

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس یار: امیرعلی عابدینی
جلسه نهم: دستگاه‌های چرخان
نیم‌سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

۱ معادلات حرکت آونگ فوکو

دیدیم که لاگرانژین آونگ فوکو به صورت زیر بدست آمد:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega \sin \lambda (x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2 + y^2) \quad (1)$$

در لاگرانژین، جمله $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ انرژی جنبشی آشنا و معمولی گلوله آونگ است، اما فقط همانطور که از چارچوب چرخان زمین دیده می‌شود. $\dot{x}$ و $\dot{y}$ به ترتیب مولفه‌های سرعت گلوله در جهت شرق (x) و شمال (y) هستند. معنای فیزیک این عبارت نشان‌دهنده انرژی ناشی از حرکت گلوله نسبت به سطح زمین است. این همان حرکت نوسانی‌ای است که اگر در کنار آونگ بایستید، می‌بینید و اندازه می‌گیرید. اگر زمین نمی‌چرخید، این کل انرژی جنبشی بود.

جمله $m\omega \sin \lambda (x\dot{y} - y\dot{x})$ ، مهم‌ترین بخش است. این یک انرژی خالص نیست، بلکه یک عبارت جفت‌شدگی کوریولیس است که هنگام استخراج لاگرانژین در یک چارچوب مرجع چرخان ظاهر می‌شود. این عبارت از بخش $\omega \times r$ در بیان کامل سرعت ناشی می‌شود. این ترکیب به تکانه زاویه‌ای حرکت گلوله در صفحه افقی مربوط است. این به ما می‌گوید که اثر کوریولیس نه تنها به سرعت گلوله، بلکه به موقعیت آن نیز بستگی دارد. این همین عبارت است که باعث پیش‌آمد صفحه نوسان آونگ می‌شود و همواره یک فشار جانبی به گلوله در جهت عمود بر مسیر لحظه‌ای حرکتش وارد می‌کند.

جمله $-\frac{1}{2}m(g/l)(x^2 + y^2)$ نیز انرژی پتانسیل آونگ است که با استفاده از تقریب زاویه کوچک ساده‌سازی شده است.

اکنون می‌توانیم با استفاده از معادله اوایلر - لاگرانژ، معادلات حرکت آونگ را بدست آورده و الگوی آن را

توصیف کنیم.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad q_i = x, y \quad (۲)$$

توجه شود که مختصات تعمیم یافته، x و y هستند. برای بدست آوردن معادله حرکت برای مؤلفه x داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - m\omega \sin \lambda y \quad (۳)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} - m\omega \sin \lambda \dot{y} \quad (۴)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega \sin \lambda \dot{y} - m\frac{g}{l}x \quad (۵)$$

که در نهایت با جایگذاری در معادله اوایلر - لاگرانژ، داریم:

$$m\ddot{x} - m\omega \sin \lambda \dot{y} - \left(m\omega \sin \lambda \dot{y} - m\frac{g}{l}x \right) = 0 \quad (۶)$$

$$\implies \ddot{x} - 2\omega \sin \lambda \dot{y} + \frac{g}{l}x = 0 \quad (۷)$$

به طور کاملاً مشابه نیز برای مؤلفه y داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\omega \sin \lambda x \quad (۸)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} + m\omega \sin \lambda \dot{x} \quad (۹)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m\omega \sin \lambda \dot{x} - m\frac{g}{l}y \quad (۱۰)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (۱۱)$$

$$(m\ddot{y} + m\omega \sin \lambda \dot{x}) - (-m\omega \sin \lambda \dot{x} - m\frac{g}{l}y) = 0 \quad (۱۲)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\implies \ddot{y} + 2\omega \sin \lambda \dot{x} + \frac{g}{l}y = 0 \quad (۱۳)$$

حال، ما معادلات حرکت زیر را استخراج کردیم:

$$\ddot{x} - 2\Omega \dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \quad (۱۴)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega \dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \quad (۱۵)$$

که در آن $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ فرکانس طبیعی آونگ (بدون در نظر گرفتن چرخش زمین) است و $\Omega = \omega \sin \lambda$ مؤلفه مؤثر عمودی نرخ چرخش زمین در عرض جغرافیایی λ است. عبارات $2\Omega \dot{x}$ و $2\Omega \dot{y}$ به ترتیب مؤلفه‌های نیروی کوریولیس هستند.

اتصال بین معادلات x و y ، حل مستقیم این معادلات را دشوار می‌سازد. یک راه حل هوشمندانه، ترکیب آن‌ها در یک معادله واحد در صفحه مختلط است. اکنون یک متغیر مختلط تعریف می‌کنیم.

$$\eta(t) = x(t) + iy(t) \quad (۱۶)$$

حال، معادله به صورت $\ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\dot{\eta} = \dot{x} + i\dot{y} \quad (۱۷)$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{x} + i\ddot{y} \quad (۱۸)$$

اکنون با توجه به $\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} - \omega_0^2 x$ و $\ddot{y} = -2\Omega\dot{x} - \omega_0^2 y$ داریم:

$$(\ddot{x}) + i(\ddot{y}) = (2\Omega\dot{y} - \omega_0^2 x) + i(-2\Omega\dot{x} - \omega_0^2 y) \quad (۱۹)$$

با دسته‌بندی عبارت‌های کوریولیس و فتر، بدست خواهیم آورد:

$$\ddot{\eta} = 2\Omega(\dot{y} - i\dot{x}) - \omega_0^2(x + iy) \quad (۲۰)$$

$$\ddot{\eta} = -2\Omega i(\dot{x} + i\dot{y}) - \omega_0^2 \eta \quad \dot{y} - i\dot{x} = -i(\dot{x} + i\dot{y}) \quad (۲۱)$$

$$\ddot{\eta} = -2i\Omega\dot{\eta} - \omega_0^2 \eta \quad (۲۲)$$

در نتیجه:

$$\ddot{\eta} + 2i\Omega\dot{\eta} + \omega_0^2 \eta = 0 \quad (۲۳)$$

این یک معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم بسیار ساده‌تر با ضرایب ثابت است، هرچند مختلط. با حل این معادله در صفحه مختلط و در نظر گرفتن پاسخ به فرم نمایی و همچنین اعمال تعدادی تقریب، می‌توان نشان داد:

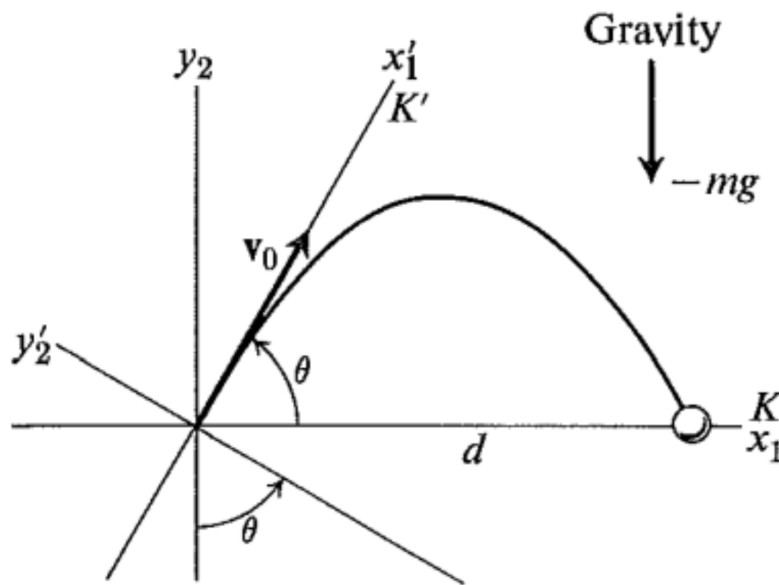
$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) \cos(\Omega t) \quad (۲۴)$$

$$y(t) = -a \cos(\omega_0 t) \sin(\Omega t) \quad (۲۵)$$

همچنین ضریب a نیز با استفاده از شرط مرزی بدست خواهد آمد.

۲ حرکت پرتابه در دستگاه چرخان

تصور کنید که در یک روز آرام، توپی را به هوا پرتاب می‌کنید. در حالی که به نظر می‌رسد مسیر آن یک قوس سهمی ساده است، نیرویی نامرئی به طور نامحسوس مسیرش را تغییر می‌دهد. این، اثر کوریولیس است. از دیدگاه ما روی زمین، سیاره بی حرکت به نظر می‌رسد، اما در واقعیت در حال چرخش است. این چرخش، یک نیروی ظاهری ایجاد می‌کند که اجسام متحرک، مانند یک پرتابه، را در نیمکره شمالی به سمت راست و در نیمکره جنوبی به سمت چپ منحرف می‌کند. اگرچه این انحراف برای پرتاب‌های روزمره ناچیز است، اما برای مسیرهای طولانی محدود مانند مسیر موشک‌ها یا گلوله‌های توپ حیاتی می‌شود. مسئله از لحاظ در نظر گرفتن دستگاه مختصات، کاملاً مشابه آونگ فوکو است. ما یک دستگاه مختصات (چارچوب دوار) را در نظر می‌گیریم که نسبت به سطح زمین ثابت است.



شکل ۱: دستگاه مختصات چرخان برای حرکت پرتابه

چارچوب لخت (X, Y, Z) را نسبت به فضا با مبدا در مرکز زمین در نظر می گیریم. چارچوب چرخان (x, y, z) را نیز در نظر می گیریم که محاسبات مان را با استفاده از آن پیش خواهیم برد. در چارچوب چرخان که نسبت به زمین ثابت است، محور x در جهت طول جغرافیایی و به سمت شرق اشاره دارد، محور y در جهت عرض جغرافیایی به سمت شمال اشاره دارد و محور z نیز در جهت شعاعی از مرکز زمین به صورت عمودی به بالا اشاره دارد. به این ترتیب برای بردار سرعت زاویه ای خواهیم داشت:

$$\vec{\omega} = (0, \omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \quad (1)$$

که در آن θ عرض جغرافیایی مبدأ O است. (در قطب شمال، $\theta = 90^\circ$ ، $\omega = (0, 0, \omega)$ ؛ در استوا، $\theta = 0^\circ$ ، $\omega = (0, \omega, 0)$). بردار موقعیت پرتابه در چارچوب دوار به صورت $\vec{r} = (x, y, z)$ است. یک نیروی گرانش یکنواخت به سمت پایین عمل می کند: $\vec{F}_{grav} = -mg\hat{k}$ ، که در آن $\hat{k}$ بردار واحد در راستای محور z است. لاگرانژین L به صورت $L = T - V$ تعریف می شود که در آن T انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل است. با این حال، این فرمول تنها در یک چارچوب لخت معتبر است. برای استفاده از مکانیک لاگرانژی در یک چارچوب دوار، باید انرژی جنبشی را بر حسب سرعت مشاهده شده از چارچوب لخت بیان کنیم، اما آن را با استفاده از مختصات چارچوب دوار بنویسیم.

اکنون، فرض کنید $\vec{R}$ بردار موقعیت مبدأ O از چارچوب دوار در چارچوب لخت باشد. همچنین فرض کنید $\vec{r}$ بردار موقعیت پرتابه نسبت به O باشد (یعنی مختصات در چارچوب دوار ما). به این ترتیب، بردار موقعیت برابر است با:

$$\vec{R}_{inertial} = \vec{R} + \vec{r} \quad (2)$$

مشتق زمانی این بردار در دو چارچوب متفاوت است. فرمول کلی برای مشتق زمانی در چارچوب لخت برای یک بردار $\vec{r}$ که در چارچوبی با سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ در حال چرخش تعریف شده است، به صورت زیر است:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{inertial} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rotating} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (3)$$

$$\vec{v}_{inertial} = \left(\frac{d}{dt}(\vec{R} + \vec{r})\right)_{inertial} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{inertial} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{inertial} \quad (4)$$

جمله اول، $\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{inertial}$ ، سرعت مبدأ O ناشی از چرخش زمین است. از آنجا که O نسبت به زمین در حال چرخش ثابت است، $\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{inertial} = \vec{\omega} \times \vec{R}$. جمله دوم، سرعت پرتابه نسبت به O است، همانطور که از چارچوب لخت دیده می‌شود. با استفاده از فرمول کلی، این مقدار برابر است با $\vec{\omega} \times \vec{r} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rotating}$. می‌توانیم $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{rotating}$ را به صورت $\vec{v}_r$ نشان دهیم. این همان سرعت در چارچوب دوار ما یا $\vec{v}_r = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ است.

$$\vec{v}_{inertial} = \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5)$$

به این ترتیب، انرژی جنبشی برابر است با:

$$T = \frac{1}{2}m \vec{v}_{inertial} \cdot \vec{v}_{inertial} = \frac{1}{2}m \left\| \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \right\|^2 \quad (6)$$

$$T = \frac{1}{2}m \left[\vec{v}_r \cdot \vec{v}_r + 2\vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{R}) + \left\| \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right\|^2 \right] \quad (7)$$

عبارت $\left\| \vec{\omega} \times \vec{R} \right\|^2$ ثابت است (انرژی جنبشی دورانی یک نقطه ثابت روی زمین). از آنجا که لاگرانژین با یک مشتق زمانی کل از یک تابع تعریف می‌شود، عبارت‌های ثابت را می‌توان نادیده گرفت زیرا بر معادلات حرکت تأثیر نمی‌گذارند.

عبارت‌های $\left\| \vec{\omega} \times \vec{r} \right\|^2$ و $2(\vec{\omega} \times \vec{R}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$ به نیروی گریز از مرکز مربوط می‌شوند. برای حرکت پرتابه در مقیاس کوچک ($\left\| \vec{r} \right\| \ll \left\| \vec{R} \right\|$)، عبارت $\left\| \vec{\omega} \times \vec{r} \right\|^2$ از مرتبه ω^2 است و در مقایسه با عبارت‌های دیگر مانند گرانش قابل اغماض است. ما عبارت گریز از مرکز مرتبط با $\vec{R}$ را حفظ می‌کنیم، زیرا این عبارت گرانش را تعدیل می‌کند. با این حال، عبارت $2(\vec{\omega} \times \vec{R}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$ اغلب در تعریف پتانسیل گرانشی مؤثر جذب می‌شود. ما در اینجا به روش سیستماتیک تمام عبارت‌ها را حفظ می‌کنیم، اما اثر آن‌ها را در معادله نهایی مشاهده خواهیم کرد. انرژی پتانسیل شامل دو مؤلفه است؛ یک پتانسیل ناشی از نیروی گرانشی به صورت $V_{grav} = mgz$ و یک پتانسیل ناشی از نیروی گریز از مرکز. یک چارچوب مرجع چرخان، منجر به ایجاد یک نیروی گریز از مرکز می‌شود که ایجاد یک پتانسیل خواهد کرد. پتانسیل گریز از مرکز به این صورت است:

$$V_{cent} = -\frac{m}{2} \left[(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2(\vec{\omega} \times \vec{R}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right] \quad (8)$$

به این ترتیب، یک پتانسیل موثر تعریف می‌کنیم:

$$V_{eff} = mgz - \frac{m}{2} \left\| \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right\|^2 \quad (۹)$$

در نتیجه برای لاگرانژین با ساده سازی خواهیم داشت:

$$L = T - V_{eff} \quad (۱۰)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) - mgz + m(\vec{\omega} \times \vec{R}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (۱۱)$$

اکنون از معادله اوایلر - لاگرانژ برای یافتن معادلات حرکت استفاده می‌کنیم.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad q_i = x, y, z. \quad (۱۲)$$

با انجام محاسبات داریم:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega \cos \theta & \omega \sin \theta \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (۱۳)$$

$$= \hat{i}(\omega y \sin \theta - \omega z \cos \theta) - \hat{j}(-\omega z \cdot 0 + \omega x \sin \theta) + \hat{k}(-\omega x \cos \theta + \omega y \cdot 0) \quad (۱۴)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega(y \sin \theta - z \cos \theta), -\omega x \sin \theta, \omega x \cos \theta) \quad (۱۵)$$

حال، عبارت کوریولیس در لاگرانژین به صورت زیر است:

$$m\vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega(y \sin \theta - z \cos \theta) \\ -\omega x \sin \theta \\ \omega x \cos \theta \end{pmatrix} \quad (۱۶)$$

$$= m\omega[\dot{x}(y \sin \theta - z \cos \theta) - \dot{y}x \sin \theta + \dot{z}x \cos \theta] \quad (۱۷)$$

اکنون عبارت گریز از مرکز یا $(\vec{\omega} \times \vec{R}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{\omega} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega \cos \theta & \omega \sin \theta \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} \quad (۱۸)$$

$$= \hat{i}(\omega R \cos \theta - 0) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(0 - 0) = (\omega R \cos \theta, 0, 0) \quad (۱۹)$$

بنابراین، حاصل ضرب داخلی برابر است با:

$$(\vec{\omega} \times \vec{R}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\omega R \cos \theta, 0, 0) \cdot (\omega(y \sin \theta - z \cos \theta), -\omega x \sin \theta, \omega x \cos \theta) \quad (۲۰)$$

$$= \omega^2 R \cos \theta (y \sin \theta - z \cos \theta) \quad (۲۱)$$

لاگرانژین ساده شده برابر است با:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\vec{v}_r \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) - mg_0z + \frac{m}{2}[\vec{\omega} \times (\vec{R} + \vec{r})]^2 \quad (22)$$

اکنون با محاسبه مشتقات جزئی و جایگذاری در معادله اوایلر - لگرانژ ادامه خواهیم داد. محاسبات برای مولفه x برابر است با:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m\omega(y \sin \theta - z \cos \theta) \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} + m\omega(\dot{y} \sin \theta - \dot{z} \cos \theta) \quad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega\dot{y} \sin \theta + m\omega\dot{z} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m}{2}[\vec{\omega} \times (\vec{R} + \vec{r})]^2 \right) \quad (25)$$

برای مولفه y داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} - m\omega x \sin \theta \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} - m\omega\dot{x} \sin \theta \quad (27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = m\omega\dot{x} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m}{2}[\vec{\omega} \times (\vec{R} + \vec{r})]^2 \right) \quad (28)$$

برای مولفه z نیز خواهیم داشت:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + m\omega x \cos \theta \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} + m\omega\dot{x} \cos \theta \quad (30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -m\omega\dot{x} \cos \theta - mg + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{m}{2}[\vec{\omega} \times (\vec{R} + \vec{r})]^2 \right) \quad (31)$$

اکنون برای هر مولفه، معادله حرکت را بدست خواهیم آورد؛ برای مولفه x داریم:

$$m\ddot{x} + m\omega(\dot{y} \sin \theta - \dot{z} \cos \theta) = -m\omega\dot{y} \sin \theta + m\omega\dot{z} \cos \theta - m\omega^2 x \quad (32)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = 2\omega(\sin \theta \dot{y} - \cos \theta \dot{z}) - \omega^2 x \quad (33)$$

مولفه y برابر است با:

$$m\ddot{y} - m\omega\dot{x} \sin \theta = m\omega\dot{x} \sin \theta - m\omega^2(R \cos \theta + y \sin \theta - z \cos \theta) \sin \theta \quad (34)$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -2\omega \sin \theta \dot{x} - \omega^2 \sin \theta (R \cos \theta + y \sin \theta - z \cos \theta) \quad (35)$$

مولفه z برابر است با:

$$m\ddot{z} + m\omega\dot{x} \cos \theta = -m\omega\dot{x} \cos \theta - mg + m\omega^2(R \cos \theta + y \sin \theta - z \cos \theta) \cos \theta \quad (36)$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = -2\omega \cos \theta \dot{x} - g + \omega^2 \cos \theta (R \cos \theta + y \sin \theta - z \cos \theta) \quad (37)$$

اگرچه با تقریب‌هایی، معمول است که گاهی معادلات را به صورت زیر ساده می‌کنند:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega(\sin\theta\dot{y} - \cos\theta\dot{z}) \\ \ddot{y} &= -2\omega\sin\theta\dot{x} \\ \ddot{z} &= g - 2\omega\cos\theta\dot{x}\end{aligned}\tag{۳۸}$$