

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس یار: امیرعلی عابدینی

جلسه سوم: نوسانگر غیرخطی و حرکت دورانی
نیم سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

۱ دوره تناوب نوسانگر غیرخطی

دیدیم که قانون هوک در حالت تعمیم یافته در معادله نیوتون به صورت زیر است:

$$m\ddot{x} = -kx^{2n+1}$$

که با توجه به پایستار بودن نیروی فنر، از محاسبه پتانسیل مربوط به این نیرو خواهیم داشت:

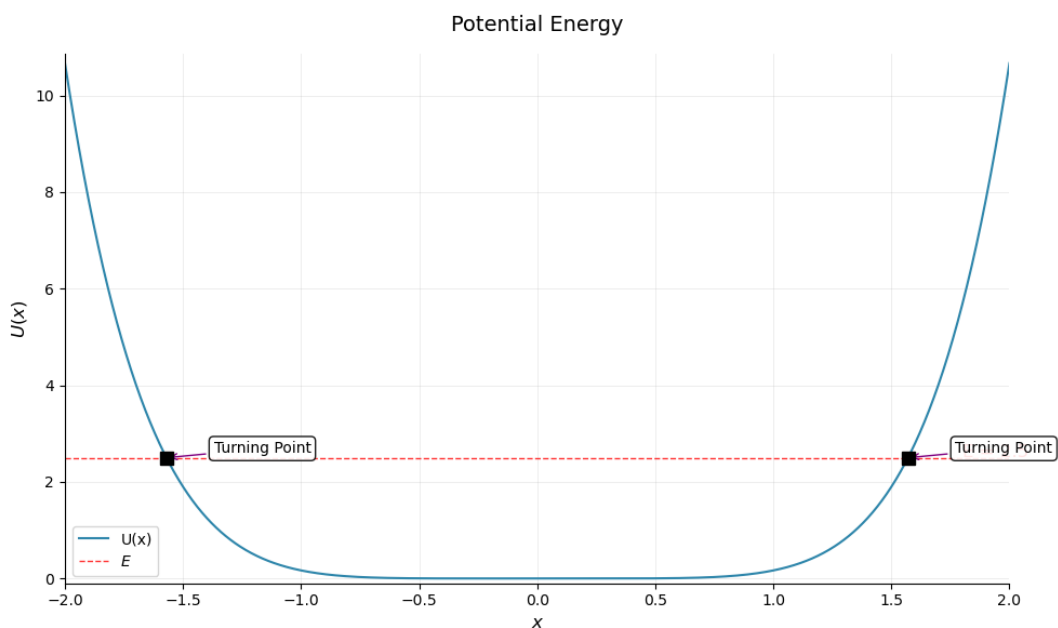
$$f(x) = -kx^{2n+1}$$
$$U(x) = - \int f(x) dx = \frac{k}{2n+2} x^{2n+2}$$

به این ترتیب در شکل ۱ می توان منحنی پتانسیل به ازاء یک سطح انرژی را مشاهده کرد. نتیجه این کار، یک نوسان در بین نقاط بازگشت ذره خواهد بود. همچنین توجه شود که n مقادیر غیر منفی را اختیار خواهد کرد. نقاط بازگشت، همان دامنه نوسان را تشکیل می دهند؛ در نتیجه با پیدا کردن مقادیر x مربوطه، می توان دامنه نوسان را بدست آورد. برای سطح انرژی نیز می دانیم که برابر است با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم. داریم:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2n+2}x^{2n+2}$$

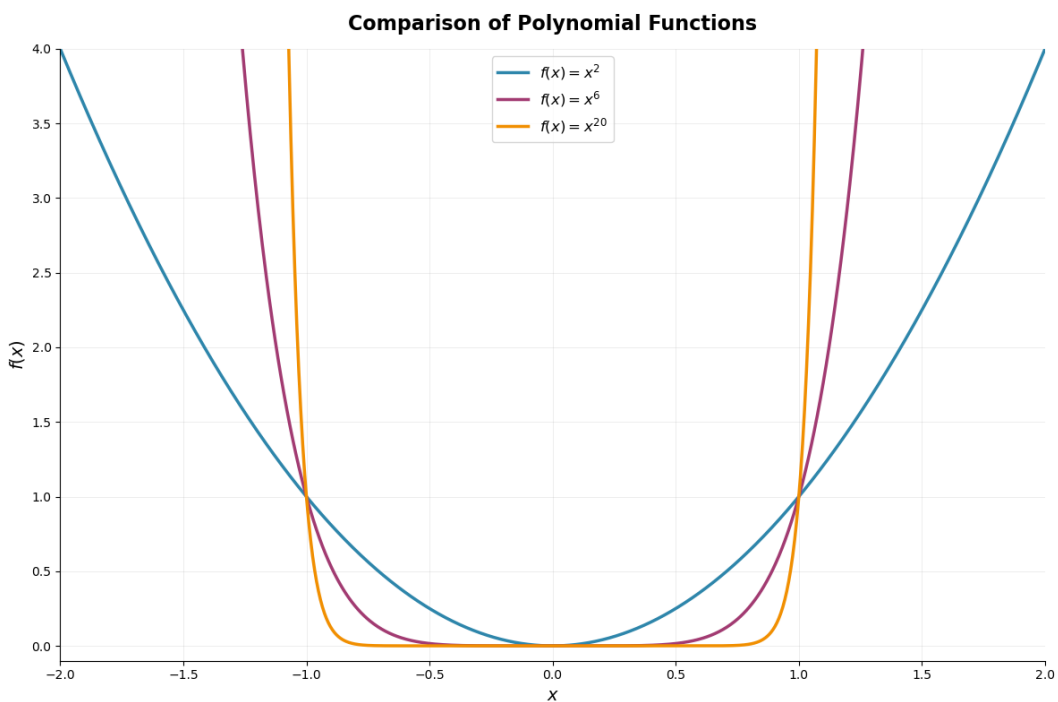
توجه شود که با قرار دادن $n = 0$ ، به همان وضعیت نوسانگر هماهنگ ساده خواهیم رسید:

$$n = 0 \rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$



شکل ۱: منحنی پتانسیل نوسانگر

فارغ از مقدار n ، منحنی پتانسیل نوسانگر به صورت توان‌های زوج x است که منجر به وجود یک سهمی می‌شود. توان‌های بالاتر باعث پهن‌تر شدن سهمی می‌شوند. در شکل ۲ این موضوع کاملاً مشهود است.



شکل ۲: مقایسه توان‌های مختلف در سهمی

نشان دادیم که برای محاسبه دوره تناوب، به رابطه انتگرالی زیر می‌رسیم:

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{k}{2n+2} x^{2n+2}}}$$

اکنون می‌خواهیم دوره تناوب نوسانگر را بدست آوریم. ابتدا با پیدا کردن دامنه، یا به عبارتی در جایی که $\dot{x} = 0$ باشد، داریم:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow E = \frac{k}{2n+2} x^{2n+2} \quad (1)$$

$$\frac{(2n+2)E}{k} = x^{2n+2} = (x^{n+1})^2 \quad (2)$$

$$x_{\pm} = \pm \left[\frac{(2n+2)E}{k} \right]^{1/(2(n+1))} \rightarrow x_+ = A \quad (3)$$

با جایگذاری دامنه نوسان در رابطه دوره تناوب، داریم:

$$T = \sqrt{2m} \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{\left(\frac{k}{2n+2}\right)^{1/2} \sqrt{A^{2n+2} - x^{2n+2}}} \quad (4)$$

با انجام تغییر متغیر $x = Az$ و در نتیجه $dx = Adz$ و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$T = \sqrt{\frac{2m(2n+2)}{k}} \int_{-1}^{+1} \frac{A dz}{A^{n+1} \sqrt{1 - z^{2n+2}}} \quad (5)$$

$$T = \sqrt{\frac{2m(2n+2)}{k}} A^{-n} \int_{-1}^{+1} \frac{A dz}{\sqrt{1 - z^{2n+2}}} \quad (6)$$

حاصل انتگرال یک عدد است که تابعیتی از n دارد. پس می‌توان به طور کلی نتیجه گرفت که دوره تناوب با دامنه نوسان رابطه عکس دارد.

$$T \propto A^{-n} \quad (7)$$

اگر $n = 0$ می‌بود، وضعیت نوسانگر هماهنگ ساده را می‌داشتیم و اثر دامنه نوسان در دوره تناوب از بین می‌رفت. این همان نتیجه‌ای است که از پیش برای دوره تناوب می‌دانستیم که وابسته به ویژگی‌های ساختاری نوسانگر بوده و مستقل از دامنه نوسان است. اکنون مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر n ، دوره تناوب کمتر می‌شود. به بیانی دیگر، هر چه دامنه بزرگتر شود، دوره تناوب کمتر می‌شود.

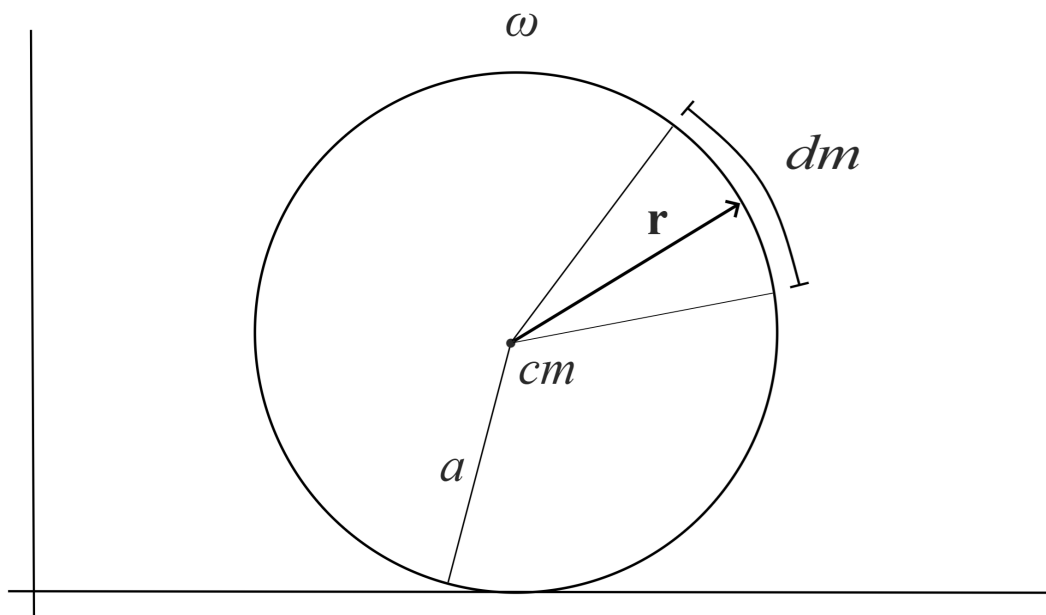
۲ محاسبه انرژی جنبشی مجموعه‌ای از ذرات

تا اینجا یاد گرفتیم که انرژی جنبشی مجموعه‌ای از ذرات برابر است با حاصل جمع انرژی جنبشی مرکز جرم و انرژی جنبشی ذرات دیگر نسبت به مرکز جرم.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$$

و در حالتی که سیستم ذرات دارای جرم پیوسته باشد، جمع روی جرم هر ذره به انتگرال تبدیل شده و خواهیم داشت:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \int \dot{x}^2 dm$$



شکل ۳: حلقه در حال دوران

به این ترتیب برای محاسبه انرژی جنبشی یک حلقه در حال دوران، با در نظر گرفتن المان جرم روی حلقه داریم:

$$\lambda = \frac{M}{2\pi a} = \frac{dm}{dl} \quad (۱)$$

$$dl = r d\theta \quad (۲)$$

برای محاسبه سرعت، یک بار آن را در مختصات کارتزین و بار دیگر در مختصات قطبی می‌نویسیم:

$$\vec{r} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \quad (۳)$$

در مختصات قطبی نیز خواهیم داشت:

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad (۴)$$

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\hat{r} \quad (۵)$$

توجه شود که $d\hat{r}$ یک بردار عمود بر $\hat{r}$ خواهد بود. در نتیجه در مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$d\hat{r} = d\theta\hat{\theta} \quad (۶)$$

یا به بیانی دیگر، با استفاده از تجزیه بردار در مختصات کارتزین هم این موضوع مشهود است:

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \quad (۷)$$

در نتیجه:

$$\vec{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (۸)$$

$$r^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \quad (۹)$$

در ادامه، با جایگذاری در رابطه انرژی جنبشی خواهیم داشت:

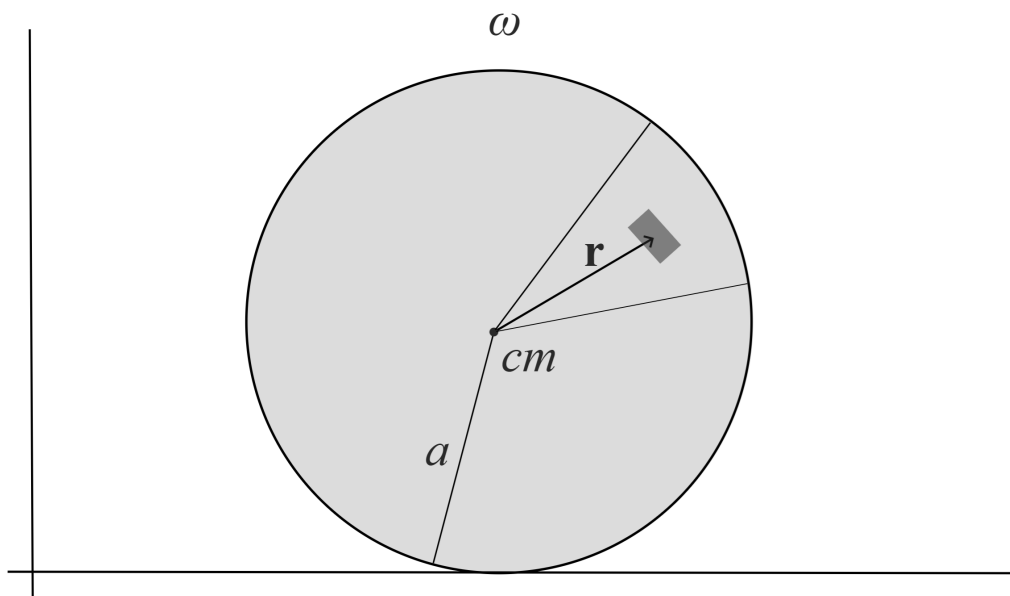
$$T_{re} = \int \frac{1}{2} dm (\dot{r})^2 = \int \frac{1}{2} \lambda a d\theta [\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] \quad (۱۰)$$

با توجه به اینکه شعاع حلقه ثابت است و تغییرات ندارد، یا به عبارتی $\vec{r} = a\hat{r}$ ، پس $\dot{r} = 0$ است.

$$T_{re} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \lambda a d\theta a^2 \dot{\theta}^2 \quad (۱۱)$$

۳ دیسک در حال دوران

در این بخش به طور مشابه، می‌خواهیم انرژی جنبشی یک دیسک در حال دوران را محاسبه کنیم. تنها تفاوتی که این مسئله با وضعیت حلقه در حال دوران دارد در نحوه توزیع جرم و لزوم استفاده از المان سطح است.



شکل ۴: دیسک در حال دوران

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi a^2} \quad (۱)$$

چون مسئله تقارن دایروی دارد، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$\rightarrow T_{rel} = \frac{1}{2} \int \dot{r}^2 dm \rightarrow dm = r d\theta dr \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \int \sigma (rd\theta dr) (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (۳)$$

با توجه به $\omega = \dot{\theta}$ با بازنویسی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} \sigma \omega^2 \frac{a^4}{4} 2\pi \quad (۴)$$

$$\sigma = \frac{M}{\pi a^2} \rightarrow \frac{Ma^2}{4} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (۵)$$