‌ای (θ) ، مشاهده می‌شود که معادله نهایی دقیقاً به شکل معادله شناخته‌شده آونگ ساده $(\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0)$ درمی‌آید؛ نتیجه‌ای که هم درستی روش ضریب لاگرانژ را تأیید می‌کند و هم نشان می‌دهد چگونه می‌توان نیروهای قید را مستقیماً در فرمول بندی لاگرانژین وارد کرد. نیروی قید در فرمالیسم ضریب لاگرانژ به صورت زیر است:

$$\vec{F}_{constraint} = \lambda \nabla \phi = \lambda(2x, 2y) = (2\lambda x, 2\lambda y).$$

این نیرویی است که میله به جرم وارد می‌کند تا قید اعمال شود. برای یک میله، این نیرو کششی است که به سمت محور (لولا) جهت دارد.

فرض کنید T بزرگی نیروی کشش (مثبت، به سمت داخل در جهت شعاعی) باشد. بردار واحد شعاعی (که از مبدأ به سمت جرم است) برابر است با:

$$\hat{r} = \frac{x}{l}\hat{i} + \frac{y}{l}\hat{j}.$$

نیروی داخلی وارده از میله برابر است با $-T\hat{r}$. بنابراین:

$$\vec{F}_{rod} = -T\hat{r} = -\frac{Tx}{l}\hat{i} - \frac{Ty}{l}\hat{j}.$$

اما $\vec{F}_{rod}$ همان نیروی قید $(2\lambda x, 2\lambda y)$ است. پس:

$$2\lambda x = -\frac{Tx}{l}, \quad 2\lambda y = -\frac{T y}{l}.$$

اگر x و y هر دو صفر نباشند، نتیجه می شود:

$$2\lambda = -\frac{T}{l}.$$

بنابراین:

$$\lambda = -\frac{T}{2l}.$$

پس وقتی کشش مثبت است (نیروی به سمت داخل)، λ منفی خواهد بود. فرمول قبلی (۶) به همراه این رابطه، T را به طور صریح بیان می کند.
از رابطه (۶) و $\lambda = -\frac{T}{2l}$ داریم:

$$-\frac{T}{2l} = \frac{m}{2l^2} [gy - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)].$$

دو طرف را در $2l$ ضرب می کنیم:

$$-T = \frac{m}{l} [gy - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)].$$

پس:

$$T = \frac{m}{l} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - gy].$$

از آنجا که $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 \dot{\theta}^2$ (که در مختصات قطبی نشان داده خواهد شد) و $y = -l \cos \theta$ (اگر θ از راستای قائم به پایین اندازه گیری شود)، این عبارت با فرمول شناخته شده کشش در آونگ مطابقت دارد.
اکنون روابط بدست آمده را بر حسب θ بازنویسی می کنیم تا به نتایج سابق برسیم. فرض کنید θ زاویه نسبت به راستای قائم به پایین باشد، پس:

$$x = l \sin \theta, \quad y = -l \cos \theta.$$

بررسی قید:

$$x^2 + y^2 = l^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = l^2,$$

که برقرار است.

سرعت ها بر حسب θ :

$$\dot{x} = l \cos \theta \dot{\theta}, \quad \dot{y} = l \sin \theta \dot{\theta}.$$

انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m [l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2] = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2.$$

انرژی پتانسیل (محور y رو به بالا، صفر در مبدأ):

$$V = mgy = mg(-l \cos \theta) = -mgl \cos \theta.$$

لاگرانژین:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta.$$

اوایلر-لاگرانژ برای θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta.$$

معادله:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

از معادلات (۱) و (۲) و بیان x و y بر حسب θ :

داریم:

$$x = l \sin \theta, \quad y = -l \cos \theta,$$

$$\dot{x} = l \cos \theta \dot{\theta}, \quad \ddot{x} = l \cos \theta \ddot{\theta} - l \sin \theta \dot{\theta}^2,$$

$$\dot{y} = l \sin \theta \dot{\theta}, \quad \ddot{y} = l \sin \theta \ddot{\theta} + l \cos \theta \dot{\theta}^2.$$

در (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$m \left[l \cos \theta \ddot{\theta} - l \sin \theta \dot{\theta}^2 \right] = 2\lambda(l \sin \theta). \quad (A)$$

در (۲) جایگذاری می‌کنیم:

$$m \left[l \sin \theta \ddot{\theta} + l \cos \theta \dot{\theta}^2 \right] + mg = 2\lambda(-l \cos \theta). \quad (B)$$

(A) را در $\cos \theta$ ضرب می‌کنیم:

$$ml \cos^2 \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 = 2\lambda \sin \theta \cos \theta. \quad (A')$$

(B) را در $\sin \theta$ ضرب می‌کنیم:

$$ml \sin^2 \theta \ddot{\theta} + ml \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + mg \sin \theta = -2\lambda \sin \theta \cos \theta. \quad (B')$$

(A') و (B') را جمع می‌کنیم:

$$ml(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0.$$

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

که دقیقاً با معادله به دست آمده از لاگرانژین مستقیم θ مطابقت دارد.

۲ مهره روی حلقه چرخان

حلقه در یک صفحه قائم قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول یک محور قائم وادار به چرخش شده است. محور قائم را محور z در نظر می‌گیریم. صفحه حلقه در زمان $t = 0$ صفحه xz باشد و مرکز آن در مبدأ مختصات قرار گیرد. در زمان t ، حلقه حول محور z به اندازه زاویه ωt چرخیده است. موقعیت مهره روی حلقه را در نظر بگیرید؛ فرض کنید θ زاویه از راستای قائم رو به پایین نسبت به مرکز حلقه (در صفحه دوار حلقه) باشد.

اما چون می‌خواهیم از ضرایب لاگرانژ استفاده کنیم، کار را با مختصات کارترین سه‌بعدی و قیود آغاز می‌کنیم و سپس ممکن است به مختصات مناسب‌تری تغییر سیستم دهیم. دیدیم که یک قید محدودیتی بر حرکت یک سیستم است. این قید تعداد مختصات مستقل لازم برای توصیف پیکربندی سیستم را کاهش می‌دهد.

قیود هولونومیک روابطی بین مختصات (و احتمالاً زمان) به شکل زیر هستند:

$$f(q_1, q_2, \dots, t) = 0.$$

مثال این قید یک مهره‌ای که مجبور است روی یک سیم بماند است، به طوری که شکل سیم یک قید هولونومیک است.

قیود رئونومیک به طور صریح وابسته به زمان هستند.

مثالی برای این قید، سیمی که با سرعت زاویه‌ای معینی وادار به چرخش شده است. معادله قید شامل زمان می‌شود. قیود غیرهولونومیک شامل سرعت‌ها هستند و نمی‌توان آن‌ها را به یک رابطه صرفاً بین مختصات تبدیل کرد. دو روش اصلی وجود دارد؛ یکی جایگزینی مستقیم است که با حل قید، مختصات اضافی را حذف می‌کنیم و درجه‌های آزادی را کاهش می‌دهیم. روش دیگر ضرایب لاگرانژ است که تمام مختصات را حفظ می‌کنیم و معادلات قید را با ضرایب $\lambda_i(t)$ اضافه می‌کنیم. هر ضریب متناظر با نیروی قید لازم برای اعمال آن محدودیت است. چارچوب لخت را (X, Y, Z) در نظر بگیریم که در آن محور Z به صورت قائم به سمت بالا است. اثر گرانش به صورت $\vec{g} = -g\hat{Z}$ است.

در $t = 0$ ، حلقه در صفحه XZ قرار دارد، مرکز آن در مبدأ و شعاع R است.

معادله نیز به صورت $X^2 + Z^2 = R^2$ و $Y = 0$ است.

حال حلقه را حول محور Z با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخانیم. در زمان t ، صفحه حلقه زاویه $\phi = \omega t$ با صفحه XZ می‌سازد.

در مختصات لخت، موقعیت مهره باید دو قید را ارضا کند:

وضعیت اول این است که مهره در صفحه قائم دوار باقی می‌ماند. در زمان t ، صفحه قائم دوار با رابطه $Y/X = \tan(\omega t)$ (برای $X \neq 0$) یا به طور معادل بیان می‌شود:

$$\phi_1(X, Y, t) = X \sin(\omega t) - Y \cos(\omega t) = 0.$$

این یک قید هولونومیک رئونومیک است (به طور صریح به زمان وابسته است).

وضعیت دوم این است که مهره روی حلقه دایره‌ای به شعاع R باقی می‌ماند. فاصله از مبدأ برابر R است:

$$\phi_2(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0.$$

این یک قید هولونومیک اسکالرونومیک است (مستقل از زمان).
 پس، مهره دارای ۳ مختصه کارترین (X, Y, Z) با ۲ قید است و در نتیجه ۱ درجه آزادی دارد.
 اکنون به تشکیل لاگرانژین پردازیم. انرژی جنبشی در چارچوب لخت:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2).$$

انرژی پتانسیل (با فرض مثبت بودن Z به سمت بالا):

$$V = mgZ.$$

لاگرانژین بدون قید:

$$L_0 = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - mgZ.$$

قیود را با ضرایب $\lambda_1(t)$ و $\lambda_2(t)$ اضافه می‌کنیم:

$$L = L_0 + \lambda_1(t) \phi_1(X, Y, t) + \lambda_2(t) \phi_2(X, Y, Z).$$

یعنی:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - mgZ + \lambda_1[X \sin(\omega t) - Y \cos(\omega t)] + \lambda_2[X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2].$$

با وردش مستقل نسبت به X ، Y و Z داریم:
 برای X :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m\dot{X}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m\ddot{X}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \lambda_1 \sin(\omega t) + \lambda_2 \cdot 2X.$$

معادله اوایلر لاگرانژ به صورت زیر است:

$$m\ddot{X} = \lambda_1 \sin(\omega t) + 2\lambda_2 X. \quad (۱)$$

برای Y :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = m\dot{Y}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = m\ddot{Y}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = \lambda_1[-\cos(\omega t)] + \lambda_2 \cdot 2Y.$$

و معادله اوایلر لاگرانژ:

$$m\ddot{Y} = -\lambda_1 \cos(\omega t) + 2\lambda_2 Y. \quad (۲)$$

برای Z :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}} = m\dot{Z}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}} = m\ddot{Z}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial Z} = -mg + \lambda_2 \cdot 2Z.$$

مجددا معادله اوایلر لاگرانژ:

$$m\ddot{Z} + mg = 2\lambda_2 Z. \quad (۳)$$

برای معادلات قید داریم:

$$\phi_1 = X \sin(\omega t) - Y \cos(\omega t) = 0, \quad (C1)$$

$$\phi_2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0. \quad (C2)$$

حالا در کل ۵ معادله داریم: (۱)، (۲)، (۳)، (C1) و (C2)
برای ۵ مجهول: $X(t)$ ، $Y(t)$ ، $Z(t)$ ، $\lambda_1(t)$ ، $\lambda_2(t)$.

اگر $X = r \cos(\omega t)$ و $Y = r \sin(\omega t)$ باشد، آنگاه:

$$\dot{X} = \dot{r} \cos(\omega t) - r\omega \sin(\omega t),$$

$$\dot{Y} = \dot{r} \sin(\omega t) + r\omega \cos(\omega t).$$

$$\ddot{X} = \ddot{r} \cos(\omega t) - 2\dot{r}\omega \sin(\omega t) - r\omega^2 \cos(\omega t),$$

$$\ddot{Y} = \ddot{r} \sin(\omega t) + 2\dot{r}\omega \cos(\omega t) - r\omega^2 \sin(\omega t).$$

در معادلات (۱) و (۲) جایگذاری می کنیم تا λ_1 و λ_2 را بیابیم:
معادله (۱) را در نظر بگیریم؛ طرف چپ:

$$m\ddot{X} = m[\ddot{r} \cos(\omega t) - 2\dot{r}\omega \sin(\omega t) - r\omega^2 \cos(\omega t)].$$

طرف راست:

$$\lambda_1 \sin(\omega t) + 2\lambda_2 X = \lambda_1 \sin(\omega t) + 2\lambda_2 r \cos(\omega t).$$

با برابر قرار دادن ضرایب $\sin(\omega t)$ و $\cos(\omega t)$:

- ضریب $\cos(\omega t)$:

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 2\lambda_2 r. \quad (1a)$$

- ضرب $\sin(\omega t)$:

$$-2m\dot{r}\omega = \lambda_1. \quad (1b)$$

اکنون معادله (۲) را در نظر بگیریم؛ طرف چپ:

$$m\ddot{Y} = m[\ddot{r}\sin(\omega t) + 2\dot{r}\omega\cos(\omega t) - r\omega^2\sin(\omega t)].$$

طرف راست:

$$-\lambda_1\cos(\omega t) + 2\lambda_2Y = -\lambda_1\cos(\omega t) + 2\lambda_2r\sin(\omega t).$$

با برابر قرار دادن ضرایب:

- ضرب $\cos(\omega t)$:

$$2m\dot{r}\omega = -\lambda_1. \quad (2a)$$

- ضرب $\sin(\omega t)$:

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 2\lambda_2r. \quad (2b)$$

از (1b) و (2a):

$$\lambda_1 = -2m\dot{r}\omega.$$

از (1a) و (2b):

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 2\lambda_2r.$$

بنابراین:

$$\lambda_1 = -2m\dot{r}\omega, \quad (۴)$$

$$2\lambda_2 = \frac{m\ddot{r} - mr\omega^2}{r} \quad (r \neq 0 \text{ برای}). \quad (۵)$$

با استفاده از معادله (۳) برای Z ادامه خواهیم داد. از (C2):

$$Z^2 = R^2 - r^2.$$

یک بار مشتق می گیریم:

$$2Z\dot{Z} = -2r\dot{r} \Rightarrow \dot{Z} = -\frac{r\dot{r}}{Z}.$$

مشتق دوم:

$$\ddot{Z} = -\frac{(\dot{r}^2 + r\ddot{r})Z - r\dot{r}\dot{Z}}{Z^2}.$$

با جایگذاری $\dot{Z} = -\frac{r\dot{r}}{Z}$:

$$\ddot{Z} = -\frac{(\dot{r}^2 + r\ddot{r})Z + r\dot{r} \cdot (r\dot{r}/Z)}{Z^2} = -\frac{(\dot{r}^2 + r\ddot{r})Z^2 + r^2\dot{r}^2}{Z^3}.$$

راه بهتر این است که متغیر را تغییر دهیم؛ اکنون θ زاویه از راستای قائم باشد. در این صورت بسیار ساده سازی خواهیم کرد.

فرض کنید

$$r = R \sin \theta, \quad Z = R \cos \theta.$$

در اینجا $\theta = 0$ مربوط به پایین حلقه ($Z = R, r = 0$) و $\theta = \pi$ مربوط به بالا ($Z = -R, r = 0$) است. آنگاه:

$$\dot{r} = R\dot{\theta} \cos \theta, \quad \ddot{r} = R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta.$$

$$\dot{Z} = -R\dot{\theta} \sin \theta, \quad \ddot{Z} = -R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta.$$

با بازنویسی معادلات بر حسب θ داریم:

از (۵):

$$2\lambda_2 = \frac{m(R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta) - m(R \sin \theta)\omega^2}{R \sin \theta}.$$

ساده سازی:

$$2\lambda_2 = m \left[\frac{\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta - \omega^2 \sin \theta}{\sin \theta} \right]. \quad (5')$$

از (۳):

$$m\ddot{Z} + mg = 2\lambda_2 Z.$$

با جایگذاری $Z = R \cos \theta$ و $\ddot{Z} = -R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta$

$$m(-R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta) + mg = 2\lambda_2(R \cos \theta).$$

تقسیم بر mR :

$$-\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{g}{R} = \frac{2\lambda_2}{m} \cos \theta. \quad (6)$$

با حذف λ_2 خواهیم داشت:

از (۵'):

$$\frac{2\lambda_2}{m} = \frac{\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta - \omega^2 \sin \theta}{\sin \theta}.$$

از (۶):

$$\frac{2\lambda_2}{m} = \frac{-\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta + g/R}{\cos \theta}.$$

مساوی قرار می دهیم:

$$\frac{\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta - \omega^2 \sin \theta}{\sin \theta} = \frac{-\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta + g/R}{\cos \theta}.$$

ضرب متقاطع:

$$\cos \theta \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta - \omega^2 \sin \theta \right) = \sin \theta \left(-\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{g}{R} \right).$$

بسط می دهیم:

$$\ddot{\theta} \cos^2 \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - \omega^2 \sin \theta \cos \theta = -\ddot{\theta} \sin^2 \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{R} \sin \theta.$$

جمله $-\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta$ از دو طرف حذف می شود:

$$\ddot{\theta} \cos^2 \theta - \omega^2 \sin \theta \cos \theta = -\ddot{\theta} \sin^2 \theta + \frac{g}{R} \sin \theta.$$

جمع کردن جمله های $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{R} \sin \theta.$$

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{R} \sin \theta.$$

در نتیجه معادله حرکت برای θ برابر است با:

$$\ddot{\theta} = \sin \theta \left(\omega^2 \cos \theta + \frac{g}{R} \right).$$

یا به شکل معادل:

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta = 0.$$

بنابراین ضرایب لاگرانژ به صورت زیر هستند:

$$\lambda_1 = -2m\dot{r}\omega \quad (\text{مربوط به اثرات کوریولیس}).$$

$$\lambda_2 = \frac{m}{2} \left[-\omega^2 \sin^2 \theta + \frac{g}{R} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \right] \quad (\text{مربوط به نیروی عمودی شعاعی}).$$

این نتایج با پاسخ شناخته شده برای مهره روی یک حلقه قائم دوار همخوانی دارد و سازگاری روش ضریب لاگرانژ را تأیید می کند.

۳ مهره روی سهموی چرخان

یک مهره به جرم m بدون اصطکاک روی یک سیم سهمی وار با معادله

$$y = \alpha x^2$$

می لغزد که در آن α ثابت است. این سیم با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محور عمودی y به چرخش واداشته شده است.

(الف) قید هولونومیک را بنویسید.

(ب) با استفاده از مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, y) و یک ضریب لاگرانژ، معادلات حرکت مهره را بیابید. (قید $y = \alpha r^2$ و $\dot{\phi} = \omega$ یک قید رئونومیک دوم است.)
 (پ) موقعیت تعادلی r_0 مهره نسبت به سیم دوار را پیدا کنید و ضریب را تفسیر کنید.

در مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, y) کار می‌کنیم که در آن:

$$x = r \cos \phi, \quad z = r \sin \phi, \quad y \text{ عمودی به سمت بالا}$$

انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{y}^2).$$

انرژی پتانسیل (گرانث، y به سمت بالا):

$$V = mgy.$$

لاگرانژین بدون قید:

$$L_0 = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{y}^2) - mgy.$$

ما دو قید داریم:

(۱) قید هولونومیک: مهره روی سیم سهمی وار $y = \alpha r^2$ باقی می‌ماند. به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\phi_1(r, y) = y - \alpha r^2 = 0.$$

ضریب لاگرانژ مرتبط: $\lambda(t)$.

(۲) قید سینماتیکی رئونومیک: سیم با سرعت ثابت ω می‌چرخد:

$$\dot{\phi} - \omega = 0.$$

ضریب لاگرانژ مرتبط $\mu(t)$ است.

لاگرانژین اصلاح شده:

$$L = L_0 + \lambda(t) \phi_1(r, y) + \mu(t)(\dot{\phi} - \omega).$$

یعنی:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(y - \alpha r^2) + \mu(\dot{\phi} - \omega).$$

توجه شود که λ و μ توابعی از زمان هستند، نه مختصات.

اکنون به طور مشابه از معادله اوایلر - لاگرانژ استفاده می‌کنیم. با ورودش مستقل نسبت به r, ϕ, y :

برای مختصه r :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 + \lambda \cdot (-2\alpha r) = mr\dot{\phi}^2 - 2\alpha r\lambda.$$

معادله اوایلر-لاگرانژ:

$$m\ddot{r} - (mr\dot{\phi}^2 - 2\alpha r\lambda) = 0.$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - 2\alpha r\lambda. \quad (۱)$$

برای مختصه ϕ :

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = mr^2\dot{\phi} + \mu.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2mr\dot{r}\dot{\phi} + mr^2\ddot{\phi} + \dot{\mu}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

معادله اوایلر-لاگرانژ:

$$2mr\dot{r}\dot{\phi} + mr^2\ddot{\phi} + \dot{\mu} = 0. \quad (۲)$$

برای مختصه y :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg + \lambda.$$

معادله اوایلر-لاگرانژ:

$$m\ddot{y} - (-mg + \lambda) = 0.$$

$$m\ddot{y} + mg = \lambda. \quad (۳)$$

معادلات قید:

$$y - \alpha r^2 = 0. \quad (۴)$$

$$\dot{\phi} - \omega = 0. \quad (۵)$$

تا اینجا ۵ معادله داریم: (۱)، (۲)، (۳)، (۴)، (۵)، برای ۵ مجهول: $r(t)$ ، $\phi(t)$ ، $y(t)$ ، $\lambda(t)$ ، $\mu(t)$.

با اعمال $\dot{\phi} = \omega$ داریم:

از (۵): $\dot{\phi} = \omega$ (ثابت) پس $\ddot{\phi} = 0$.

معادله (۲) می شود:

$$0 + 2mr\dot{r}\omega + \dot{\mu} = 0.$$

$$\dot{\mu} = -2m\omega r\dot{r}. \quad (2')$$

معادله (۱) می شود:

$$m\ddot{r} = mr\omega^2 - 2\alpha r\lambda.$$

$$\ddot{r} = r\omega^2 - \frac{2\alpha}{m}r\lambda. \quad (1')$$

معادله (۳) بدون تغییر: $\lambda = m\ddot{y} + mg$

از (۴): $y = \alpha r^2$ ، مشتق می گیریم:

$$\dot{y} = 2\alpha r\dot{r}, \quad \ddot{y} = 2\alpha(\dot{r}^2 + r\ddot{r}).$$

با جایگذاری در عبارت λ ادامه می دهیم. از (۳) و $\ddot{y}$:

$$\lambda = m[2\alpha(\dot{r}^2 + r\ddot{r})] + mg.$$

$$\lambda = 2m\alpha(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + mg. \quad (3')$$

در ادامه با حذف λ از معادله r پیش می رویم. λ را از (۳') در (۱') جایگذاری می کنیم:

$$\ddot{r} = r\omega^2 - \frac{2\alpha}{m}r[2m\alpha(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + mg].$$

$$\ddot{r} = r\omega^2 - 2\alpha r[2\alpha(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g].$$

بسط می دهیم:

$$\ddot{r} = r\omega^2 - 4\alpha^2 r(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) - 2\alpha gr.$$

با جمع آوری جمله های $\ddot{r}$ و بازنویسی داریم:

$$\ddot{r} + 4\alpha^2 r^2 \ddot{r} = r\omega^2 - 4\alpha^2 r\dot{r}^2 - 2\alpha gr.$$

$$\ddot{r}(1 + 4\alpha^2 r^2) = r(\omega^2 - 2\alpha g) - 4\alpha^2 r\dot{r}^2.$$

همچنین معادله نهایی حرکت برای $r(t)$ برابر است با:

$$\ddot{r}(1 + 4\alpha^2 r^2) = r(\omega^2 - 2\alpha g) - 4\alpha^2 r\dot{r}^2.$$

و $\phi(t) = \omega t$, $y(t) = \alpha r(t)^2$ از رابطه (۳') و $\mu(t)$ از انتگرال گیری (۲') به دست می آید.

۴ استوانه ای که روی یک تخته متحرک می غلتد

یک استوانه توپُر یکنواخت به جرم M و شعاع R بدون لغزش روی یک تخته افقی به جرم m می غلتد. خود تخته می تواند بدون اصطکاک روی یک سطح افقی بلغزد.

(الف) رابطه قید بین جابجایی تخته x_p و جابجایی زاویه ای θ استوانه را بیابید.

(ب) با استفاده از مختصات x_p و x_c (مرکز جرم استوانه) و یک ضریب لاگرانژ، معادلات حرکت را به دست آورید.

برای استوانه‌ای که روی تخته می‌غلتد، فرض کنید:

$$x_p - \text{جایجایی تخته.}$$

$$x_c - \text{جایجایی مرکز جرم استوانه.}$$

$$\theta - \text{جایجایی زاویه‌ای استوانه (مثبت برای چرخش ساعتگرد).}$$

سرعت نقطه تماس روی استوانه نسبت به زمین برابر است با:

$$v_{\text{contact}} = v_c + (-R\dot{\theta}),$$

(اگر $\dot{\theta} > 0$ ساعتگرد باشد، پایین استوانه نسبت به مرکز به چپ حرکت می‌کند).

اما توجه: اگر استوانه بدون لغزش نسبت به تخته بغلتد، سرعت نقطه تماس نسبت به تخته صفر است. بنابراین:

$$v_{\text{contact}} = v_{\text{plank}}.$$

یعنی:

$$\dot{x}_c - R\dot{\theta} = \dot{x}_p.$$

از شرط بدون لغزش داریم:

$$\dot{x}_c - R\dot{\theta} = \dot{x}_p.$$

با انتگرال‌گیری نسبت به زمان و با فرض شرایط اولیه $x_c(0) = 0$, $x_p(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ ، به دست می‌آوریم:

$$x_c - R\theta = x_p.$$

یا به طور معادل:

$$\phi(x_p, x_c, \theta) = x_c - R\theta - x_p = 0.$$

این یک قید هولونومیک اسکالرونومیک است.

$$x_c - R\theta - x_p = 0 \quad \text{یا} \quad \dot{x}_c - R\dot{\theta} = \dot{x}_p.$$

مسئله می‌گویید که از مختصات x_p و x_c و یک ضریب لاگرانژ استفاده کنید.

اما توجه شود که ما سه متغیر سینماتیکی داریم: x_p , x_c , θ . قید $x_c - R\theta - x_p = 0$ درجه‌های آزادی را از

۳ به ۲ کاهش می‌دهد.

در روش ضریب لاگرانژ، هر سه (x_p, x_c, θ) را به عنوان مختصات تعمیم‌یافته مستقل در نظر می‌گیریم و قید را

با یک ضریب $\lambda(t)$ اعمال می‌کنیم.

مختصات تعمیم‌یافته به صورت زیر است: $q_1 = x_p$, $q_2 = x_c$, $q_3 = \theta$.

قید نیز برابر است با:

$$\phi(x_p, x_c, \theta) = x_c - R\theta - x_p = 0.$$

انرژی پتانسیل: سطح افقی، هیچ حرکت قائم پس $V = 0$.

انرژی جنبشی نیز برای تخته و استوانه نوشته می شود.
برای تخته داریم:

$$T_p = \frac{1}{2}m\dot{x}_p^2.$$

برای استوانه داریم:

- انرژی جنبشی انتقالی مرکز جرم: $\frac{1}{2}M\dot{x}_c^2$.

- انرژی جنبشی چرخشی حول مرکز جرم:

گشتاور لختی استوانه توپُر حول محور آن: $I = \frac{1}{2}MR^2$. پس:

$$T_{\square\square} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2.$$

انرژی جنبشی کل استوانه:

$$T_c = \frac{1}{2}M\dot{x}_c^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2.$$

انرژی جنبشی کل سیستم:

$$T = T_p + T_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_p^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_c^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2.$$

روش استاندارد ضریب لاگرانژ برای قیود هولونومیک که به این صورت است که عبارت $\lambda(t)\phi(x_p, x_c, \theta)$ به لاگرانژین اضافه می شود را در نظر بگیریم.
پس:

$$L = T - V + \lambda(t)\phi = \frac{1}{2}m\dot{x}_p^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_c^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \lambda(x_c - R\theta - x_p).$$

در اینجا $\lambda(t)$ ضریب لاگرانژ است (بعد نیرو).

از x_p ، x_c و θ به طور مستقل وردش می گیریم.

برای x_p :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_p} = m\dot{x}_p, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_p} \right) = m\ddot{x}_p.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_p} = -\lambda.$$

معادله اوایلر - لاگرانژ:

$$m\ddot{x}_p + \lambda = 0. \quad (1)$$

برای x_c :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = M\dot{x}_c, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) = M\ddot{x}_c.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_c} = \lambda.$$

معادله اوایلر - لاگرانژ:

$$M\ddot{x}_c - \lambda = 0. \quad (2)$$

برای θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\lambda R.$$

معادله اوایلر - لاگرانژ:

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + \lambda R = 0.$$

تقسیم بر R :

$$\frac{1}{2}MR\ddot{\theta} + \lambda = 0. \quad (3)$$

معادله قید:

$$\phi = x_c - R\theta - x_p = 0. \quad (4)$$

حالا چهار معادله داریم: (۱)، (۲)، (۳)، (۴) برای چهار مجهول: $\lambda(t)$, $\theta(t)$, $x_c(t)$, $x_p(t)$.

۵ ذره روی کره (سقوط از نیمکره)

ذره‌ای به جرم m از حالت سکون در بالای یک کره صاف ثابت به شعاع R شروع به حرکت می‌کند. با استفاده از مختصات کروی (r, θ, ϕ) و یک ضریب لاگرانژ برای قید $r = R$ ، معادلات حرکت را به دست آورید.

از مختصات کروی (r, θ, ϕ) با مبدأ در مرکز کره استفاده می‌کنیم:
 r - فاصله شعاعی از مرکز.

θ - زاویه قطبی که از محور قائم (محور z مثبت) اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین در بالای کره $\theta = 0$.

ϕ - زاویه سمت‌الرأسی حول محور قائم.
 قید اینکه ذره روی سطح کره باقی بماند:

$$f(r) = r - R = 0.$$

موقعیت در مختصات کارتزین:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

مربع سرعت در مختصات کروی را نیاز داریم. از مشتق‌گیری $\vec{r} = (x, y, z)$ نسبت به زمان:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

نتیجه استاندارد:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2.$$

انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right).$$

انرژی پتانسیل: صفر پتانسیل را در مرکز کره در نظر می‌گیریم؛ در واقع، راحت‌تر است که پتانسیل گرانشی را به صورت $V = mgz$ با محور z به سمت بالا در نظر بگیریم. با $z = r \cos \theta$ ، داریم:

$$V = mgz = mgr \cos \theta.$$

لاگرانژین بدون قید:

$$L_0 = T - V = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - mgr \cos \theta.$$

قید را با ضریب $\lambda(t)$ اضافه می‌کنیم:

$$L = L_0 + \lambda(t)f(r) = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - mgr \cos \theta + \lambda(r - R).$$

در اینجا $\lambda(t)$ یکای نیرو دارد.

اکنون به طور مشابه، با استفاده از معادله اوایلر - لاگرانژ ادامه می‌دهیم.

با ورودش مستقل نسبت به θ ، ϕ و r :

برای مختصه r :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 + m\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - mg \cos \theta + \lambda.$$

معادله اوایلر - لاگرانژ:

$$m\ddot{r} - \left(m\dot{\theta}^2 + m\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - mg \cos \theta + \lambda \right) = 0.$$

$$m\ddot{r} = m\dot{\theta}^2 + m\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - mg \cos \theta + \lambda. \quad (1)$$

برای مختصه θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta}).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + mgr \sin \theta.$$

معادله اوایلر - لاگرانژ:

$$m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) - (mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + mgr \sin \theta) = 0.$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - mgr \sin \theta = 0. \quad (2)$$

برای مختصه ϕ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = m \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

معادله اوایلر - لاگرانژ:

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (3)$$

این بیانگر پایداری تکانه زاویه‌ای حول محور قائم است:

$$mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{ثابت}.$$

معادله قید:

$$r = R. \quad (4)$$

حالا چهار معادله داریم: (۱)، (۲)، (۳)، (۴) برای چهار مجهول: $\lambda(t)$, $\phi(t)$, $\theta(t)$, $r(t)$.
از (۴): $r = R$ داریم:

$$\dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0.$$

از تقارن مشاهده خواهیم کرد که ذره از سکون در بالای کره ($\theta = 0$) شروع می‌کند. اگر در ابتدا $\dot{\phi} = 0$ باشد و هیچ نیرویی در جهت ϕ وجود نداشته باشد، حرکت در یک صفحه قائم باقی می‌ماند. می‌توانیم بدون از دست دادن کلیت، این صفحه را $\phi = 0$ انتخاب کنیم. بنابراین:

$$\dot{\phi} = 0, \quad \ddot{\phi} = 0 \quad \text{برای همه زمان}$$

مقادیر $r = R$, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$ را در معادلات (۱)، (۲)، (۳) جایگذاری می‌کنیم.
معادله (۱):

$$0 = mR\dot{\theta}^2 + 0 - mg \cos \theta + \lambda.$$

$$\lambda = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2. \quad (1')$$

معادله (۲):

$$mR^2\ddot{\theta} + 0 - 0 - mgR \sin \theta = 0.$$

$$R\ddot{\theta} - g \sin \theta = 0.$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta. \quad (2')$$

معادله (۳):

$$\frac{d}{dt}(mR^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad \text{با } \dot{\phi} = 0$$

حال به دنبال حل برای $\dot{\theta}^2$ به عنوان تابعی از θ هستیم.
از (2') داریم:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta.$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad \text{اما پس:}$$

$$\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta.$$

متغیرها را جدا کرده و انتگرال می گیریم:

$$\int_{\dot{\theta}=0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}' d\dot{\theta}' = \frac{g}{R} \int_{\theta=0}^{\theta} \sin \theta' d\theta'.$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} [-\cos \theta']_0^{\theta} = \frac{g}{R} (-\cos \theta + \cos 0) = \frac{g}{R} (1 - \cos \theta).$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos \theta).$$