



دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)  
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

## تدریس یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی  
تدریس یار: امیرعلی عابدینی  
جلسه هفتم: کمیت پایسته سیستم  
نیم سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

### ۱ نوسانگر هماهنگ

ما با لاگرانژی شروع می کنیم که کمیتی بنیادی در مکانیک کلاسیک است و دینامیک یک سیستم را خلاصه می کند.

در مرحله بعد، کمیت جدیدی تعریف می شود که در اینجا با  $\epsilon$  نمایش داده می شود. این کمیت با انجام یک جمع خاص بر روی تمام درجات آزادی سیستم ساخته می شود. برای هر مؤلفه، مشتق جزئی لاگرانژی نسبت به یک سرعت تعمیم یافته را گرفته و سپس این مشتق را در خود سرعت ضرب می کنیم. پس از جمع کردن همه این حاصل ضرب های فردی، لاگرانژی اصلی را از حاصل جمع کلی کم می کنیم. این عمل، اطلاعات مربوط به حرکت سیستم را با مقدار خود لاگرانژی ترکیب می کند.

این کمیت فقط یک انتزاع ریاضی نیست؛ بلکه دارای معنای فیزیکی عمیقی است. در اکثر قریب به اتفاق سیستم های فیزیکی که در مکانیک کلاسیک با آن ها مواجه می شویم، که لاگرانژی اختلاف بین انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است، این کمیت اپسیلون را می توان به عنوان انرژی کل سیستم شناسایی کرد. به طور کلی تر، و تحت شرایط عمومی، این عبارت در واقع همان هامیلتونی سیستم است که اغلب، هرچند نه همیشه، نشان دهنده انرژی کل پایستار زمانی است که سیستم به طور صریح به زمان وابسته نباشد.

طبق تعریف داریم:

$$\epsilon = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L \quad (1)$$

برای درک ویژگی های آن، مشتق کل زمانی آن را محاسبه می کنیم. با اعمال مشتق بر روی کل عبارت، به دست

می آوریم:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{dL}{dt} \quad (2)$$

می توانیم جمله اول را با استفاده از قاعده ضرب بسط دهیم. همزمان، می توانیم مشتق کل زمانی لاگرانژی را با استفاده از قاعده زنجیره ای و با در نظر گرفتن وابستگی آن به مختصات، سرعت ها و زمان بیان کنیم:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right] - \left[ \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \right] \quad (3)$$

حال، معادلات اوایلر-لاگرانژ را در نظر می گیریم:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] - \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (4)$$

مشاهده می کنیم که دو مجموع یکسان هستند و بنابراین یکدیگر را به طور کامل حذف می کنند. این ساده سازی ما را به نتیجه نهایی می رساند:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (5)$$

این استخراج نشان می دهد که مشتق زمانی اپسیلون برابر با منفی مشتق جزئی لاگرانژی نسبت به زمان است. در نتیجه، اگر لاگرانژی به طور صریح به زمان وابسته نباشد، مشتق جزئی صفر است و بنابراین اپسیلون یک کمیت پایستار است، به این معنی که در طول زمان ثابت می ماند.

## ۲ نوسانگر هماهنگ ساده

برای لاگرانژی نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی بدون در نظر گرفتن اتلاف انرژی، داریم:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (1)$$

با در نظر گرفتن معادله اوایلر - لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}) = -kx \quad (3)$$

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

که این محاسبات را در گذشته انجام داده بودیم. اکنون برای بدست آوردن کمیت پایسته این سیستم می توان نوشت:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (5)$$

$$\varepsilon = (m\dot{x})\dot{x} - L = m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) \quad (6)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (7)$$

که مشاهده می شود که انرژی کل سیستم ثابت است:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

### ۳ نوسانگر هماهنگ ساده با اثر میرایی

در معادله اوایلر - لاگرانژ برای نوسانگر هماهنگ ساده، در گذشته دیدیم که اثر میرایی چگونه لحاظ می شود:

$$F = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 \quad (1)$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \quad (2)$$

به این ترتیب برای مشتقات جزئی می توان نوشت:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = c\dot{x} \quad (6)$$

در نتیجه، معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم به صورت زیر است:

$$m\ddot{x} + kx = -c\dot{x} \quad (7)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (8)$$

اکنون کمیت مد نظر را تشکیل می دهیم.

$$\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L \quad (9)$$

$$\varepsilon = (m\dot{x})\dot{x} - \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right] \quad (10)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (11)$$

در ادامه برای بررسی پایسته بودن آن، کافی است تغییرات آن را نسبت به زمان بررسی کنیم.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) \quad (12)$$

$$= m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} \quad (13)$$

$$= \dot{x}(m\ddot{x} + kx) \quad (14)$$

این محاسبات منجر به وضعیت زیر می شود:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{x}(-c\dot{x}) = -c\dot{x}^2 \quad (15)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2 \leq 0 \quad (16)$$

که مشاهده می شود انرژی سیستم به این صورت در حال کاهش است، زیرا اثرات میرایی در سیستم وجود دارد. نرخ کاهش انرژی با مجذور سرعت متناسب است و کمیت پایسته برای این سیستم به این فرم وجود ندارد. به بیان دیگر، این سیستم اتلافی است و انرژی مکانیکی به مواردی من جمله گرما تبدیل می شود.

#### ۴ ذره در پتانسیل مرکزی

برای لاگرانژی یک ذره در پتانسیل مرکزی، دیدیم که اگر آن را در دستگاه مختصات قطبی توصیف کنیم، داریم:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \quad (1)$$

برای مختصه تعمیم یافته  $r$  می توان نوشت:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\dot{r}\dot{\theta}^2 - V'(r) \quad (3)$$

$$m\ddot{r} - m\dot{r}\dot{\theta}^2 + V'(r) = 0 \quad (4)$$

به طور مشابه، برای مختصه تعمیم یافته دیگر یا همان  $\theta$  داریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = \ell \quad (6)$$

به این ترتیب برای کمیت پایسته، داریم:

$$\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L \quad (7)$$

$$= (m\dot{r})\dot{r} + (mr^2\dot{\theta})\dot{\theta} - \left[ \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \right] \quad (8)$$

$$= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) \quad (9)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) \quad (10)$$

نتیجه نهایی این ساده سازی، عبارتی واضح و با اهمیت فیزیکی است. کمیت اپسیلون اکنون به عنوان مجموع انرژی جنبشی شعاعی، انرژی جنبشی دورانی و انرژی پتانسیل آشکار می شود. این عبارت دقیقاً برابر با کل انرژی مکانیکی سیستم است. پایستگی این کمیت را می توان از یک استخراج کلی پیشین درک کرد که نشان می داد مشتق کل زمانی اپسیلون برابر با منفی مشتق جزئی لاگرانژی نسبت به زمان است. در این سیستم، انرژی پتانسیل فقط به مختصات شعاعی وابسته است و جمله های انرژی جنبشی وابستگی صریحی به زمان ندارند؛ در نتیجه، لاگرانژی به طور صریح به زمان وابسته نیست. بنابراین، مشتق جزئی نسبت به زمان صفر است و انرژی کل اپسیلون پایستار می ماند، یعنی در طول حرکت سیستم ثابت باقی می ماند.

## ۵ ذره باردار در میدان الکترومغناطیسی

این لاگرانژی، فیزیک ذره ی باردار را مانند یک الکترون در تعامل با یک میدان الکترومغناطیس را توصیف می کند. بخش اول مربوط به انرژی جنبشی ذره است که نشان دهنده انرژی ناشی از حرکت آن به دلیل لختی محض است. بخش دوم، انرژی پتانسیل الکتریکی ذره را نشان می دهد که از موقعیت آن در یک میدان الکتریکی ناشی می شود؛ این مولفه تعیین می کند که ذره چگونه در امتداد خطوط میدان الکتریکی به حرکت در می آید. بخش آخر و در عین حال پیچیده تر، اثر میدان مغناطیسی را توصیف می کند. برخلاف یک نیروی ساده، این تعامل مغناطیسی هم به موقعیت و هم به سرعت ذره وابسته است و باعث ایجاد مسیر خمیده مشخص یک ذره باردار در حین حرکت در یک میدان مغناطیسی می شود. به طور شگفت انگیزی، این عبارت لاگرانژی واحد، این سه اثر فیزیکی متمایز لختی، نیروی الکتریکی و نیروی مغناطیسی را به شکلی یکپارچه در قالب یک چارچوب ترکیب می کند که به طور کامل رفتار ذره را مطابق با قوانین الکترومغناطیس پیش بینی می کند.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi(\mathbf{r}) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

با در نظر گرفتن حرکت ذره در جهت  $x$  داریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (۲)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x} + qA_x) = -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x} \quad (۳)$$

در نتیجه برای کمیت پایسته خواهیم داشت:

$$\varepsilon = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L \quad (۴)$$

$$= \sum_i (m\dot{x}_i + qA_i) \dot{x}_i - \left[ \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \right] \quad (۵)$$

$$= m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + q\phi - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \quad (۶)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + q\phi(\mathbf{r}) \quad (۷)$$

به این ترتیب اگر میدان الکتریکی مستقل زمانی باشد، پتانسیل آن تنها به مکان وابسته است و کمیت پایسته خواهد بود.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (۸)$$

## ۶ ذره باردار در میدان الکتریکی متغیر زمانی

یک ذره باردار  $q$  را در یک میدان الکتریکی متغیر زمانی به صورت زیر در یک بعد در نظر بگیرید:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad (۱)$$

پتانسیل اسکالر به صورت زیر خواهد بود:

$$\phi(x, t) = -E_0 x \cos(\omega t) \quad (۲)$$

به این ترتیب برای لاگرانژی آن خواهیم داشت:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - q\phi(x, t) \quad (۳)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + qE_0 x \cos(\omega t) \quad (۴)$$

از معادله اوایلر - لاگرانژ، داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = qE_0 \cos(\omega t) \quad (7)$$

که نتیجه نهایی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$m\ddot{x} = qE_0 \cos(\omega t) \quad (8)$$

حال، برا کمیت پایسته محاسبات را انجام می دهیم:

$$\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L \quad (9)$$

$$\varepsilon = (m\dot{x})\dot{x} - \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + qE_0x \cos(\omega t) \right] \quad (10)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - qE_0x \cos(\omega t) \quad (11)$$

با بررسی مشتق زمانی، بدست می آید:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -qE_0x\omega \sin(\omega t) \quad (13)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = qE_0x\omega \sin(\omega t) \quad (14)$$

این کمیت اپسیلون ظاهراً شبیه به عبارت ساده‌ای برای انرژی جنبشی منهای پتانسیل به نظر می‌رسد. با این حال، درک این نکته حیاتی است که این مقدار، بیانگر انرژی کل واقعی سیستم نیست. در این فرمالیسم، انرژی کل یک مقدار ثابت نیست و در طول زمان تغییر می‌کند. دلیل این امر آن است که میدان نوسانی خارجی به طور مداوم بر ذره باردار کار انجام می‌دهد و به طور فعال انرژی را به درون سیستم تزریق کرده و سپس دوباره آن را خارج می‌سازد. یک مثال فیزیکی متداول برای این پدیده، الکترونی است که بین صفحات یک خازن با ولتاژ متناوب و سریع به دام افتاده، یا هر ذره باردار دیگری که توسط یک میدان الکتریکی با فرکانس رادیویی به حرکت درمی‌آید.

## ۲ لاگرانژی وابسته به زمان

لاگرانژی یک سیستم به صورت زیر داده شده است:

$$L = \frac{1}{2}me^{\alpha t}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}ke^{-\alpha t}x^2 \quad (1)$$

اکنون با استفاده از معادله اوایلر - لاگرانژ، داریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (۲)$$

$$\frac{d}{dt}(me^{\alpha t}\dot{x}) = -ke^{-\alpha t}x \quad (۳)$$

$$m\alpha e^{\alpha t}\dot{x} + me^{\alpha t}\ddot{x} + ke^{-\alpha t}x = 0 \quad (۴)$$

به این ترتیب، برای کمیت پایسته می توان نوشت:

$$\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L = (me^{\alpha t}\dot{x})\dot{x} - \left[ \frac{1}{2}me^{\alpha t}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}ke^{-\alpha t}x^2 \right] \quad (۵)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}me^{\alpha t}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ke^{-\alpha t}x^2 \quad (۶)$$

که در این سیستم، تغییرات زمانی کمیت برابر با صفر نیست، پس پایستگی وجود ندارد.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 \quad (۷)$$

## ۸ مهره روی حلقه چرخان

با در نظر گرفتن یک مهره روی حلقه چرخان، برای لاگرانژی آن داریم:

$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta \quad (۱)$$

از معادله اوایلر - لاگرانژ می توان نوشت:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (۲)$$

$$\frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}) = mR^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta \quad (۳)$$

$$\ddot{\theta} = \sin \theta \left( \omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \quad (۴)$$

اکنون به بررسی کمیت مد نظر می پردازیم:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \quad (۵)$$

$$\varepsilon = (mR^2\dot{\theta})\dot{\theta} - L \quad (۶)$$

$$= mR^2\dot{\theta}^2 - \left[ \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta \right] \quad (۷)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta - mgR \cos \theta \quad (۸)$$

که کمیت پایسته است، زیرا:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

نکته بسیار مهم این است که برای مهره‌ای که روی یک حلقه چرخان عمودی می‌لغزد، کمیت اپسیلون یک مقدار پایسته است، اما این مقدار معادل انرژی مکانیکی کل مهره نیست. در حالی که انرژی کل می‌بایست تمامی انرژی جنبشی، از جمله انرژی ناشی از چرخش اجباری حلقه را در نظر بگیرد، اپسیلون ترکیب متفاوتی از حرکت و موقعیت مهره را نمایندگی می‌کند. این کمیت به طور مؤثری سرعت نسبی مهره در امتداد حلقه را از انرژی جنبشی که توسط موتور خارجی چرخاننده حلقه اعمال می‌شود، جدا می‌سازد. از آنجا که حلقه با نرخ ثابتی می‌چرخد، قوانین حاکم بر سیستم با زمان تغییر نمی‌کنند و این امر تضمین می‌کند که این کمیت خاص، اپسیلون، در طول حرکت ثابت باقی بماند، حتی اگر انرژی کل به دلیل کار انجام شده توسط نیروهای قید که چرخش را حفظ می‌کنند، در نوسان باشد.