دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی

تدریس‌یاری مکانیک تحلیلی ۱

استاد: دکتر اباصلت رستمی
تدریس‌یار: امیرعلی عابدینی

جلسه اول: حساب وردشی

نیم‌سال اول ۱۴۰۵ - ۱۴۰۴

---

۱ محاسبه وردش تابعی داده شده

تابعی زیر داده شده است:

$$F[f] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, [f\dot{(t)}]^n$$

می‌خواهیم وردش این تابعی (δF) را محاسبه کنیم. با در نظر گرفتن تغییرات جزئی δF، می‌توان دریافت که ارتباطی بین آن و δf وجود دارد. با لحاظ کردن این تغییرات کوچک و نوشتن بسط تیلور مرتبط با آن خواهیم داشت:

$$F[f(t)+\epsilon(t)] = F[f(t)] + \delta F[f(t);\epsilon(t)] + \frac{1}{2!}\delta^2 F[f(t);\epsilon(t)] + \frac{1}{3!}\delta^3 F[f(t);\epsilon(t)] + \cdots$$

به طوری که $\epsilon(t)$ در نگارش، همان δf است. توجه شود که هر کدام از جملات این بسط که دارای مرتبه‌های متفاوتی از δF هستند، در اصل وردش‌های مرتبه‌های متفاوت محسوب می‌شوند. برای بدست آوردن وردش δF، می‌توان بسط را تا مرتبه اول تقریب زد. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$F[f(t)+\delta f] = F[f(t)] + \delta F \tag{۱}$$

$$\delta F = F[f(t)+\delta f] - F[f(t)] \tag{۲}$$

به این ترتیب با جایگذاری کردن رابطه تابعی، خواهیم داشت:

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \{\dot{f}+\delta\dot{f}\}^n - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \{\dot{f}\}^n \tag{۳}$$

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left[\{\dot{f}+\delta\dot{f}\}^n - \{\dot{f}\}^n\right] \tag{۴}$$

اکنون، هدف خطی کردن رابطه است و لازم است به طریقی توان n را از بین برد. با فاکتورگیری از $\dot{f}^n$، و در نظر گرفتن کوچک بودن $\delta\dot{f}^n$، بسط دوجمله‌ای را اعمال کرده و خواهیم داشت:

$$\{\dot{f}\}^n \left(1 + \frac{\delta\dot{f}}{\dot{f}}\right)^n \tag{۵}$$

همچنین به طور کلی برای بسط دوجمله‌ای داریم:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{۶}$$

که تا مرتبه اول این بسط می‌تواند کفایت کند. با بازگرداندن جمله فاکتورگیری شده خواهیم داشت:

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \dot{f}^n + \dot{f}^n \cdot n \cdot \frac{\delta\dot{f}}{\dot{f}} - \dot{f}^n \right\} \tag{۷}$$

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} dt\, n\, \dot{f}^{\,(n-1)}\, \delta\dot{f} \tag{۸}$$

با بازنویسی $\delta\dot{f}$ به صورت دیفرانسیلی ($\frac{d}{dt}$) بدست خواهد آمد:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, n\, \dot{f}^{\,(n-1)}\, \frac{d}{dt}(\delta f) \tag{۹}$$

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left[\frac{d}{dt} \left\{ n\, \dot{f}^{\,(n-1)}\, \delta f \right\} - n(n-1)\, \ddot{f}\, \dot{f}^{\,(n-2)}\, \delta f \right] \tag{۱۰}$$

$$\delta F = \left[n\, \dot{f}^{\,(n-1)}\, \delta f \right]_{t_1}^{t_2} - n(n-1) \int_{t_1}^{t_2} dt\, \ddot{f}\, \dot{f}^{\,(n-2)}\, \delta f \tag{۱۱}$$

به طوری که δf تابعی دلخواه است و آن را می‌توان طوری انتخاب کرد که جمله اول که از انتگرال خارج شده است (یا همان جمله مرزی)، مقدار صفر داشته باشد. به عنوان شرایط مرزی داریم:

$$\delta f(t_1) = \delta f(t_2) = 0 \tag{۱۲}$$

$$\rightarrow \delta F = -n(n-1) \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{f}^{\,(n-2)}\, \ddot{f}\, \delta f \tag{۱۳}$$

توجه شود که حالت بسیار مهم برای فیزیکدان‌ها، وضعیت $n = 2$ است که کاربردهای آن دیده خواهد شد. فیزیکدان‌ها حل این مسئله را با نگارش کمی مختصرتر به صورت زیر می‌نویسند:

$$\delta F = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{f}^{\,n} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, n\, \dot{f}^{\,(n-1)}\, \delta\dot{f} \tag{۱۴}$$

با اثر دادن δ در انتگرال و لحاظ کردن دیفرانسیل $\frac{d}{dt}$ خواهیم داشت:

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} dt\, n\, \dot{f}^{\,(n-1)}\, \frac{d}{dt}(\delta f) \tag{۱۵}$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left[\frac{d}{dt}\left\{\delta f\, n\, \dot{f}^{\,(n-1)}\right\} - \delta f\, n\, \frac{d}{dt}\left(\dot{f}^{\,(n-1)}\right)\right] \tag{۱۶}$$

توجه شود که برای بازنویسی بخش دیفرانسیلی، از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$A\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}(AB) - B\frac{dA}{dt} \tag{۱۷}$$

$$n\, \dot{f}^{\,(n-1)} \frac{d}{dt}(\delta f) = \frac{d}{dt}\left(\delta f\, n\, \dot{f}^{\,(n-1)}\right) - \delta f\, \frac{d}{dt}\left(n\, \dot{f}^{\,(n-1)}\right) \tag{۱۸}$$

به این ترتیب به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\left[n\, \dot{f}^{\,(n-1)}\, \delta f\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\, n\, \frac{d}{dt}\left(\dot{f}^{\,(n-1)}\right)\, \delta f \tag{۱۹}$$

۲ محاسبه اکسترمم انتگرال

در این تمرین می‌خواهیم انتگرال داده شده برای تابعی G را اکسترمم کنیم؛ به بیان دیگر، می‌خواهیم تابع $X(t)$ را طوری بدست آوریم که به ازاء آن $G[X(t)]$ ماکسیمم یا مینیمم شود.

$$G[X(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left\{\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right\}$$

به طور مشابه بخش اول، لازم است وردش تابعی G را محاسبه کرده و آن را برابر صفر قرار دهیم.

$$\delta G = 0$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left\{\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right\} = 0$$

توجه شود که برخلاف توابع معمولی که اکسترمم آن منجر به بدست آوردن یک تابع جبری ساده می‌شد، اکسترمم یک تابعی منجر به بدست آوردن یک معادله دیفرانسیل می‌شود که توصیف کننده پدیده درحال بررسی است.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \left\{\frac{d}{dt}[m\dot{x}\, \delta x] - m\ddot{x}\, \delta x - m\omega^2 x\, \delta x\right\} \tag{۱}$$

$$[m\dot{x}\, \delta x]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left\{-m\ddot{x}\, \delta x - m\omega^2 x\, \delta x\right\} \tag{۲}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(-m\ddot{x} - m\omega^2 x\right) \delta x = 0 \tag{۳}$$

دلخواه بودن تابع δx ایجاب می‌کند که رابطه انتگرالی به ازاء هر δx برقرار باشد، به این ترتیب داریم:

$$-m\ddot{x} - m\omega^2 x = 0 \quad (۴)$$

رابطه ۴، معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم است. این معادله، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن است که با استفاده از معادله مشخصه قابل حل بوده و پاسخ آن به صورت زیر است:

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad (۵)$$

ثوابت A و B نیز با استفاده از شرایط مرزی داده شده توسط مسئله بدست می‌آیند و لازم است که توسط مسئله داده شود.

۳ محاسبه اکسترمم انتگرال با تابعی دارای دو متغیر

در این بخش، برخلاف بخش دوم قصد داریم تا مسئله را برای وضعیت دومتغیره بررسی کنیم. برای محاسبه وردش تابعی با بیش از یک متغیر، تنها کافی است که از هر متغیر آن وردش گرفته شود.

$$G[X(t), Y(t)]$$

$$\delta G = G[x + \delta x, y + \delta y] - G[x, y]$$

منطق مسئله تغییری نکرده است، صرفا به دلیل وجود دو متغیر، لازم است که محاسبات را برای هر دو متغیر به همان ترتیب انجام داده و در نهایت به دو معادله دیفرانسیل خواهیم رسید.

$$\int dt\,(\cdots)\,\delta x + (\cdots)\,\delta y = 0$$

تابعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$G[X(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\left\{\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\right\}$$

با محاسبه وردش، داریم:

$$[m\dot{x}\,\delta x]_{t_1}^{t_2} + [m\dot{y}\,\delta y]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\,\left(-m\ddot{x} - m\omega^2 x\right)\delta x + \int_{t_1}^{t_2} dt\,\left(-m\ddot{y} - m\omega^2 y\right)\delta y = 0 \quad (۱)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی و دلخواه بودن δx و δy، داریم:

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0 \quad (۲)$$

$$\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0 \quad (۳)$$

که به این ترتیب، دو معادله دیفرانسیل بدست خواهد آمد:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \\ y(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t) \end{cases} \quad (۴)$$

۴ اکسترمم تابعی در وضعیت غیرمستقل

اکنون وضعیتی را در نظر می‌گیریم که تابعی بخش قبل دارای یک جمله حاصل ضربی باشد.

$$G[X(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \left\{ \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \right\} + \int_{t_1}^{t_2} dt \, \lambda_0 \, x(t)y(t)$$

در این حالت به دلیل وجود جمله جدید، یک وابستگی بین $x(t)$ و $y(t)$ در معادلات دیفرانسیل نهایی ایجاد می‌شود. به طور مشابه با محاسبه وردش و حل مسئله خواهیم داشت:

$$\delta G = \int_{t_1}^{t_2} dt \, (\cdots) \, \delta x + \int_{t_1}^{t_2} dt \, (\cdots) \, \delta y + \int_{t_1}^{t_2} dt \, \left(\lambda_0 y \, \delta x + \lambda_0 x \, \delta y \right) \qquad (۱)$$

توجه به دلخواه بودن δx و δy، عبارت داخل پرانتز برابر صفر قرار داده می‌شود؛ در نتیجه برای معادلات دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -m\ddot{x} - m\omega^2 x + \lambda_0 y = 0 \\ -m\ddot{y} - m\omega^2 y + \lambda_0 x = 0 \end{cases} \qquad (۲)$$

این وضعیت، توصیف کننده دو نوسانگر است که در هر دو، تغییرات هر کدام به دیگری وابسته است. روش حل این نوع معادلات در آینده بررسی خواهد شد.