

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس یار: امیرعلی عابدینی
جلسه دوم: نیروی مرکز گرا و پتانسیل
نیم سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

۱ نیروی مرکز گرا

نیروهای دارای مؤلفه شعاعی، مرکز گرا هستند و از لحاظ شهودی، مانند یک چشمه ای هستند که به اطراف شان نیرو وارد می کنند. به صورت کلی برای وضعیتی که نیرو تنها تابعی از شعاع باشد داریم:

$$\vec{F} = f(r)\vec{r}$$

که با توجه به نوشتن $\vec{r}$ بر حسب اندازه و بردار یکه، می توان به صورت زیر بازنویسی را انجام داد:

$$\vec{r} = r\hat{r} \rightarrow \vec{F} = g(r)\hat{r}$$

یکی از خواص این نوع نیروها، پایستاری است. اکنون می خواهیم این خاصیت را نشان دهیم. شرط پایستار بودن یک نیرو، صفر بودن کرل نیرو است.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (1)$$

با جایگذاری نیرو در رابطه و استفاده از اتحاد آنالیز برداری مربوطه، بدست می آید:

$$\vec{\nabla} \times (A\vec{B}) = (\vec{\nabla}A) \times \vec{B} + A(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (2)$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times (f(r)\vec{r}) = (\vec{\nabla}f(r)) \times \vec{r} + f(r)(\vec{\nabla} \times \vec{r}) \quad (3)$$

می توان نشان داد که به طور کلی، جمله دوم حاوی $\vec{\nabla} \times \vec{r}$ به طوری که $\vec{r}$ بردار شعاعی باشد، برابر صفر است:

$$\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (۴)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{R} = \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (۵)$$

$$\rightarrow \hat{i} \quad \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) = 0 - 0 = 0 \quad (۶)$$

$$\rightarrow \hat{j} \quad \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0 - 0 = 0 \quad (۷)$$

$$\rightarrow \hat{k} \quad \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0 - 0 = 0 \quad (۸)$$

پس برای رابطه ۳، تنها جمله زیر باقی می ماند:

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times (f(r)\vec{r}) = (\vec{\nabla} f(r)) \times \vec{r} \quad (۹)$$

می توان با بازنویسی عملگر گرادینان نوشت:

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{df}{dr} \hat{r} \quad (۱۰)$$

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۱۱)$$

$$\vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \quad (۱۲)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (۱۳)$$

به این ترتیب برای هر مؤلفه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \quad (۱۴)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad (۱۵)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{x}{r} \quad (۱۶)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \quad (۱۷)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r} \quad (۱۸)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{y}{r} \quad (۱۹)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \quad (20)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r} \quad (21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{z}{r} \quad (22)$$

در نتیجه برای نگارش نهایی اتحاد، داریم:

$$\frac{x}{r} \frac{df}{dr} \hat{i} + \frac{y}{r} \frac{df}{dr} \hat{j} + \frac{z}{r} \frac{df}{dr} \hat{k} \quad (23)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{df}{dr} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{df}{dr} \hat{r} \quad (24)$$

عبارت بدست آمده می تواند معادل یک $f' \hat{r}$ باشد. این عبارت به دلیل داشتن بردار یک $\hat{r}$ ، با $\vec{r}$ در یک صفحه بوده و حاصل ضرب خارجی این دو برابر با صفر خواهد بود:

$$f' \hat{r} \times \vec{r} = 0 \quad (25)$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (26)$$

در نتیجه نشان دادیم که این نیرو پایستار است. می توان با بیانی دیگر، با استفاده از تعریف گرادیان در مختصات قطبی - کروی نوشت:

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (27)$$

از آنجا که f تنها تابعی از شعاع است، در نتیجه تنها جمله اول گرادیان باقی مانده و مجدداً به دلیل بودن در یک صفحه با $\vec{r}$ ، حاصل کرل تابع برابر با صفر خواهد بود.

۲ محاسبه پتانسیل نیروی مرکزگرا

در بخش قبل نشان دادیم که نیروهای مرکزگرا پایستار هستند. از طرفی، می دانیم که یک نیروی پایستار را می توان برحسب گرادیان یک کمیت اسکالر (یا همان پتانسیل) بازنویسی کرد. در این بخش می خواهیم نشان بدهیم که پایستار بودن این نیرو به چه رابطه ای برای پتانسیل منجر می شود.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad (1)$$

با ضرب کردن طرفین در $d\vec{r}$ داریم:

$$\rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

با انتگرال گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$-\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = + \int \vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} \quad (3)$$

با توجه به اینکه پتانسیل برای نیروهای پایستار تنها تابعی از مکان است ($U = U(x, y, z)$)، پس دیفرانسیل پتانسیل را بدست خواهیم آورد:

$$\vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} = dU \quad (۴)$$

$$- \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int dU = U(\vec{r}) \quad (۵)$$

$$\rightarrow - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{U_0}^{U(\vec{r})} dU \quad (۶)$$

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (۷)$$

اکنون با جایگذاری تابع $\vec{F}$ طبق تعریف داریم:

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} f(\vec{r})\hat{r} \cdot d\vec{r} \quad (۸)$$

که تعریف دیفرانسیل بردار شعاعی به صورت زیر است:

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad (۹)$$

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\hat{r} \quad (۱۰)$$

توجه شود که دیفرانسیل یک بردار یکه برابر است با یک بردار جدید که بر بردار یکه اولیه عمود است؛ به این ترتیب نهایتاً پس از ضرب داخلی، جمله دوم برابر با صفر می شود.

$$d\hat{r} \cdot \hat{r} = 0 \rightarrow \hat{r} \cdot d\vec{r} = dr + r\hat{r} \cdot d\hat{r} \quad (۱۱)$$

$$\rightarrow U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} f(\vec{r})\hat{r} dr \quad (۱۲)$$

۳ محاسبه پتانسیل گرانشی

یکی از معروف ترین نیروهای مرکزگرا، نیروی گرانشی است. می توان با توجه به پایستار بودن این نیرو، پتانسیل مربوط به آن را یافت. برای نیروی گرانشی داریم:

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \quad (۱)$$

که با توجه به وابستگی آن به مؤلفه شعاعی، به وضوح مرکز گرا است. با قرار دادن آن در رابطه انتگرالی برای محاسبه پتانسیل، خواهیم داشت:

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_G \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

$$= + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{GMm}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{GMm}{r^2} dr \quad (3)$$

$$\left[-\frac{GMm}{r} \right]_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0} \quad (4)$$

$$\rightarrow U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (5)$$

که مشاهده می شود پتانسیل گرانشی، تنها وابستگی به موقعیت ذرات دارد.

۴ بررسی قانون هوک در سه بعد

قانون هوک برای فنر را در یک بعد می شناسیم:

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

این نیرو در سه بعد نیز می تواند تعریف شود، گویا در هر بعد به صورت جداگانه یک فنر در حال نوسان باشد. با این فرض که ثابت فنر در همه ابعاد یکسان باشد، داریم:

$$\vec{F} = -kx\hat{i} - ky\hat{j} - kz\hat{k}$$

بسیار مرسوم است که ثابت فنر بر حسب فرکانس زاویه ای و جرم نوشته شود:

$$k = m\omega^2$$

$$-k(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = -k\vec{r}$$

در نتیجه برای قانون هوک بر حسب مؤلفه شعاعی داریم:

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$$

مشهود است که نیروی فنر طبق قانون هوک در سه بعد، یک نیروی مرکز گرا است و در نتیجه می توان پتانسیل آن را پیدا کرد. به طور مشابه خواهیم داشت:

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

$$= m\omega^2 \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{r} \cdot d\vec{r} = m\omega^2 \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} r dr \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r_0^2 \rightarrow U(\vec{r}) = U(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (3)$$

که با بازنویسی آن در دستگاه مختصات کارترین داریم:

$$\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (۴)$$

به بیانی دیگر، به دلیل اسکالر بودن پتانسیل، تمام پتانسیل‌ها در هر بعد با یکدیگر جمع می‌شوند.

۵ تحلیل پتانسیل و انرژی برای حرکت در یک بعد

تا اینجا دیدیم که برای نیرو در یک بعد، یک کمیت پایستار وجود دارد.

$$f(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

همچنین این کمیت پایستار با زمان تغییری نمی‌کند.

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

مقدار این کمیت پایسته (انرژی) با استفاده از شرایط اولیه مثل سرعت و مکان اولیه تعیین می‌شود. هنگامی که یک ذره در یک بعد حرکت می‌کند، اتفاقات مختلفی می‌تواند رخ بدهد:

- ذره از جایی که حرکت کرده است، به سمت بی‌نهایت رفته و باز نخواهد گشت.
 - ذره پس از شروع حرکت، به یک سد پتانسیل برخورد کرده و پس از برخورد در خلاف جهت اولیه حرکت کرده و به بی‌نهایت می‌رود.
 - ذره حرکت نوسانی خواهد داشت.
 - ذره به سمت قله پتانسیل حرکت می‌کند و هرگز به آن نمی‌رسد.
- به عنوان مثال، برای حرکت نوسانی داریم:

$$\dot{x} = 0 \rightarrow E = U(x)$$

پس از حل معادله، پاسخ‌های بدست آمده مکان‌هایی هستند که ذره هنگام رسیدن به آنها تغییر جهت داده و به ادامه حرکت نوسانی می‌پردازد. این مکان‌های x_- و x_+ ، «نقاط بازگشت» نام دارند. با در نظر گرفتن فرض $x_- < x_+$ داریم:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - U(x) \quad (۱)$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} = \frac{dx}{dt} \quad (۲)$$

با انتگرال گیری نسبت به زمان، می توان نقاط بازگشت را بدست آورد.

$$\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = \int_0^{T/2} dt \quad (3)$$

(4)

برای در نظر گرفتن یک پریود کامل، لازم است یک رفت و برگشت کامل را در نظر گرفت.

$$2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = \int_0^T dt = T \quad (5)$$

$$\rightarrow \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = T \quad (6)$$

که برای انرژی پتانسیل نوسانگر یک بعدی داریم:

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (7)$$

به این ترتیب دوره تناوب نوسانگر بدست خواهد آمد.

۶ نیروی هوک تعمیم یافته غیر خطی

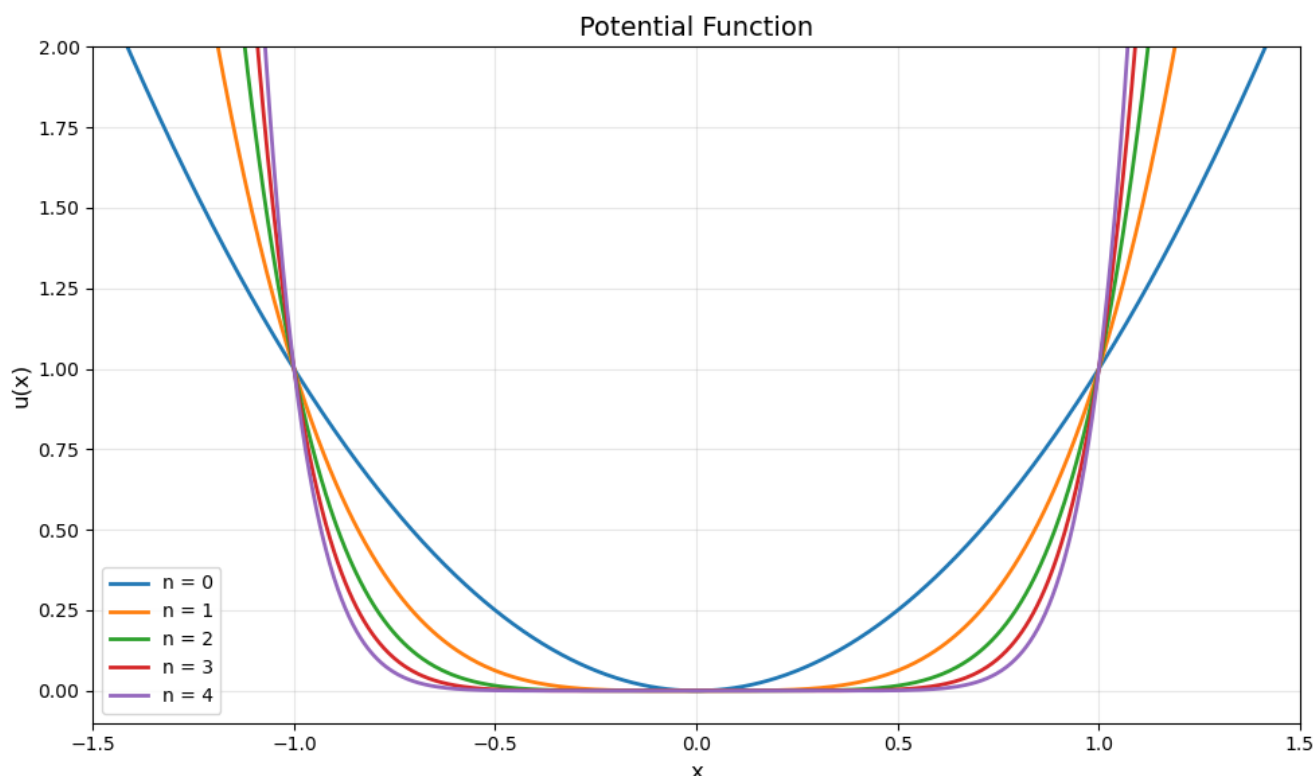
در این بخش می خواهیم به عنوان مثال، قانون هوک تعمیم یافته را در نظر بگیریم که به طور کلی، توان های فرد x را داریم:

$$F = -kx^{(2n+1)}$$

با انتگرال گیری از نیرو برای محاسبه پتانسیل داریم:

$$U(x) = \frac{k}{2n+2} x^{2n+2}$$

به طور کلی، تابع پتانسیل به ازاء مقادیر n مختلف، یک سهمی است.



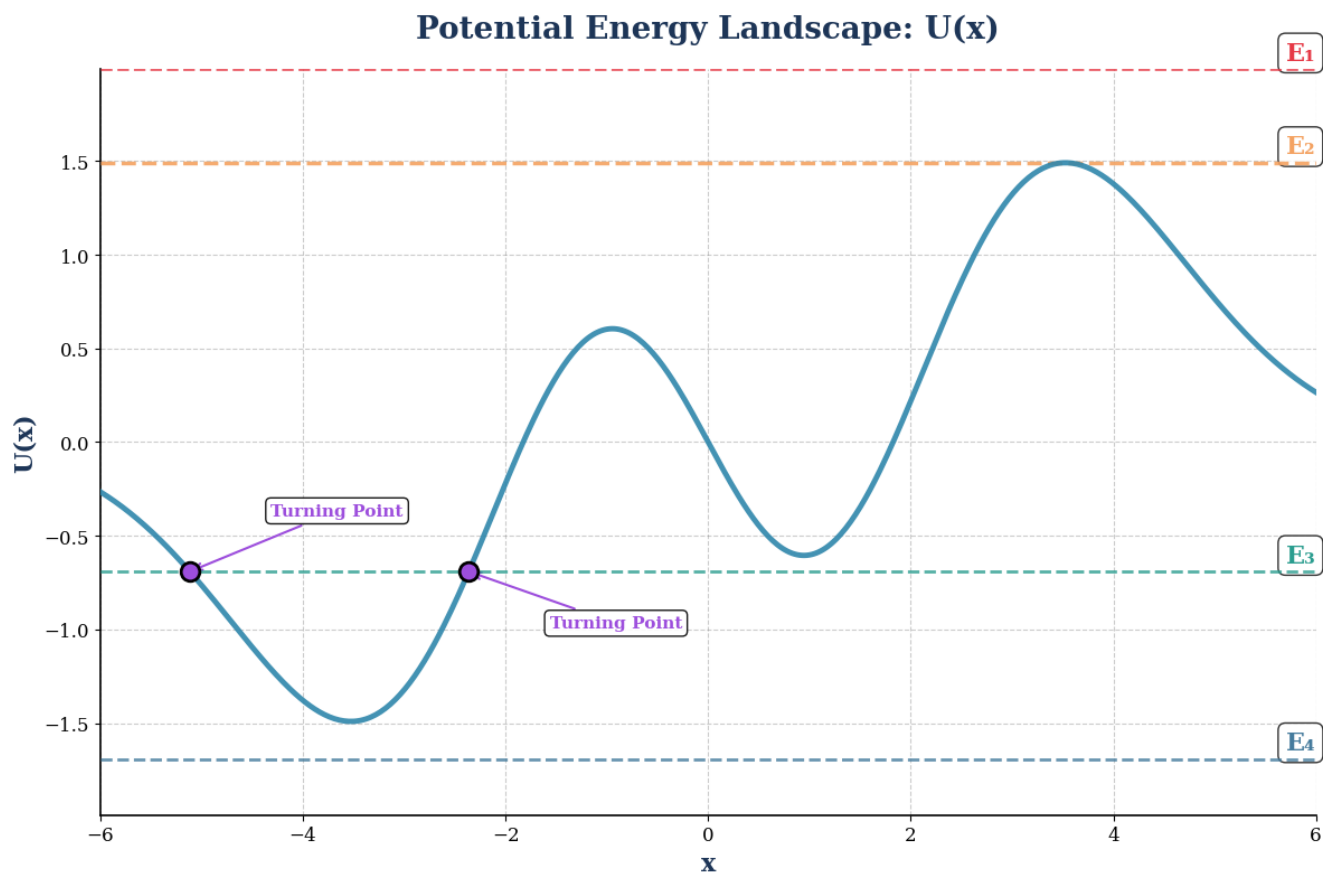
شکل ۱: تابع پتانسیل برای مقادیر n مختلف

۷ تحلیل سامانه با چشم انداز انرژی

با توجه به حالت‌های مختلفی که برای ذره پیش می‌آید، می‌توان با استفاده از شکل پتانسیل و انرژی داده شده به سامانه، وضعیت آن را توصیف کرد. با توجه به شکل ۲، به دلیل پایسته بودن کمیت انرژی، به x هیچ وابستگی‌ای ندارد و متناسب با مقدار آن نسبت به پتانسیل، می‌توان تحلیل را انجام داد. ذره روی محور x در حال حرکت است و می‌توان تصور کرد که بر روی منحنی پتانسیلی که به آن اثر می‌کند، حرکت می‌کند. با توجه به این که انرژی جنبشی کمیتی مثبت است، پس انرژی کل همواره باید از انرژی پتانسیل بزرگتر باشد.

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - U(x) \geq 0$$

نواحی‌ای که در آن سطح انرژی کمتر از انرژی پتانسیل باشد، «مناطق ممنوعه» نام دارند. ذره با انرژی E_1 به دلیل بیشتر بودن نسبت به انرژی پتانسیل، در هر جهتی که به ذره وارد شود، آن را تا بی‌نهایت حرکت می‌دهد و هرگز متوقف نمی‌شود. ذره با انرژی E_2 اگر در جهت منفی محور x باشد، تا بی‌نهایت به مسیر خود ادامه می‌دهد. اگر در جهت مثبت باشد، هنگامی که به ماکسیمم منحنی پتانسیل نزدیک شود، بی‌نهایت زمان طول می‌کشد تا به آن برسد. از نظر فیزیکی، اگر ذره بتواند به نقطه برخورد با ماکسیمم منحنی پتانسیل برسد، سرعتش برابر با صفر شده و متوقف می‌شود. اگر انرژی ذره E_3 باشد، تنها ناحیه مجاز آن بین نقاط برگشت بوده و ذره در آن نوسان می‌کند و باقی مناطق، منطقه ممنوعه تلقی می‌شوند. انرژی E_4 نیز به دلیل کمتر بودن نسبت به انرژی پتانسیل، امکان‌پذیر نیست.



شکل ۲: منحنی چشم‌انداز انرژی

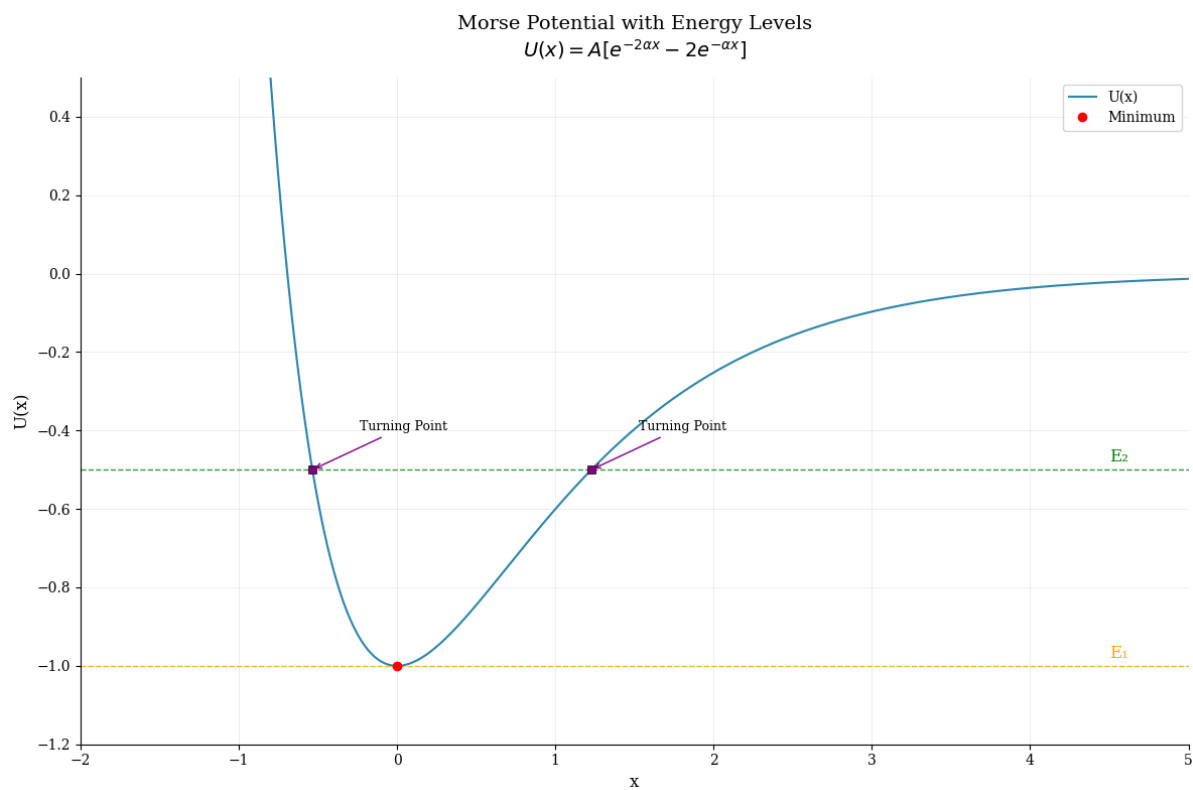
۸ بررسی چند پتانسیل

اکنون برای چند پتانسیل مختلف، به ازاء سطوح انرژی مختلف نقاط مختلف را مشخص می‌کنیم.

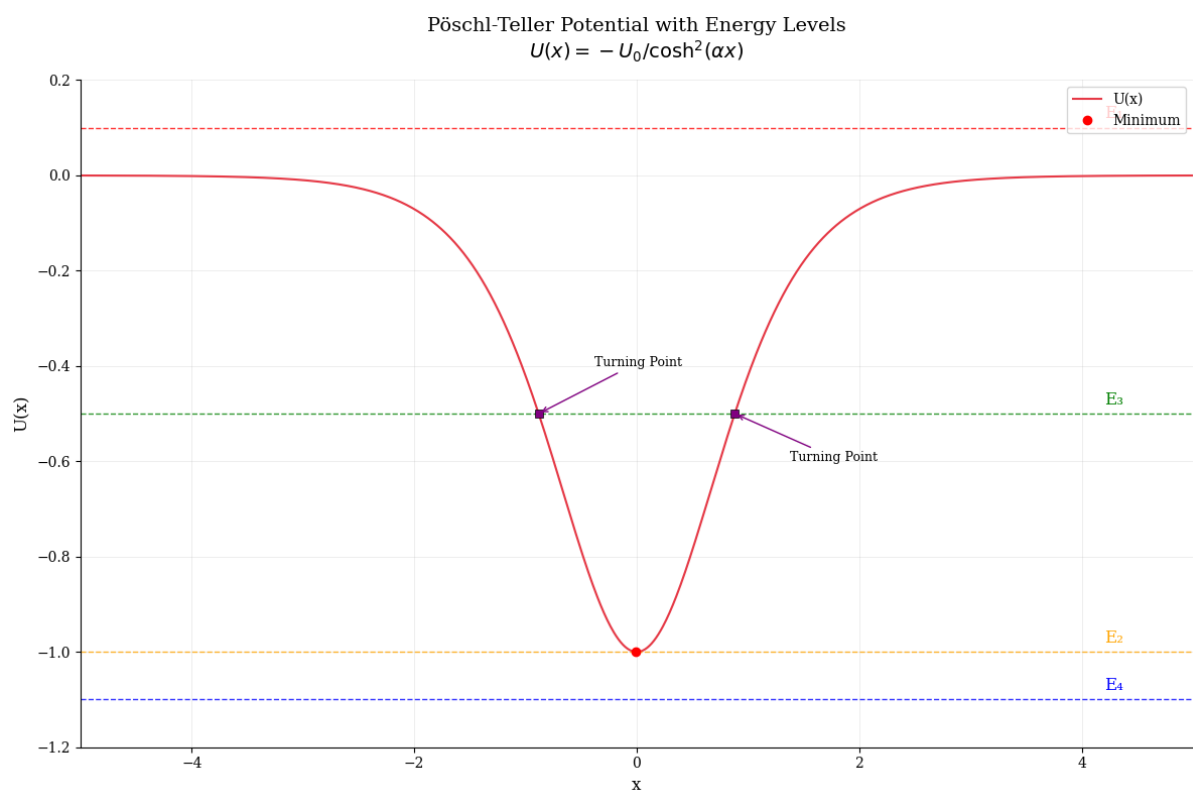
$$U(x) = A [e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}]$$

$$U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

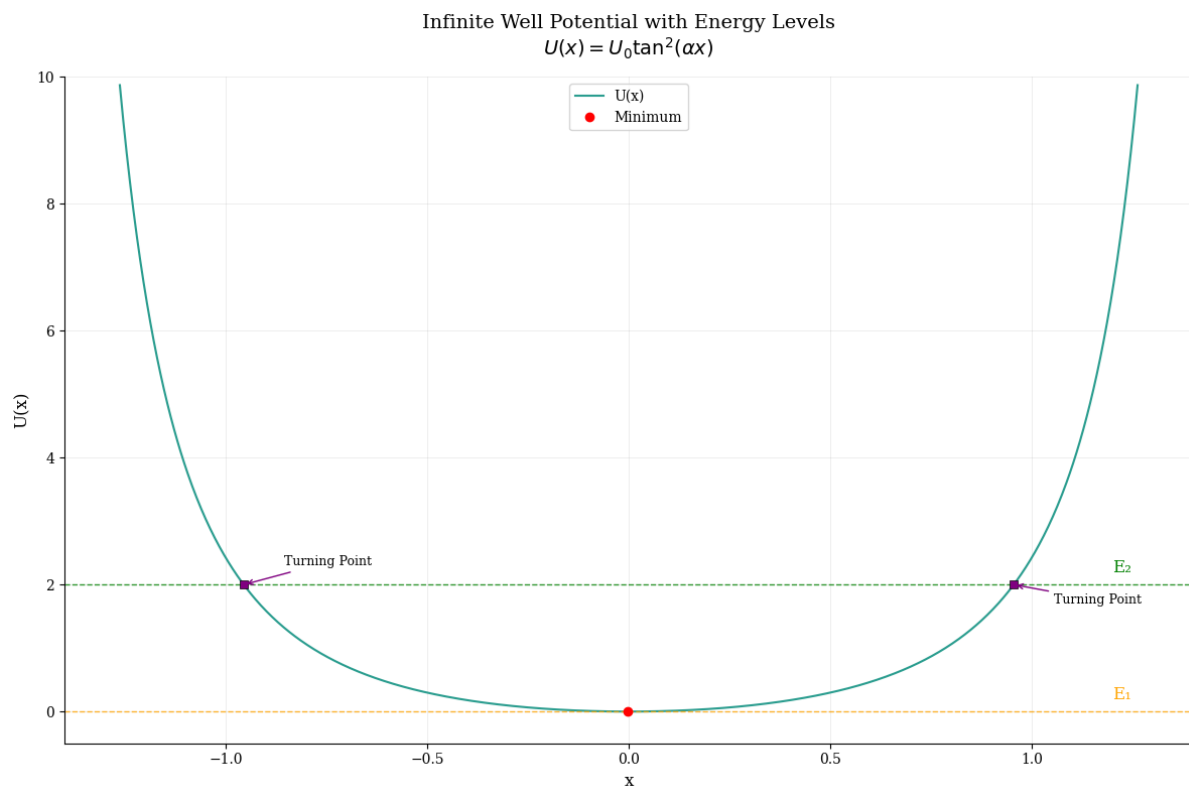
$$U(x) = U_0 \tan^2(\alpha x)$$



شکل ۳: منحنی پتانسیل اول



شکل ۴: منحنی پتانسیل دوم



شکل ۵: منحنی پتانسیل سوم