دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس‌یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس‌یار: امیرعلی عابدینی

جلسه پنجم: لاگرانژی سیستم

نیم‌سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

---

۱ نوسانگر هماهنگ

برای یک نوسانگر هماهنگ ساده دیدیم که اجزای اصلی یک سیستم فیزیکی ساده به صورت یک جرم متصل به یک فنر را توصیف می‌کند. عبارت اول یا همان T، نشان‌دهنده انرژی جنبشی سیستم است. این انرژیِ حرکت است که به جرم جسم و سرعت حرکت آن بستگی دارد.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{۱}$$

عبارت دوم یا V، نشان‌دهنده انرژی پتانسیل است. این انرژی در فنر وقتی که از حالت استراحت طبیعی خود کشیده یا فشرده می‌شود، ذخیره می‌شود. هر چه فنر سفت‌تر باشد، انرژی پتانسیل بیشتری برای یک جابجایی مشخص در خود ذخیره می‌کند.

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \tag{۲}$$

در نهایت، $\mathcal{L}$ که لاگرانژین نام دارد، به عنوان تفاوت انرژی جنبشی منهای انرژی پتانسیل تعریف می‌شود. در آینده خواهیم دید که با اعمال یک قانون خاص (معادله اویلر-لاگرانژ) بر روی لاگرانژین، می‌توانیم معادله حرکت جرم را استخراج کنیم. این معادله، حرکت نوسانی و رفت و برگشتی جرم روی فنر را به طور کامل پیش‌بینی می‌کند.

$$\mathcal{L} = T - V \tag{۳}$$

۲ آونگ صفحه‌ای

یک آونگ صفحه‌ای ساده، از یک جرم نقطه‌ای تشکیل شده که به انتهای یک میله صلب و بدون جرم متصل است. این سیستم طوری محدود شده که فقط در یک صفحه قائم میتواند نوسان کند. مناسب‌ترین مختصات برای

توصیف این حرکت، زاویه بین میله و خط قائم است. چون طول میله ثابت است، این سیستم تنها یک درجه آزادی دارد. به این ترتیب برای مختصات تعمیم‌یافته یافته داریم:

$$q = \theta \tag{۱}$$

در ادامه، با توجه به مختصات و بازتعریف مختصات کارتزین برحسب مختصات تعمیم‌یافته، به محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل می‌پردازیم.

$$x = l\sin\theta \tag{۲}$$

$$y = -l\cos\theta \tag{۳}$$

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \tag{۴}$$

$$\dot{y} = l\dot{\theta}\sin\theta \tag{۵}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2 \tag{۶}$$

$$v^2 = l^2\dot{\theta}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = l^2\dot{\theta}^2 \tag{۷}$$

پس برای انرژی جنبشی داریم:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{۸}$$

و انرژی پتانسیل نیز برابر خواهد شد با:

$$U = mgy = mg(-l\cos\theta) = -mgl\cos\theta \tag{۹}$$

می‌توان دید که لاگرانژین آونگ صفحه‌ای برابر است با یک جمله وابسته به مجذور سرعت زاویه‌ای به علاوه یک جمله وابسته به کسینوس زاویه.

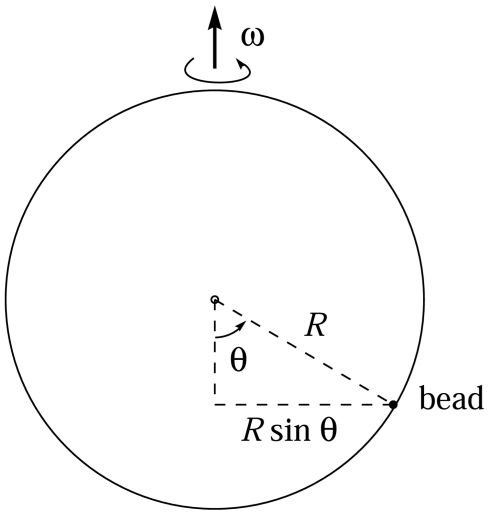
$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - (-mgl\cos\theta) \tag{۱۰}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \tag{۱۱}$$

۳ مهره روی حلقه چرخان

سیستم مورد نظر یک حلقه سفت و سخت و دایره‌ای شکل است که با سرعت زاویه‌ای ثابت حول یک محور قائم که از مرکز آن می‌گذرد، در حال چرخش است. یک مهره کوچک می‌تواند بدون اصطکاک روی این حلقه بلغزد. برای توصیف موقعیت مهره، مناسب‌ترین مختصات، زاویه‌ای است که از خط شاغول (پایینترین نقطه حلقه) اندازه‌گیری می‌شود. این زاویه تنها درجه آزادی سیستم را مشخص می‌کند.

توجه شود که سرعت زاویه‌ای ثابت چرخش حلقه، یک پارامتر از پیش تعیین‌شده برای سیستم است و نه یک مختصات متغیر.



شکل ۱: مهره روی حلقه چرخان

برای مختصات مهره داریم:

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t = -R \sin \theta \sin \omega t \quad (۱)$$

$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t = R \sin \theta \cos \omega t \quad (۲)$$

$$z = z' = R \cos \theta \quad (۳)$$

در نتیجه، سرعت مهره برابر است با:

$$\dot{x} = -R(\dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t + \omega \sin \theta \cos \omega t) \quad (۴)$$

$$\dot{y} = R(\dot{\theta} \cos \theta \cos \omega t - \omega \sin \theta \sin \omega t) \quad (۵)$$

$$\dot{z} = -R\dot{\theta} \sin \theta \quad (۶)$$

برای محاسبه انرژی جنبشی، از یک دستگاه مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در این دستگاه، فاصله مهره از مرکز ثابت و برابر با شعاع حلقه است. یکی از زاویه‌ها، موقعیت مهره روی حلقه را نشان می‌دهد و زاویه دیگر، با سرعت ثابت، متناسب با چرخش حلقه تغییر می‌کند.

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta, \dot{\phi}^2) \quad (۷)$$

$$r = R \quad (۸)$$

$$\dot{r} = 0 \quad (۹)$$

$$\dot{\phi} = \omega \quad (۱۰)$$

$$T = \frac{1}{2} m(0 + R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta, \omega^2) \quad (۱۱)$$

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2 \theta \quad (۱۲)$$

انرژی جنبشی مهره از دو بخش کاملاً مجزا تشکیل شده است؛ یکی بخشی که ناشی از حرکت خود مهره در امتداد حلقه است و دیگری بخشی که ناشی از حرکت دورانی اجباری مهره به‌دلیل چرخش خود حلقه است.

انرژی پتانسیل سیستم، از نوع انرژی پتانسیل گرانشی است. سطح مرجع برای انرژی صفر را در راستای افقی مرکز حلقه در نظر می‌گیریم. ارتفاع مهره نسبت به این نقطه مرجع، با استفاده از زاویه موقعیت مهره و شعاع حلقه تعیین می‌شود. هنگامی که مهره در پایین‌ترین نقطه حلقه قرار دارد، انرژی پتانسیل آن کمینه است و با حرکت مهره به سمت بالا، این انرژی افزایش می‌یابد. در نهایت، انرژی پتانسیل به سادگی بر حسب جرم مهره، شتاب گرانش و موقعیت زاویه‌ای آن بیان می‌شود.

$$U = mgz \tag{۱۳}$$

$$z = -R\cos\theta \tag{۱۴}$$

$$U = mg(-R\cos\theta) = -mgR\cos\theta \tag{۱۵}$$

لاگرانژین این سیستم از سه جمله تشکیل شده است؛ یک جمله که نمایانگر انرژی جنبشی حرکت مهره در امتداد حلقه است و به سرعت زاویه‌ای آن وابسته است. جمله دوم که نمایانگر بخشی از انرژی جنبشی ناشی از چرخش کل حلقه است و به سرعت چرخش حلقه و موقعیت مهره بستگی دارد. جمله سوم که نمایانگر انرژی پتانسیل گرانشی مهره است و به موقعیت زاویه‌ای آن وابسته است.

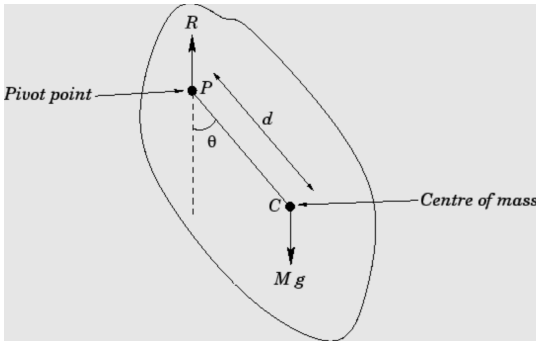
$$\mathcal{L} = T - U \tag{۱۶}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta \tag{۱۷}$$

۴ آونگ مرکب

یک آونگ مرکب، که به آن آونگ فیزیکی نیز گفته می‌شود، یک جسم صلب با جرم معین است که حول یک نقطه تکیه‌گاه ثابت می‌چرخد. نکته کلیدی این است که این نقطه تکیه‌گاه بر روی مرکز جرم جسم قرار ندارد. این آونگ در یک صفحه قائم تحت تأثیر نیروی گرانش نوسان می‌کند.

منطقی‌ترین انتخاب برای مختصات تعمیم‌یافته، زاویه‌ای است که خط واصل بین نقطه تکیه‌گاه و مرکز جرم، با راستای قائم می‌سازد. این زاویه را با نماد θ نشان می‌دهیم.



شکل ۲: آونگ مرکب

انرژی جنبشی یک جسم صلب که حول یک نقطه ثابت می‌چرخد را می‌توان با استفاده از ممان اینرسی حول همان نقطه تکیه‌گاه محاسبه کرد. بر اساس قضیه محورهای موازی، ممان اینرسی حول نقطه تکیه‌گاه برابر است با مجموع ممان اینرسی حول مرکز جرم به اضافه حاصل‌ضرب جرم کل در مربع فاصله بین مرکز جرم و نقطه تکیه‌گاه. انرژی جنبشی برای یک جسم صلب در حال چرخش، برابر است با نصف حاصل‌ضرب ممان اینرسی در مربع سرعت زاویه‌ای. در این مورد، سرعت زاویه‌ای همان مشتق زمانی زاویه تتا است. در نتیجه، انرژی جنبشی سیستم به صورت رابطه‌ای بر حسب ممان اینرسی حول تکیه‌گاه و مربع سرعت زاویه‌ای به دست می‌آید.

$$I_o = I_{cm} + md^2 \tag{۱}$$

$$T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + md^2)\dot{\theta}^2 \tag{۲}$$

یک نقطه مرجع برای انرژی پتانسیل گرانشی انتخاب می‌کنیم. مناسب‌ترین انتخاب، قرار دادن سطح انرژی پتانسیل صفر در ارتفاع نقطه تکیه‌گاه است. موقعیت مرکز جرم نسبت به نقطه تکیه‌گاه با استفاده از زاویه تتا تعیین می‌شود. هنگامی که آونگ در حالت قائم قرار دارد، مرکز جرم در پایین‌ترین نقطه خود نسبت به تکیه‌گاه است. با تغییر زاویه، ارتفاع مرکز جرم نسبت به تکیه‌گاه با تابع کسینوس تتا متناسب است. بنابراین، انرژی پتانسیل گرانشی جسم برابر است با حاصل‌ضرب جرم کل در شتاب گرانش و در ارتفاع مرکز جرم نسبت به نقطه مرجع. علامت این عبارت منفی است، که نشان می‌دهد انرژی پتانسیل هنگامی که آونگ در وضعیت تعادل پایدار خود است، کمینه می‌شود.

$$V = -mgd\cos\theta \tag{۳}$$

با جایگزینی عبارات به دست آمده برای انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در این تعریف، عبارت نهایی برای لاگرانژین آونگ مرکب حاصل می‌شود.

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(I_{cm} + md^2)\dot{\theta}^2 + mgd\cos\theta \tag{۴}$$

که با در نظر گرفتن لختی دوران برای این هندسه، کافی است $I = \frac{1}{3}Ml^2$ را جایگذاری کنیم.