دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس‌یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس‌یار: امیرعلی عابدینی

جلسه چهارم: بررسی انواع نوسان

نیم‌سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

---

۱ تحلیل حرکت ذره در پتانسیل مرکزی

تحلیل حرکت ذره تحت نیروهای مرکزی، پایه درک مکانیک سماوی و سیستم‌های اتمی است. می‌خواهیم دینامیک ذره در پتانسیل $\frac{1}{r}$ را بررسی کرده و مدار آن را بر اساس انرژی کل مشخص می‌کنیم. پتانسیل به صورت زیر تعریف شده است:

$$E = \frac{1}{r}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

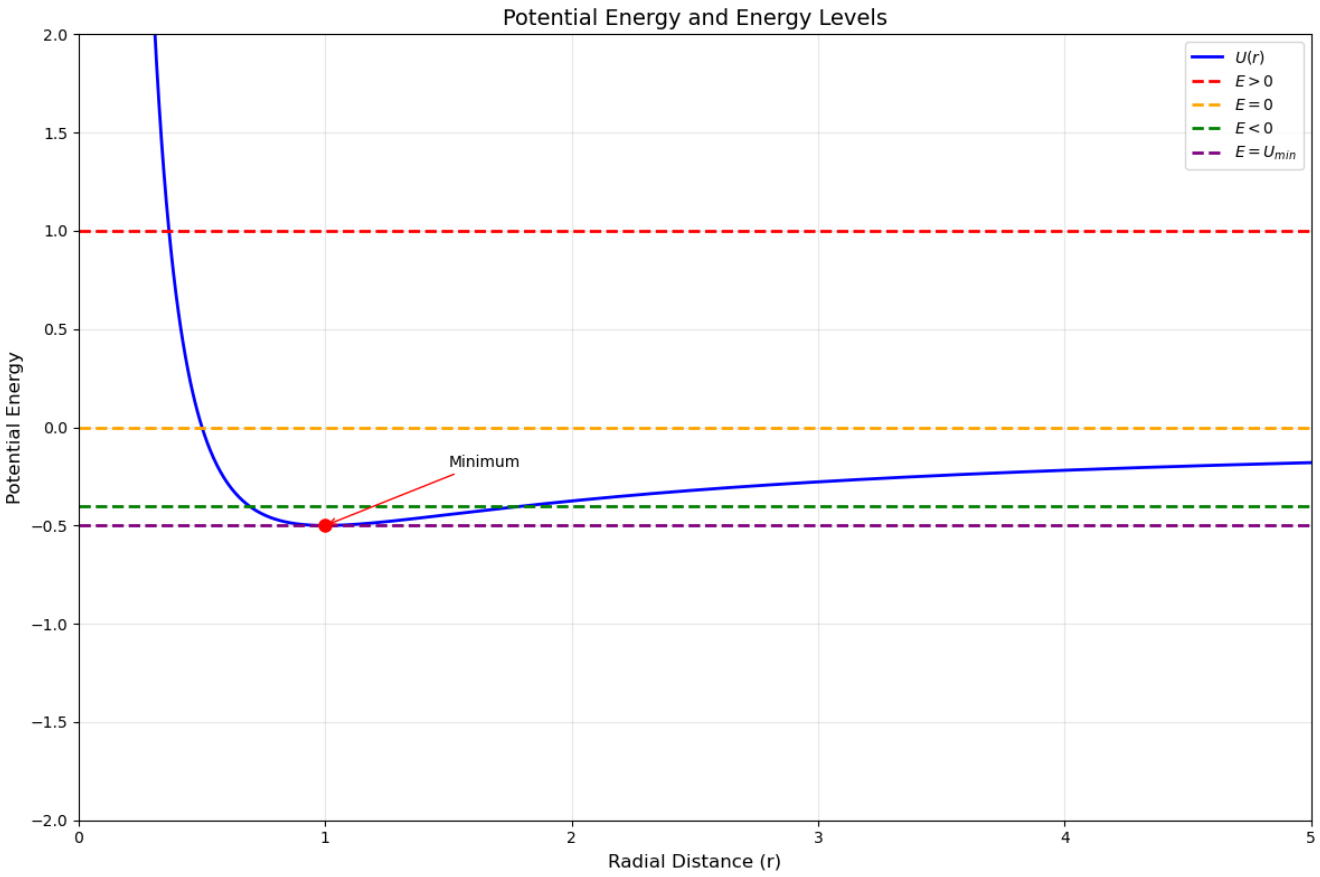
شکل این پتانسیل در شکل ۱ قرار گرفته است. اکنون می‌توان برای هر کدام از حالت‌های سطح انرژی، حرکت ذره را تحلیل کرد.

در وضعیت $E > 0$، ذره انرژی بیشتری از آنچه نیاز دارد را دارد تا آزاد باشد. از فاصله دور به مرکز نزدیک می‌شود، یک بار دور آن می‌چرخد (مانند دنباله‌داری که از کنار خورشید می‌گذرد) و سپس به بینهایت فرار می‌کند و هرگز بازنمی‌گردد. مسیر آن یک منحنی باز به نام هذلولی است.

در وضعیت $E = 0$، این دقیقاً حداقل انرژی مورد نیاز برای فرار ذره است. از بینهایت می‌آید، از کنار مرکز می‌گذرد و به سختی به بینهایت بازمی‌گردد، جایی که سرعتش تا صفر کاهش می‌یابد. مسیر آن یک سهمی است که مرز بین مدارهای مقید و آزاد است.

حالت $E < 0$ نیز شرایطی است که ذره در دام افتاده است زیرا انرژی کافی برای فرار ندارد. به طور پیوسته حول مرکز می‌چرخد و بین نزدیک‌ترین و دورترین نقطه در نوسان است، مانند یک سیاره که به دور خورشید می‌گردد. مسیر آن یک بیضی بسته است.

در حالت پایانی، یعنی $E = E_{min}$ تعادل کامل را داریم، به طوری که این یک حالت خاص و کاملاً پایدار از مدار مقید است. ذره روی یک دایره کامل و با فاصله‌ای ثابت حرکت می‌کند. به دلیل تعادل کامل بین نیروهای به داخل و خارج، هیچ‌گاه نزدیک‌تر یا دورتر نمی‌شود.



شکل ۱: منحنی پتانسیل

۲ محاسبه اندازه سرعت در دستگاه مختصات کروی

مختصات کروی (r, θ, ϕ) با مختصات کارتزین رابطه زیر را دارد:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

به طوری که بردارهای یکه آن به صورت زیر هستند:

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}$$

برای بردار سرعت نیز $\vec{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$ برقرار است، پس:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\hat{\mathbf{r}}) = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} \tag{۱}$$

با استفاده از قاعده زنجیری برای $\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}/\mathrm{d}t$ داریم:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\dot{\phi} \tag{۲}$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\phi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} = \vec{\theta} \quad (۳)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin\theta\sin\phi\,\vec{i} + \sin\theta\cos\phi\,\vec{j} = \sin\theta\,\vec{\phi} \quad (۴)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{r} + r\left(\dot{\theta}\,\vec{\theta} + \sin\theta\,\dot{\phi}\,\vec{\phi}\right) \quad (۵)$$

به این ترتیب برای بردار سرعت داریم:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{\theta} + r\,\sin\theta\,\dot{\phi}\,\vec{\phi}} \quad (۶)$$

و برای اندازه آن خواهیم داشت:

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2}} \quad (۷)$$

۳ بررسی نوسان ذره به ازاء انحراف‌های کوچک

می‌خواهیم وضعیت نیروی وارد بر ذره را به دلیل انحراف‌های کوچک حول نقاط اکسترمم بررسی کنیم. ابتدا توجه کنیم که به دلیل کوچک بودن انحراف‌ها، می‌توان برای تحلیل آن از بسط تیلور استفاده کرد. بسط تیلور به صورت زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

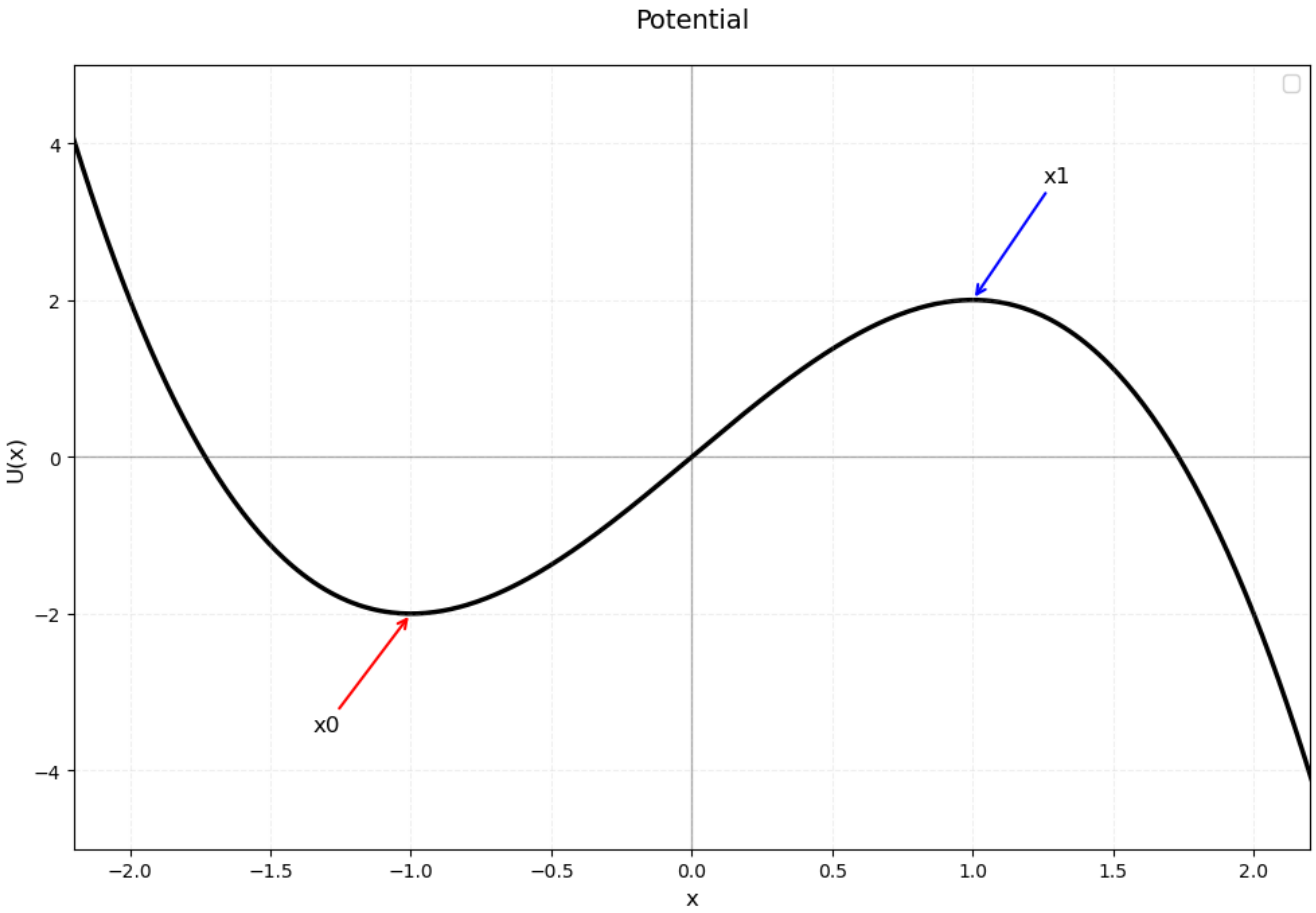
که برای تابع $V(x)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x-x_0) + \frac{V''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{V'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots \quad (۱)$$

توجه شود که در نقاط اکسترمم تابع، مشتق اول برابر با صفر است. به این ترتیب با فرض غیرصفر بودن مشتق دوم، می‌توان از باقی جملات (شامل مشتق مرتبه سوم و مراتب بالاتر) صرف نظر کرد.

$$V'(x_0) = 0, V''(x_0) \neq 0 \rightarrow V(x) = V(x_0) + \frac{V''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \quad (۲)$$

شکل پتانسیل در شکل ۲ آمده است.



شکل ۲: منحنی پتانسیل

اکنون برای تحلیل نیروی وارد بر ذره و با توجه به اینکه جمله $V(x_0)$ یک مقدار ثابت است، می‌دانیم که رابطه زیر برای آن وجود دارد:

$$f(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \rightarrow -(x - x_0)V''(x) = m\ddot{x} \tag{۳}$$

$$-(x - x_0)V''(x_0) = m\ddot{x} \tag{۴}$$

که این همان نیروی فنر است و یک حرکت نوسانی را توصیف می‌کند. همچنین برای فرکانس نوسان حاصل از این نیرو خواهیم داشت:

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \tag{۵}$$

که این به این معنی است که مقدار $V''(x_0)$ معادل ثابت فنر است؛ به این ترتیب یک مسئله معادل را برای توصیف

وضعیت ذره داریم. با انجام همین تحلیل حول نقطه x_1 نیز داریم:

$$V''(x_1) \neq 0 \quad (۶)$$

$$-(x - x_1)V''(x_1) = m\ddot{x} \quad (۷)$$

$$|V''(x_1)|X = m\ddot{x} \rightarrow X(t) = Ce^{\lambda t} \quad (۸)$$

که متناسب با موهومی یا حقیقی بودن مقدار λ، پاسخ معادله دیفرانسیل مشخص خواهد شد.