



دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس یار: امیرعلی عابدینی
جلسه ششم: معادله اوایلر - لاگرانژ
نیم سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

۱ نوسانگر هماهنگ

دیدیم که برای لاگرانژی نوسانگر هماهنگ داریم:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (۱)$$

همچنین معادله اوایلر - لاگرانژ به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (۲)$$

اکنون با قرار دادن لاگرانژی رابطه (۱) در معادله اوایلر - لاگرانژ، برای مشتقات جزئی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (۳)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} \quad (۴)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad (۵)$$

نتیجه جایگذاری، یک معادله دیفرانسیل توصیف کننده حرکت سیستم است.

$$m\ddot{x} = -kx \quad (۶)$$

با باز نویسی خواهیم داشت:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (۷)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (۸)$$

با تعریف فرکانس زاویه‌ای به صورت $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ به فرم نهایی می‌رسیم.

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \quad (۹)$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی همگن است. با تشکیل معادله مشخصه و حل آن، پاسخ بدست می‌آید. با فرض پاسخ به صورت یک تابع نمایی، خواهیم داشت:

$$\dot{x} = re^{rt}, \quad \ddot{x} = r^2 e^{rt} \quad (۱۰)$$

$$r^2 e^{rt} + \omega^2 e^{rt} = 0 \quad (۱۱)$$

$$e^{rt}(r^2 + \omega^2) = 0 \quad (۱۲)$$

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i\omega \quad (۱۳)$$

پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل برابر است با:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (۱۴)$$

با استفاده از فرمول اویلر، پاسخ معادله را به یک پاسخ حقیقی تبدیل می‌کنیم.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (۱۵)$$

$$\rightarrow x(t) = A [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] + B [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] \quad (۱۶)$$

$$x(t) = (A + B) \cos(\omega t) + i(A - B) \sin(\omega t) \quad (۱۷)$$

با باز تعریف ضرایب به صورت $C_1 = A + B$ و $C_2 = i(A - B)$ ، پاسخ حقیقی برابر است با:

$$\boxed{x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)} \quad (۱۸)$$

که اگر مایل باشید، معادله (۱۸) را می‌توان به فرم دامنه - فاز باز نویسی کرد.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (۱۹)$$

به طوری که $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ دامنه و $\phi = -\arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$ فاز است.

۲ نوسانگر هماهنگ میرا

برای یک نوسانگر میرا (با اثر میرایی ناشی از عواملی مانند مقاومت هوا) داریم:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (۱)$$

که به طور مشابه، لاگرانژین آن به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (2)$$

برای یک نیرو با اثر میرایی، از تابع اتلاف رایلی داریم:

$$F_d = -c\dot{x} \quad (3)$$

$$\rightarrow \mathcal{F} = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 \quad (4)$$

به این ترتیب برای لحاظ کردن اثرات اتلافی در سیستم، معادله اوایلر - لاگرانژ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \quad (5)$$

که جزئیات این روابط در آینده بررسی خواهند شد.

با محاسبه مشتقات جزئی، داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} = c\dot{x} \quad (7)$$

با جایگذاری در معادله اوایلر - لاگرانژ بدست خواهد آمد:

$$m\ddot{x} - (-kx) = -c\dot{x} \quad (8)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (9)$$

تغییر متغیر زیر را در نظر بگیریم:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{c}{2m} \quad (10)$$

به طوری که ω_0 فرکانس طبیعی نوسان و γ ضریب میرایی است. به این ترتیب معادله دیفرانسیل نهایی برابر است با:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (11)$$

حال به طور مشابه معادله دیفرانسیل را حل می کنیم تا حرکت سیستم توصیف شود.

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad (12)$$

$$r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (13)$$

از پاسخ معادله مشخصه، واضح است که حرکت سیستم به $\Delta = \gamma^2 - \omega_0^2$ بستگی خواهد داشت. لازم است که این بررسی به ازاء سه حالت مختلف برای Δ بررسی شود تا وضعیت نهایی سیستم مشخص شود.

۳ آونگ صفحه‌ای

دیدیم که برای لاگرانژی یک آونگ صفحه‌ای، داشتیم:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \quad (۱)$$

و از معادله اویلر لاگرانژ می‌دانیم:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (۲)$$

محاسبه مشتقات جزئی خواهد داد:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad (۳)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta} \quad (۴)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \quad (۵)$$

در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$ml^2\ddot{\theta} - (-mgl \sin \theta) = 0 \quad (۶)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \quad (۷)$$

با ساده‌سازی، معادله حرکت بدست می‌آید:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (۸)$$

۴ معادلات ایکونال

معادله ایکونال به عنوان یک پایه اساسی در اپتیک هندسی عمل می‌کند و پلی قدرتمند بین اپتیک موجی و اپتیک هندسی برقرار می‌سازد. این معادله چگونگی انتشار پرتوهای نور در یک محیط را با تقلیل دادن رفتار پیچیده موج به مسیرهای پرتوهای منفرد توصیف می‌کند. اصل کلیدی در اینجا آن است که این پرتوها همیشه در جهت عمود بر جبهه‌موج‌ها، که سطوحی با فاز ثابت هستند، حرکت می‌کنند. تغییرات مکانی ضریب شکست محیط، انحنای مسیر این پرتوها را تعیین کرده و نور را به سمت مناطق با چگالی نوری بالاتر خم می‌کند. این چارچوب برای طراحی و تحلیل سیستم‌های نوری مانند لنزها و آینه‌ها ضروری است، زیرا امکان پیش‌بینی دقیق مسیرهای نور را بدون نیاز به حل معادلات کامل الکترومغناطیسی موج فراهم می‌آورد و درک ما از تشکیل تصویر، فوکوس و ابیراهی‌ها را ساده می‌سازد.

اکنون، مسئله را به این صورت در نظر می‌گیریم که محیطی با ضریب شکست غیرهمگن $n(r)$ داریم و می‌خواهیم مسیر حرکت نور را پیش‌بینی کنیم. از اصل فرما بین دو نقطه A و B برای مسیر حرکت داریم:

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0 \quad (۱)$$

به طوری که ds مسیر نوری است. با در نظر گرفتن تقریب پیرامحوری، داریم:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 \ll 1 \quad (۲)$$

در نتیجه، برای مسیر نوری بدست می آید:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} \quad (۳)$$

در این وضعیت، z متغیر مستقل است و می توان مشتقات نسبت به متغیر اصلی را به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dz}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dz} \quad (۴)$$

در نتیجه رابطه (۳) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$ds = \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} dz \quad (۵)$$

با در نظر گرفتن شرایط ایجاد شده از رابطه (۲)، می توان از بسط دو جمله ای برای مسیر نوری استفاده کرد:

$$\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \approx 1 + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (۶)$$

به این ترتیب، انتگرال ده را بازنویسی می کنیم:

$$n ds \approx n(x, y, z) \left[1 + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] dz \quad (۷)$$

خواهیم داشت:

$$\delta \int_{z_A}^{z_B} n(x, y, z) \left[1 + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] dz = 0 \quad (۸)$$

با توجه به وردش رابطه (۸)، می توان مشاهده کرد که:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, z) = n(x, y, z) \left[1 + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] \quad (۹)$$

اکنون معادله اوایلر - لاگرانژ را برای متغیر مستقل z می نویسیم.

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (۱۰)$$

توجه شود که مختصات تعمیم یافته شامل $x(z)$ و $y(z)$ است. اکنون، مشتقات جزئی برای x را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = n \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x} \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (12)$$

$$\frac{d}{dz} \left(n \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (13)$$

مشتقات جزئی y هم به صورت مشابه محاسبه خواهند شد. توجه شود که به دلیل تقریب پیرامحوری، داریم:

$$\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \approx 1 \quad (14)$$

در نتیجه، معادله اوایلر - لاگرانژ به وضعیت زیر منجر خواهد شد:

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{dx}{dz} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} \quad (15)$$

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{dy}{dz} \right) = \frac{\partial n}{\partial y} \quad (16)$$

معادلات ایکونال توصیف می کنند که چگونه پرتوهای نور مانند ذراتی رفتار می کنند که توسط گرادیانهای ضریب شکست به جلو رانده می شوند. تصور کنید نوری در محیطی حرکت می کند که چگالی نوری آن به تدریج در یک جهت، مثلاً به سمت راست، افزایش می یابد. معادلات ایکونال به ما می گویند که پرتو نور به طور پیوسته به سمت این منطقه چگال تر خم خواهد شد. این اتفاق می افتد زیرا «تکانه نوری» پرتو در پاسخ به گرادیان ضریب شکست تغییر می کند و نور را به سمت مسیر خاصی هدایت می کند. در اصل، محیط یک نیروی ملایم و پیوسته بر نور وارد می کند و آن را به سمت ضریب شکست بالاتر می کشد، تقریباً مشابه اینکه گراشی چگونه اجسام را به سمت پایین می کشد. این خمش تضمین می کند که نور کارآمدترین مسیر از نظر زمانی را در محیط متغیر طی می کند.