دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس‌یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس‌یار: امیرعلی عابدینی

جلسه هشتم: آونگ فوکو

نیم‌سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

---

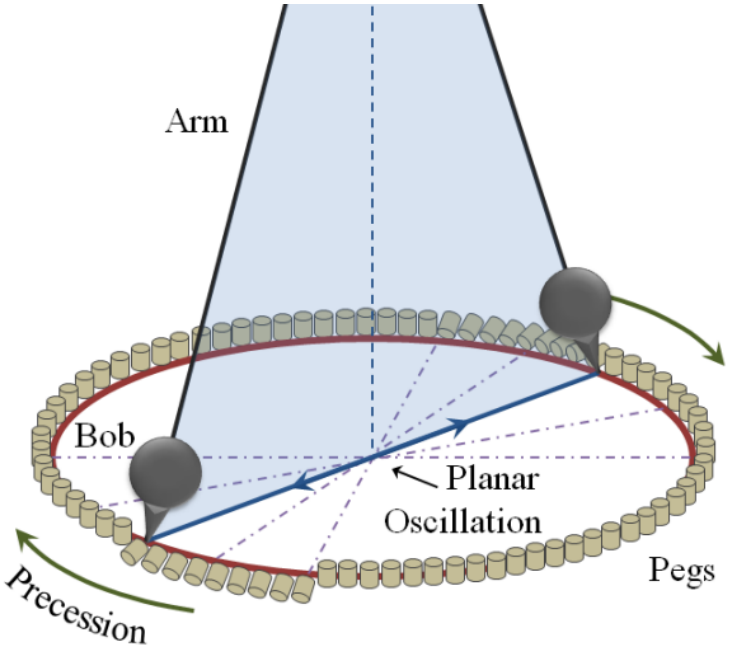
۱ مقدمه

آونگ فوکو نمایشی تجربی از چرخش زمین است که نه با توسل به نیروهای ظاهری، بلکه در قالب مفهومی دقیق از چارچوب‌های مرجع لخت تبیین می‌شود. در چارچوب مرجع چرخانی مانند زمین، حرکت این آونگ با وارد کردن نیروی کوریولیس توصیف می‌شود. با این حال، از منظر یک چارچوب لخت، این آونگ در صفحه‌ای ثابت و بدون تغییر نوسان می‌کند و این کره زمین است که زیر پای آن در چرخش است. بنابراین، آونگ فوکو نمادی بارز از این اصل کلیدی در مکانیک تحلیلی است که چگونه انتخاب هوشمندانه چارچوب مرجع، می‌تواند تحلیل دینامیک سیستم‌های پیچیده را به شدت ساده‌سازی کند.

یک فرض اولیه این است که زمین کاملا کروی بوده و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. با نادیده گرفتن تخت‌شدگی اندک زمین و هرگونه تغییر در سرعت چرخش آن، می‌توان از یک بردار ثابت سرعت زاویه‌ای ω در معادلات حرکت استفاده کرد که مدل ریاضی را به شدت ساده می‌سازد.

در ادامه، گلوله آونگ را به جرم m در نظر می‌گیریم که درحال نوسان است. همچنین میله آونگ به طول l بدون جرم در نظر گرفته شده و طول آن ثابت است. فرض بدون جرم بودن طول آونگ یا همان میله به این معنی است که می‌توان لختی آن را کاملاً نادیده گرفت، و شرط طول ثابت نیز تضمین می‌کند که گلوله آونگ بر روی سطح کره‌ای با شعاع ثابت حرکت می‌کند. این قید، تعداد درجات آزادی سیستم را کاهش می‌دهد و معمولاً در فرمولاسیون لاگرانژی با استفاده از یک ضریب لاگرانژ اعمال می‌شود.

مورد قابل توجه بعدی، توجه به دامنه نوسان کوچک است، که به ما امکان می‌دهد معادلات نهایی را خطی سازی کنیم. تقریب زاویه کوچک $\sin\theta \approx \theta$ اعمال می‌شود، که معادلات دیفرانسیل غیرخطی حرکت را خطی می‌سازد. به این ترتیب از بروز پدیده‌های غیرخطی و آشوبناک جلوگیری می‌شود.



شکل ۱: آونگ فوکو

۲ انتخاب دستگاه مختصات

برای تحلیل دقیق آونگ فوکو، باید دو چارچوب مرجع مجزا را به دقت تعریف کنیم. این ضرورت از آنجا ناشی می‌شود که حرکت آونگ روی زمینِ در حال چرخش مشاهده می‌شود، اما قوانین بنیادی حرکت (قوانین نیوتن یا معادلات لاگرانژ) به ساده‌ترین شکل در یک چارچوب لخت بیان می‌شوند.

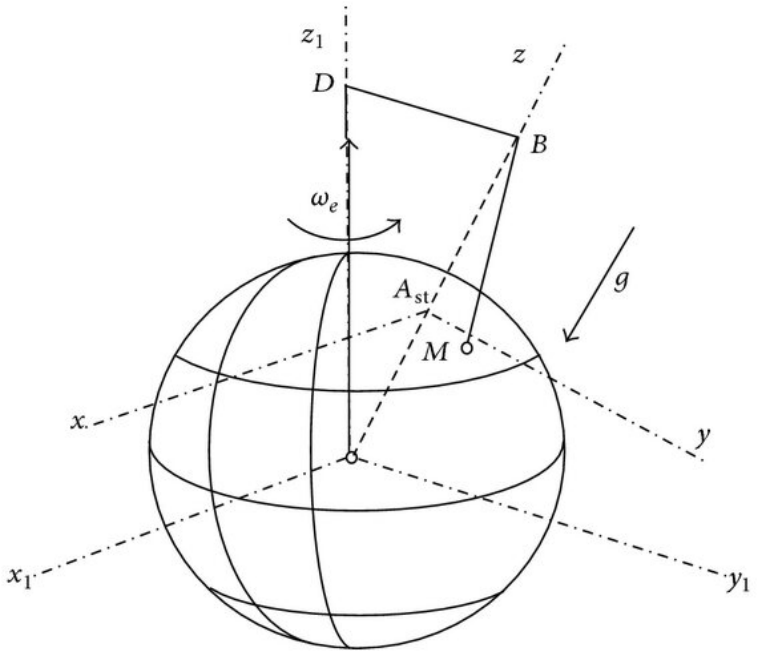
۱. چارچوب لخت (X, Y, Z)

این چارچوب مرجع مطلق و بدون شتاب ما است. مبدأ آن را در مرکز زمین قرار می‌دهیم که برای این آزمایش یک تقریب خوب از یک چارچوب لخت به شمار می‌رود. محور Z با محور چرخش زمین منطبق است. محورهای X و Y در صفحه استوایی قرار دارند و نسبت به ستارگان دوردست ثابت هستند. در این چارچوب، خود زمین با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور Z می‌چرخد و یک نقطه روی سطح زمین در این چارچوب مسیری دایره‌ای را طی می‌کند.

۲. چارچوب چرخان (x, y, z)

این چارچوب، مرجعی است که یک ناظر در آن ایستاده و آونگ را تماشا می‌کند. مبدأ آن در نقطه اتصال آونگ روی سطح زمین ثابت شده است. محورهای آن توسط جغرافیای محل تعریف می‌شوند. محور x به سمت شرق اشاره می‌کند، محور y به سمت شمال اشاره می‌کند و محور z به سمت بالا و در راستای شاقول محلی (جهت شعاعی به سمت بیرون از مرکز زمین) است.

توجه شود که این چارچوب، لخت نیست؛ بلکه با زمین می‌چرخد. بردار سرعت زاویه‌ای زمین در این چارچوب محلی مؤلفه دارد. در عرض جغرافیایی λ بردار ω به سمت شمال متمایل است و مؤلفه‌ای در راستای شاقول محلی (محور z) برابر با $\omega \sin \lambda$ و مؤلفه‌ای در راستای محور شمالی–جنوبی (محور y) برابر با $\omega \cos \lambda$ دارد.



شکل ۲: دستگاه مختصات در آونگ فوکو - در تصویر چارچوب (x_1, y_1, z_1) به عنوان چارچوب لخت در نظر گرفته شده است.

۳ تشکیل لاگرانژین

ما لاگرانژی را در چارچوب دوار می‌نویسیم، زیرا حرکت در این چارچوب اندازه‌گیری می‌شود. با این حال، یک نکته بسیار مهم باید در نظر گرفته شود؛ عبارت انرژی جنبشی باید چرخش خود چارچوب را نیز حساب کند. سرعت گلوله آونگ در چارچوب لخت، برابر است با مجموع سرعت آن نسبت به چارچوب دوار به علاوه سرعت ناشی از چرخش خود چارچوب:

$$\vec{v}_{inertial} = \vec{v}_{rot} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{۱}$$

وقتی لاگرانژین $L = T - V$ را می‌سازیم، از این عبارت کامل برای انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. انرژی پتانسیل V عمدتاً ناشی از گرانش است که به طور مؤثر در راستای محور z محلی عمل می‌کند. با نوشتن این لاگرانژی بر حسب مختصات (x, y, z) چارچوب دوار و اعمال تقریب زاویه کوچک (که به ما اجازه می‌دهد حرکت در راستای z را نادیده بگیریم)، معادلات حرکت را استخراج می‌کنیم.

در دستگاه چرخان، یا همان (x, y, z)، آونگ با طول l مقید شده است.

$$x^2 + y^2 + (z - l)^2 = l^2 \tag{۲}$$

با بازنویسی داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2lz + l^2 = l^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 2lz \tag{۳}$$

با تحلیل مرتبه بزرگی، برای نوسان‌های کوچک، جابجایی‌های افقی x و y در مقایسه با طول میله l بسیار کوچک هستند. اگر معادله قیدی را برای z حل کنیم، می‌یابیم که z صفر نیست، بلکه متناسب با $x^2 + y^2$ است. این باعث

می‌شود z یک کمیت مرتبه دوم باشد، کمیتی بسیار بسیار کوچک‌تر از کمیت‌های مرتبه اول مانند x و y.

$$\frac{x}{l} \ll 1, \quad \frac{y}{l} \ll 1 \tag{۴}$$

از آنجا که z به صورت درجه دو کوچک است می‌توانیم آن را در تحلیل مرتبه اول خود از حرکت افقی نادیده بگیریم. این همان ماهیت تقریب زاویه کوچک است؛ ما حرکت را به صورت کاملاً افقی تقریب می‌زنیم. بنابراین، با دقت بسیار بالا، فرض می‌کنیم.

$$z \approx 0 \tag{۵}$$

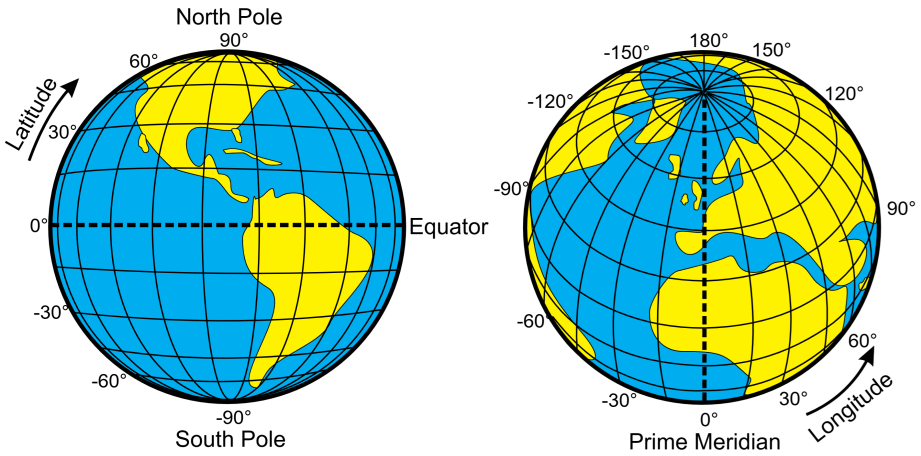
در نتیجه با این فرض، برای بردار موقعیت آونگ داریم:

$$\mathbf{r}_{rot} = (x, y, 0) \tag{۶}$$

تصور کنید شما روی یک چرخ و فلک در حال چرخش ایستاده‌اید و یک توپ را نسبت به سکوی آن به طور مستقیم به جلو می‌غلتانید. برای شما که روی چرخ و فلک ایستاده‌اید، به نظر می‌رسد توپ در یک خط مستقیم حرکت می‌کند. اما برای دوستی که روی زمین بیرون ایستاده است، مسیر توپ اصلاً مستقیم نیست. به نظر می‌رسد توپ منحنی حرکت می‌کند، زیرا حرکت توپ با حرکت چرخشی سکو ترکیب شده است.

این دقیقاً بیانگر رابطه بین دو دیدگاه مختلف از سرعت آونگ است. سرعت واقعی یا اینرسی، همانطور که از یک نقطه ثابت در فضا دیده می‌شود، فقط شامل سرعت نوسان رفت و برگشتی گلوله آونگ که ما می‌بینیم، نیست. این سرعت، ترکیبی از آن حرکت نوسانی به اضافه یک فشار جانبی اضافی است که صرفاً به دلیل چرخش زمین به زیر آونگ به آن وارد می‌شود. این فشار اضافی، همان اثر چرخش ناشی از حرکت وضعی زمین است. بنابراین، حرکت کلی در فضا، همان نوسان محلی است که ما مشاهده می‌کنیم، اما با چرخش ثابت سیاره اصلاح شده است. برای بردار سرعت خواهیم داشت:

$$\vec{v}_{in} = \vec{v}_{rot} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{rot} \tag{۷}$$



شکل ۳: عرض و طول جغرافیایی زمین

در عرض جغرافیایی λ، بردار چرخش زمین ω به سمت شمال در امتداد محور z اشاره می‌کند. در مختصات (x, y, z) (شرق، شمال، بالا)، مؤلفه‌های آن به این صورت است:

$$\vec{\omega} = (0, \omega \cos\lambda, \omega \sin\lambda) \tag{۸}$$

به این ترتیب بردارهای موقعیت و سرعت آونگ به صورت زیر هستند:

$$\vec{r}_{rot} = (x, y, 0), \quad \vec{v}_{rot} = (\dot{x}, \dot{y}, 0) \tag{۹}$$

اکنون به محاسبه سرعت دستگاه چرخان می‌پردازیم؛ با محاسبه $\vec{\omega} \times \vec{r}_{rot}$ داریم:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{rot} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega\cos\lambda & \omega\sin\lambda \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = (-\omega y \sin\lambda, \omega x \sin\lambda, -\omega x \cos\lambda) \tag{۱۰}$$

در نتیجه، بردار سرعتی که در لاگرانژین قرار خواهیم داد و حاصل در نظر گرفتن دستگاه چرخان است، برابر است با:

$$\vec{v}_{in} = (\dot{x} - \omega y \sin\lambda, \dot{y} + \omega x \sin\lambda, -\omega x \cos\lambda) \tag{۱۱}$$

بنابراین برای انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_{in}|^2 \tag{۱۲}$$

که با محاسبه بدست خواهیم آورد:

$$T = \frac{1}{2} m[(\dot{x} - \omega y \sin\lambda)^2 + (\dot{y} + \omega x \sin\lambda)^2 + (-\omega x \cos\lambda)^2] \tag{۱۳}$$

$$= \frac{1}{2} m[\dot{x}^2 - 2\dot{x}\omega y \sin\lambda + \omega^2 y^2 \sin^2\lambda + \dot{y}^2 + 2\dot{y}\omega x \sin\lambda + \omega^2 x^2 \sin^2\lambda + \omega^2 x^2 \cos^2\lambda] \tag{۱۴}$$

همچنین توجه شود که داریم:

$$\omega^2 x^2 \sin^2\lambda + \omega^2 x^2 \cos^2\lambda = \omega^2 x^2 \tag{۱۵}$$

به این ترتیب انرژی جنبشی به صورت زیر ساده‌سازی خواهد شد:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega \sin\lambda (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) \tag{۱۶}$$

جمله $m\omega \sin\lambda (x\dot{y} - y\dot{x})$ عبارت کوپلینگ کوریولیس است، و $\frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2)$ عبارت کوچک گریز از مرکز است. در ادامه درباره این دو جمله بیشتر توضیح خواهیم داد.

در ادامه برای جمله پتانسیل، انرژی پتانسیل ناشی از گرانش است، $U = mgz$، که در آن z ارتفاع گوی آونگ است. ما z را از معادله قیدی که پیش‌تر به دست آمد پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2lz \tag{۱۷}$$

حل دقیق معادله برای z پیچیده است، اما تحت تقریب زاویه کوچک ($x, y \ll l$)، عبارت z^2 در مقایسه با $2lz$ قابل صرفنظر است. بنابراین:

$$x^2 + y^2 \approx 2lz \implies z \approx \frac{x^2 + y^2}{2l} \tag{۱۸}$$

بنابراین انرژی پتانسیل برابر است با:

$$U = mgz = \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2) \tag{۱۹}$$

این، پتانسیل یک نوسان‌گر هارمونیک دو بعدی است که نتیجه استاندارد برای یک آونگ در حد زاویه کوچک می‌باشد. لاگرانژین برابر است با $L = T - U$. با جایگزینی عبارات مربوط به T و U:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega \sin\lambda(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) - \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2) \tag{۲۰}$$

ما می‌توانیم عبارت‌های درجه دوم x و y را ترکیب کنیم:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega \sin\lambda(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}m\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)(x^2 + y^2) \tag{۲۱}$$

از آنجا که ω^2 بسیار کوچک است ($\omega^2 \ll g/l$)، می‌توانیم سهم پتانسیل گریز از مرکز را با اطمینان نادیده بگیریم. علت این امر این است که زمین به آرامی دوران می‌کند. این فرض در نهایت لاگرانژین نهایی را به ما می‌دهد:

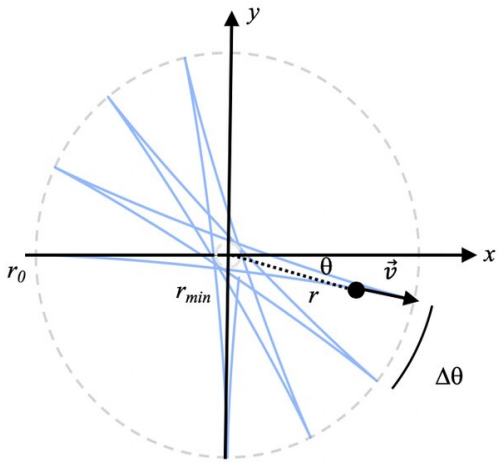
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega \sin\lambda(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2 + y^2) \tag{۲۲}$$

۴ مسیر حرکت

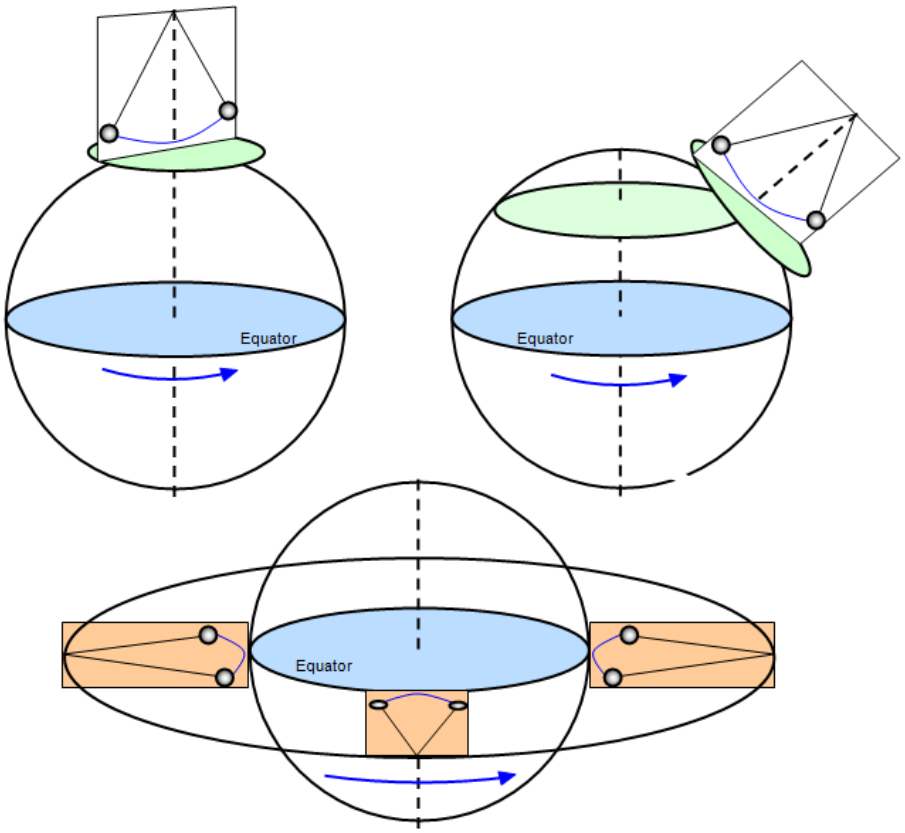
حرکت آونگ فوکو توسط یک کنش و واکنش جذاب بین دو نیروی بنیادی کنترل می‌شود. اول، نیروی آشنا و بازگرداننده گرانش وجود دارد. این نیرو مانند یک فنر عمل می‌کند و دائماً گوی نوسان کننده را به سمت نقطه مرکزی و ساکن خود می‌کشد و باعث نوسان آن می‌شود. اگر زمین نمی‌چرخید، این تنها نیرو بود و آونگ برای همیشه در یک صفحه ثابت به جلو و عقب نوسان می‌کرد.

با این حال، چون زمین در حال چرخش است، یک نیروی دوم و ظریف‌تر وارد می‌شود که نیروی کوریولیس است. این یک نیروی واقعی مانند گرانش نیست، بلکه یک نیروی ظاهری است که از مشاهده حرکت از روی یک سکو چرخان ناشی می‌شود. هنگامی که گوی آونگ با سرعت خود در حال نوسان است، زمین در زیر آن در حال چرخش است. از دیدگاه ما بر روی زمین، این ترکیب باعث می‌شود مسیر گوی منحرف به نظر برسد، گویی که همیشه در زاویه قائم نسبت به جهت حرکتش، به آرامی هل داده می‌شود.

کلید رفتار آونگ فوکو، ماهیت انباشتی این انحراف کوریولیس است. هر بار که گوی نوسان می‌کند، نیروی کوریولیس یک فشار کوچک و جانبی به آن وارد می‌کند. در طول نوسان‌های مکرر، این فشارهای کوچک جمع می‌شوند و باعث می‌شوند کل صفحه نوسان به آرامی و با ثبات بچرخد. سرعت این چرخش تصادفی نیست؛ این سرعت مستقیماً توسط عرض جغرافیایی تعیین می‌شود. در قطب شمال یا جنوب، این چرخش سریع‌ترین است و یک دایره کامل را در ۲۴ ساعت تکمیل می‌کند. در خط استوا، جایی که این اثر خنثی می‌شود، صفحه اصلاً نمی‌چرخد. در اصل، معادله حرکت این نوسان ظریف را توصیف می‌کند؛ کشش مستقیم گرانش که محرک نوسان است، که به طور مداوم و به صورت ظریف توسط نیروی ضعیف اما پایدار کوریولیس اصلاح می‌شود و جهت نوسان را در طول زمان هدایت می‌کند.



شکل ۴: الگوی حرکت آونگ فوکو



شکل ۵: حرکت آونگ فوکو در نقاط مختلف زمین